COORDINACIÓN EDUCATIVA Y CULTURAL CENTROAMERICANA

Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes Centroamericanos de Educación Primaria o Básica

Didáctica de la Matemática para la Formación Docente

Luis Alberto Gutiérrez Cruz

VOLUMEN 22

COORDINACIÓN EDUCATIVA Y CULTURAL CENTROAMERICANA

Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes Centroamericanos de Educación Primaria o Básica

Didáctica de la Matemática para la Formación Docente

CECC/SICA
Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana

Luis Alberto Gutiérrez Cruz

VOLUMEN 22

372.7
G684d

Gutiérrez Cruz, Luis Alberto Didáctica de la matemática para la formación docente / Luis Alberto Gutiérrez Cruz. – 1ª. ed. -- San José, C.R. : Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana, CECC/SICA, 2009.

170 p. : il. ; 28 x 21 cm. – (Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes Centroamericanos de Educación Básica; n. 22)

ISBN 978-9968-818-69-8

1. Matemáticas – Estudio y enseñanza. I. Título.

CRÉDITOS

La elaboración y publicación de esta colección fueron realizadas con la contribución económica del Gobierno Real de los Países Bajos, en el marco del **Proyecto Consolidación de las Acciones del Mejoramiento de la Formación Inicial de Docentes de la Educación Primaria o Básica, CECC/SICA.**

María Eugenia Paniagua Padilla
Secretaria General de la CECC/SICA

Juan Manuel Esquivel Alfaro
Director del Proyecto

Luis Alberto Gutiérrez Cruz
Autor del Texto

Marlene Víquez Salazar
Revisión y Asesoría del Contenido

Luis Alberto Gutiérrez Espinoza
Levantado de Texto y Diagramación

Teresa Espinoza Briceño
Revisión Filológica

Rolando Espinoza Lazo
William Membreño Soto
Héctor Tinoco Reed
Ilustración del Texto

Arnobio Maya Betancourt
Coordinador y Asesor de la 1ª
Edición Final y de la Reimpresión

Impresión Litográfica
Editorama, S.A

Para la impresión de esta 2ª. edición, (1ª. aún para el registro del ISBN) se ha respetado el contenido original, la estructura lingüística y el estilo utilizado por el autor, de acuerdo con un contrato firmado para su producción por éste y la Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana, CECC/SICA.

PRESENTACIÓN

A finales del año 2002 y comienzos del 2003, así rezan los respectivos colofones, **la Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana, (CECC/SICA),** publicó y entregó treinta y seis interesantes obras que estructuraron la **Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes Centroamericanos de Educación Primaria o Básica.**

Dichas publicaciones se originaron en el marco del **Proyecto Apoyo al Mejoramiento de la Formación Inicial de Docentes de la Educación Primaria o Básica,** el que se generó y se puso en ejecución, merced al apoyo que ha brindado la Cooperación Internacional del Gobierno Real de los Países Bajos.

Para desarrollar dichas obras, la CECC/SICA realizó una investigación diagnóstica en los países que forman parte orgánica de la institución, la cual permitió identificar, con mucha claridad, no sólo las temáticas que serían abordadas por los autores y autoras de las obras de la Colección, sino también las estrategias que debían seguirse en el proceso de diseño y producción de la misma, hasta colocar los ejemplares asignados en cada uno de los países, mediante sus respectivos Ministerios o Secretarías de Educación.

Los mismos materiales trataron de responder a los perfiles investigados de los formadores y de los maestros y de las maestras, así como a los respectivos planes de estudio.

Como podrá visualizarse en la información producida en función del Proyecto, cuyo inicio se dio en Diciembre de 1999, los programas que se han implementado en el marco del mismo son los siguientes:

1º. Desarrollo del perfil marco centroamericano del docente de Educación Primaria o Básica para mejorar el currículo de formación inicial de docentes.

2º. Mejoramiento de la formación de formadores de docentes para la Educación Primaria o Básica.

3º. Producción de recursos educativos para el mejoramiento del desarrollo del currículo de formación inicial de docentes de la Educación Primaria o Básica.

4º. Innovaciones pedagógicas.

5º. Investigación Educativa.

La Colección publicada y distribuida, a la que aludimos, pretende ofrecer a los países obras didácticas actualizadas e innovadoras en los diferentes temas curriculares de la Educación Primaria o Básica, que contribuyan a dotar de herramientas estratégicas, pedagógicas y didácticas a los docentes Centroamericanos para un eficaz ejercicio de su práctica educativa.

Después de publicada y entregada la Colección a los países destinatarios, la CECC/SICA ha hecho el respectivo seguimiento, el cual muestra el acierto que, en alta proporción, ha tenido la organización, al asumir el diseño, la elaboración, la publicación y su distribución.

Basada en estos criterios, es como la CECC/SICA y siempre con el apoyo de la Cooperación Internacional del Gobierno Real de los Países Bajos, ha decidido publicar una segunda edición de la colección (36 volúmenes) y a la cual se le suma un nuevo paquete de 14 volúmenes adicionales, cuya presentación de la 1ª edición se hace en éstos, quedando así constituida por 50 volúmenes.

Nuevamente presentamos nuestro agradecimiento especial al Gobierno Real de los Países Bajos por la oportunidad que nos brinda de contribuir, con esta segunda edición de la Colección, a la calidad de la Educación Primaria o Básica de la Región Centroamericana y República Dominicana.

MARIA EUGENIA PANIAGUA
Secretaria General de la CECC/SICA

PRESENTACIÓN DE LA PRIMERA EDICIÓN

En los últimos años, la Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana (CECC) ha venido ejecutando importantes proyectos que, por su impacto y materia, han complementado los esfuerzos ministeriales por mejorar y modernizar la Educación . Los proyectos de más reciente aprobación, por parte del Consejo de Ministros, están direccionados a enfrentar graves problemas o grandes déficits de los sistemas educativos de nuestra región. Este es el caso de Proyecto **" Apoyo al Mejoramiento de la Formación Inicial de Docentes de la Educación Primaria o Básica"**, cuyo desarrollo ha conducido a una exhaustiva revisión de los diversos aspectos relacionados con la formación de los maestros. Sus resultados son evidentes en cada país y con ello la CECC cumple su finalidad de servir cada vez mejor a los países miembros.

En este caso, ha de recordarse que este valioso proyecto es el producto de los estudios diagnósticos sobre la formación inicial de docentes ejecutados en cada una de las seis repúblicas centroamericanas en el año 1966, los cuales fueron financiados con fondos donados por el Gobierno de los Países Bajos. Entre las conclusiones y recomendaciones formuladas en el Seminario Centroamericano, una de las actividades finales del estudio indicado, el cual fue realizado en Tegucigalpa, Honduras, en septiembre de ese mismo año, los participantes coincidieron plenamente en poner especial atención a la formación de los formadores y en promover la "tercerización" de la formación de los maestros donde no existiere. También, hubo mayoría de opiniones sobre la necesidad de establecer perfiles del formador y de los maestros y respecto a la actualización de los respectivos planes de estudio. Por consiguiente, es apropiado afirmar que el contenido de este proyecto, orientado a mejorar la formación inicial de docentes, se sustenta en los seis diagnósticos nacionales y en el informe regional que recoge los principales resultados del Seminario Regional y la información más útil de los informes nacionales.

Como consecuencia del trabajo previo, explicado anteriormente, y de las conversaciones sostenidas con los funcionarios de la Embajada Real sobre los alcances y el presupuesto posible para este proyecto, finalmente se aprobó y dio inicio al mismo en diciembre de 1999 con los siguientes programas:

1. **Desarrollo del perfil marco centroamericano del docente de Educación Primaria o Básica para mejorar el currículo de formación inicial de docentes.** Con base en este perfil se construyeron los perfiles nacionales, los que sustentaron acciones de adecuación de los currículos de formación inicial de docentes en cada país.
2. **Mejoramiento de la formación de formadores de docentes para la Educación Primaria o Básica.** Con el propósito de definir perfiles académicos de los formadores de docentes que den lugar a planes de estudio de grado y de postgrado.
3. **Producción de recursos educativos para el mejoramiento del desarrollo del currículo de formación inicial de docentes de la Educación Primaria o Básica.** Dirigido a editar obras bibliogáficas y a producir materiales interactivos que se empleen en las aulas de formación de maestros.
4. **Innovaciones pedagógicas.** Consistente en poner en práctica y evaluar innovaciones pedagógicas en el campo de la formación inicial y en servicio de docentes.
5. **Investigación Educativa.** Desarrollo de investigaciones sobre temas dentro de la formación inicial de los docentes del Nivel Primario.

Es oportuno destacar cómo la cooperación financiera y técnica del Gobierno de los Países Bajos, a través de su Embajada Real en San José, Costa Rica, ha sido no solo útil a los Ministerios de Educación del Área, por centrarse en uno de los factores determinantes de la calidad de la Educación, sino también porque ha permitido, en dos momentos, completar una propuesta de trabajo que ha impactado y que ha abierto nuevas vertientes de análisis y reflexión de la formación inicial de docentes para la Educación Primaria.

Con esta Presentación se quiere exaltar la importancia y trascendencia del Programa 3, en el que se enmarca la elaboración de las obras bibliográficas, orientadas a solventar, en alguna medida, la falta de disponibilidad de textos referenciales de actualidad en el campo educativo, que contribuyan a elevar la calidad de la formación profesional de los maestros y la de sus formadores, donde ello sea una necesidad. Además, de que la colección se pone en manos de quienes forman educadores para la Educación Primaria y de los estudiantes de pedagogía. Todo esto es producto del conocimiento y la experiencia de profesionales centroamericanos que han consagrado su vida a la educación y al cultivo de los diversos saberes. Llegar a la definición de las obras y sus títulos fue un largo y cuidadoso proceso en el que intervinieron diversos profesionales de la región, de acuerdo con el concurso establecido y publicado para tales efectos.

Es importante apuntar que las obras que integran esta colección de valor incalculable, cubren los principales temas curriculares y técnico-pedagógicos que deben acompañar a un adecuado proceso de formación inicial de docentes. Por ello, van desde los temas fundamentales de Educación, el Currículo, Ejes Transversales, la Didáctica, la Evaluación, la Supervisión y Administración Educativa, hasta temas metodológicos y estratégicos específicos relacionados con el conocimiento teórico y con la enseñanza de la Ciencias Sociales, la Matemática, las Artes, el Lenguaje, las Ciencias Sociales y la Investigación Educativa. En su elaboración se siguió un proceso de amplia participación, dentro del cual se recurrió a jueces que analizaron las obras y emitieron sus comentarios y recomendaciones enriquecedores en algunos casos y correctivos en otras. En este proceso, los Ministerios de Educación de la región tuvieron un papel fundamental al promover dicha participación.

Esta Secretaría General considera que la rica colección, por la diversidad temática, visión y actualidad, es un aporte sustantivo, muy visible, manejable y de larga duración, que el Gobierno de los Países Bajos, a través de la CECC, le entrega gratuitamente a las instituciones formadoras de educadores y a las dependencias de los Ministerios de Educación, encargadas de este campo. Del buen uso que hagan formadores y formados del contenido de esta colección de obras, va a depender, en definitiva, que el esfuerzo de muchos profesionales, realizado en el marco de la CECC, genere los resultados, el impacto y las motivaciones humanas y profesionales de quienes tendrán en las aulas centroamericanas el mayor tesoro, la más grande riqueza, de nuestras naciones: las niñas y los niños que cursan y cursarán la Educación Primaria. El aporte es objetivo. Su buen uso dependerá de quienes tendrán acceso a la colección. Los resultados finales se verán en el tiempo.

Finalmente, al expresar su complacencia por la entrega a las autoridades de Educación y al Magisterio Centroamericano de obras tan valiosas y estimulantes, la Secretaría General resalta la importancia de las alianzas estratégicas que ha logrado establecer la CECC, con países y agencias cooperantes con el único espíritu de servir a los países del Área y de ayudar a impulsar el mejoramiento de la educación en los países centroamericanos. En esta ocasión, la feliz alianza se materializó gracias a la reconocida y solidaria vocación de cooperación internacional del Gobierno de los Países Bajos y, particularmente, a los funcionarios de la Embajada Real, quienes con su apertura, sensibilidad y claridad de sus funciones hicieron posible que la CECC pudiese concluir con tanto éxito un proyecto que nos deja grandes y concretas respuestas a problemas nuestros en la formación de maestros, muchas enseñanzas y deseos de continuar trabajando en una de las materias determinantes para el mejoramiento de la calidad de la Educación.

MARVIN HERRERA ARAYA
Secretario General de la CECC

ÍNDICE

Dedicatoria

A mi esposa Teresa Espinoza Briceño
A mis hijos: Luis Alberto, Jessica y Heidi.
A todos los profesores de matemática.
Al profesor Francisco Hernández.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de una disposición hacia el estudio de la matemática en los estudiantes ha sido una preocupación constante en la instrucción matemática. Esta es, en gran medida, la razón de ser de la Didáctica de la Matemática. Pero; ¿Qué es la Didáctica de la matemática?

En una primera aproximación diremos que la Didáctica de la Matemática es la ciencia que estudia todos los aspectos pedagógicos, psicológicos, epistemológicos, sociológicos, históricos y filosóficos que influyen en el aprendizaje y asimilación de la matemática escolar; es decir, en los contenidos y métodos reconocidos actualmente por la comunidad científica como apropiados para determinado nivel educativo.

La Didáctica de las Matemáticas tiene como objeto de estudio el sistema didáctico formado por el docente, el alumno, el saber matemático. El determinismo de este objeto lo constituyen las distintas estrategias pedagógicas mediante las cuales la ciencia matemática se transforma en un objeto de conocimiento para el alumno (a). Este objeto de conocimiento lo llamaremos "asignatura matemática".

Sin obviar la importancia que tiene el docente y el alumno en el sistema didáctico, nuestro texto centra su atención en el determinismo del sistema. Básicamente, todo el texto está orientado a dar respuestas a las siguientes preguntas: ¿Cómo desarrollar en el estudiante una disposición hacia el estudio de la matemática? ¿Qué hacer para que el alumno utilice eficientemente el conocimiento aprendido en un contexto o en una situación nueva no analizada en el aula de clase?

En nuestro interés, por encontrar respuestas a estas preguntas, partimos del hecho de que el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática es una continua acción mental, donde el estudiante desarrolla diversas habilidades y utiliza diferentes estrategias con el fin de descubrir el conocimiento matemático. A estas acciones mentales es lo que llamamos "proceso de construcción del conocimiento".

Desde esta perspectiva, el alumno elabora conceptos, realiza demostraciones, construye algoritmos, resuelve problemas, etc. La columna vertebral del texto se refiere a los enfoques didácticos de estas acciones mentales.

Otro elemento importante en el texto es el concepto de ASIGNATURA MATEMÁTICA. En nuestro texto manejamos el concepto de que la asignatura matemática es una TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA del "saber sabio" al "saber enseñado". Esta concepción y terminología la tomaremos de Yves Chavellard y desde esta perspectiva entendemos como "saber sabio" la ciencia matemática y como "saber enseñado" la asignatura matemática. El puente entre ambos saberes es lo que en el texto llamamos LÍNEAS DIRECTRICES.

¿Cómo están ordenados los capítulos en el texto?

El primer capítulo comprende un análisis de qué es para qué debemos estudiar matemática y cuál es la función de la asignatura sobre la misma. La razón de este capítulo es la convicción que tenemos de que un profesor de matemática orientará mejor el proceso enseñanza aprendizaje si está claro de la función de la asignatura que imparte.

Los capítulos II y III están dedicados al análisis de las líneas directrices con el propósito de que el docente tenga elementos de juicio consistentes para analizar un programa de matemática e incluso estructurar un programa si el caso lo requiere.

Los capítulos del IV al VI los dedicamos a las estrategias para la elaboración de conceptos, la demostración de proposiciones y la resolución de problemas. Como dijimos anteriormente, a nuestro criterio, esta es la columna vertebral del texto.

El capítulo VII lo hemos dedicado exclusivamente a la didáctica de la enseñanza de la Geometría, el capítulo VIII a la construcción de los algoritmos y el último a la planificación y uso de los medios de enseñanza.

Una característica del texto, que nos parece importante, es la independencia entre capítulos. Puesto que un capítulo no depende del otro, el docente puede ordenar los contenidos a su conveniencia u omitir aquel o aquellos que no necesite.

Desde ya le deseamos éxito a los docentes en el uso de este texto, que lo hemos escrito pensando en contribuir aunque sea modestamente a mejorar su noble y loable labor en el aula.

CAPÍTULO I

FUNCIÓN DE LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICA EN LA ESCUELA PRIMARIA

OBJETIVOS GENERALES:

Que los participantes en el curso de la asignatura Didáctica de las Matemáticas:

1) Identifiquen como principal función de la asignatura matemática en la escuela primaria, la formación en los alumnos (as) de este nivel, de una cultura matemática, entendida ésta, como un hábito mental aplicable a las otras áreas del saber.

2) Analicen críticamente los objetivos que el Ministerio de Educación de cada país Centroamericano ha formulado para la asignatura Matemática.

3) Reconozcan como reto fundamental de la enseñanza de la matemática en la escuela primaria el desarrollo en el alumno (a) de la capacidad de construir el conocimiento matemático a partir de la observación y el análisis de fenómenos propios de su medio.

PRESENTACIÓN:

Aprender a calcular áreas y volúmenes así como a desarrollar la capacidad de efectuar cálculos correctamente con números naturales y fraccionarios y resolver problemas de la "vida real" para "desarrollar la inteligencia" parecen ser, para muchos, las únicas razones por las cuales deberíamos estudiar matemática en la escuela primaria.

Una breve reflexión a la luz de estas razones conduce obligadamente a las siguientes preguntas:

1. ¿Cumple actualmente la escuela con estas expectativas de la sociedad? Esto es: ¿Están realmente preparados nuestros egresados (as) de la escuela primaria para resolver problemas, hacer cálculos y conversiones de medida?

2. Si este no es el caso, ¿qué aspectos descuida la escuela y qué aspectos cultiva que resultan inútiles para el alumno (a)?

Analicemos algunas aristas de la situación.

¿Qué ocurre con el aprendizaje tedioso de los algoritmos de las operaciones? ¿Acaso siguen siendo necesarios?

Como todos sabemos, actualmente existen en el mercado, y a precios muy bajos, calculadoras de bolsillo fáciles de usar con las cuales se efectúan, con notable velocidad y exactitud, cálculos que para cualquier estudiante de primaria resultarían inmensamente difíciles si los intenta hacer aplicando el algoritmo que aprendió en la escuela. He aquí dos ejemplos.

¿Qué alumno (a) de primaria calcularía rápidamente y exacto $\sqrt{5368489}$ aplicando el algoritmo aprendido en la escuela?

Con el auxilio de una calculadora, en términos de segundos, sabemos que: $\sqrt{5368489} = 2317$

¿Cuánto tiempo tarda un alumno (a) para calcular el cociente de $0.06635904 \div 0.3142$ usando el algoritmo de la división para decimales?

Nuevamente, si usamos una calculadora, en cuestión de segundos sabemos que:

$$0.06635904 \div 0.3142 = 0.2112$$

Los ejemplos anteriores le dan sentido a la siguiente pregunta: ¿Vale la pena invertir seis años enseñándole a un alumno los algoritmos de las operaciones, si cuando salga de la escuela los va a efectuar con una calculadora?

Una arista más. ¿Qué ocurre con la aplicación en el medio de propiedades como conmutatividad, asociatividad, inverso, opuesto, idéntico etc?

La realidad ha demostrado que, al menos hasta ahora, tales propiedades no han podido traspasar los muros de la escuela y se han quedado en la mente del alumno, sólo como un recuerdo de algo que estudió pero que nunca utilizó.

Pareciera que en el medio ambiente del niño (a) e incluso en el mundo profesional, tales propiedades no se necesitan, entonces: ¿Para qué enseñarlas?

Ahora veamos la otra cara de la moneda. ¿Qué tan útiles son los problemas que la Escuela plantea y resuelve?

La psicóloga Terezinha Carraher[1] nos plantea en su libro "EN LA VIDA DIEZ EN LA ESCUELA CERO". la siguiente situación: "Si tuviéramos ante nosotros –dice Terezinha– la tarea de distribuir iguales cantidades de frijoles obtenidos después de una recolección entre 30 familias, el rigor matemático exige contar granos, dividir el total entre 30 y después contar para cada familia el número de granos que le corresponde. Tal solución, aunque matemáticamente correcta, en la práctica es absurda. La organización de esta actividad requiere un camino más eficiente"...

La situación planteada por Terezihna nos conduce a pensar que, en la mayoría de los casos, los problemas planteados por la escuela son hipotéticos y totalmente ajenos al medio ambiente del alumno (a). En el mundo donde nuestros estudiantes viven, tales problemas no existen.

[1] EN LA VIDA DIEZ EN LA ESCUELA CERO - Teresina Carraher - Editores siglo XXI: 1991

Lo anterior hace suponer que existe un notable divorcio (al menos aparente) entre las expectativas de la sociedad y lo que realmente la escuela enseña o pretende enseñar. ¿Será ésta una de las causas por las cuales nuestros estudiantes no están motivados para estudiar matemática?

Es evidente que la razón de ser de la asignatura matemática en la escuela primaria va más allá de cálculos de áreas y volúmenes, conversión de medidas y resolución de problemas. Seguramente existe una razón científica por la cual es necesario estudiar los algoritmos a pesar de la existencia de la calculadora. Las propiedades de las operaciones deben tener alguna justificación para ser estudiadas. La formulación y resolución de problemas teóricos y situaciones hipotéticas deben estar sustentadas por alguna razón pedagógica. La pregunta es: ¿Cuál es actualmente la verdadera función de la asignatura matemática en la escuela primaria?

Posiblemente la respuesta la encontremos en lo que Yves Chavellard[2] llama la *"Transposición Didáctica del saber sabio al saber enseñado"* cuyos actores son, según Chavellard: el alumno, el maestro y el saber.

En esta unidad reflexionaremos acerca de la función de la asignatura matemática en la escuela primaria, los retos didácticos que tales funciones plantean y las estrategias pedagógicas pertinentes para enfrentarlos; esto es, la forma de armonizar la lógica natural del alumno (a) con las contradicciones aparentes que la asignatura plantea.

DESARROLLO DEL CONTENIDO:

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA: ¿Por qué y para qué se enseña matemática en la escuela primaria?

Actividades para reflexionar:

1. Indica a tus alumnos (as) que lean y analicen los programas de matemáticas de su país y a partir de sus reflexiones escriban al menos tres objetivos de la enseñanza de la asignatura matemática en la escuela primaria.

2. De acuerdo con su criterio. ¿Cuáles de las siguientes opiniones se ajustan más a lo que debe ser el objetivo de la enseñanza de la matemática en la escuela primaria?[3]

    - "La matemática no debe considerarse como un conocimiento complejo aplicable a las necesidades de la vida, sino, principalmente, como un medio de cultura intelectual, dirigido a desarrollar la facultad del raciocinio".

      Cremona, Betty y Brioschi...1867

    - "La matemática debe ser un instrumento para abrir camino a muchos misterios obscuros del universo".

Vito Volterra...1901

[2] LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA - Yves Chevallard - Editorial AIQUE. 1998

[3] Texto tomado de Didáctica de la Matemática. Emma Castelnuovo, Editorial TRILLAS. 1980

- "El estudiante debe comprender la matemática como un modelo de ciencia y fuente de belleza intelectual, así como herramienta absolutamente indispensable en el intento de explorar los fenómenos que aparecen tanto en el mundo de la ciencia de la naturaleza como en el mundo de las ciencias sociales y humanas".

  Miguel de Guzmán y José Colera...1998[4]

- "El objetivo de la enseñanza de la matemática es que los estudiantes puedan utilizar eficientemente el conocimiento aprendido en un contexto o en una situación para resolver problemas en situaciones diferentes o novedosas".

  Luz Manuel Santos Trigo...2000[5]

¿Es posible formular un objetivo de la enseñanza de la matemática en la escuela primaria tomando algunos elementos de las opiniones anteriores?

Si es posible, inténtalo____

UBICACIÓN DEL PROBLEMA:

Para comprender la función de la asignatura matemática en la escuela primaria conviene diferenciar la ciencia Matemática de la asignatura Matemática. Todos estamos de acuerdo que la matemática es una *ciencia organizada con un cuerpo de definiciones, axiomas postulados y teoremas*. Como asignatura, la matemática es una forma de actividad humana en la cual un sujeto llamado alumno (a), guiado por un docente, en una aula de clase, reflexiona sobre determinados fenómenos con el fin de elaborar y construir el conocimiento matemático perfectamente delimitado en un programa de estudio.

Los programas contienen, en opinión de Yves Chevallard[6] "los contenidos de saberes designados como aquellos a enseñar".

"Un contenido de saber-dice -Chevallard[7]- cuando se transforma en saber a enseñar, sufre un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que transforma un objeto de saber en un objeto a enseñar es lo que se llama "transposición didáctica"

Un punto importante en nuestro análisis es el hecho de que los programas de estudio pertenecen a un sistema educativo específico y, como todos sabemos, los sistemas educativos son estructuras colmadas de voluntad humana. Razón por la cual soportan las exigencias de toda una sociedad para la que la educación es su último recurso.

---

[4] Matemática II. Miguel Guzmán y José Cólera –Editorial AMAYA. 1998

[5] Principios y Métodos de la Resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Luz Manuel Santos Trigo. Grupo editorial Iberoamericano año 2000.

[6] La Transposición Didáctica. Yves Chevallard: Editorial AIQUE. 1998

[7] La Transposición Didáctica. Yves Chevallard: Editorial AIQUE. 1998

Lo anterior hace suponer que la asignatura Matemática comprende un conjunto de "saberes matemáticos" que la sociedad designa como "saberes a enseñar" de acuerdo con determinados intereses en un momento dado.

Desde esta perspectiva, el proceso de transformación didáctica (en el lenguaje de Chevallard) es, en suma, una actividad humana, y como tal, la asignatura matemática es una forma particular de organizar los objetos y los acontecimientos en el mundo.

Queda claro entonces que la función de la asignatura matemática en la escuela primaria debemos buscarla *en los objetivos que los distintos Ministerios de Educación definen para este nivel y en la ciencia matemática*.

UN POCO DE HISTORIA:

En opinión de Régine Douady[8] (catedrática de la Universidad París VII), durante los años sesenta y setenta se dio una crisis social muy fuerte alrededor de la enseñanza de la matemática en muchos países. Durante esta época "el objetivo pedagógico era el de poner a disposición de los alumnos un número reducido de herramientas matemáticas potentes, respetanto en todo momento el rigor matemático". Esta decisión se basaba en una hipótesis: si los alumnos tenían estas herramientas potentes y generales, entonces podían aplicarlas en muchas situaciones diferentes. Desde el punto de vista del aprendizaje había una influencia muy fuerte de los psicólogos de la escuela de Piaget y, por consiguiente, una gran difusión de su teoría constructivista.

Recordemos que Piaget fue el que más contribuyó para que se reconociera que *la lógica y la matemática pueden ser tratadas como formas de organización de la actividad humana*. La idea central de Piaget[9] contiene la noción de que es el propio sujeto el que organiza su actividad y consigue, por medio de la evolución de esta organización llegar a cambios llamados "de desarrollo del pensamiento". Según Piaget, es posible encontrar en la organización de la acción elementos que nos indican qué estructuras lógica-matemática están implícitas en la propia acción del sujeto.
Mientras en el mundo se daba la "crisis de los sesentas"; ¿Qué ocurría en nuestros países?

Posiblemente, el mayor impacto que sufrió la asignatura de Matemática en nuestros países, en esta época, fue la introducción como contenido programático, de la TEORÍA DE CONJUNTOS. A este fenómeno se le llamó MATEMÁTICA MODERNA.

Al respecto transcribimos lo que en 1965 opinaba el entonces catedrático de matemáticas de la Universidad de Madrid Don José Etayo Miqueo[10]. "Estamos asistiendo –afirma Don José– desde hace algunos años a un cambio en la mentalidad de lo que es y cómo debe enseñarse la matemática en los distintos niveles de enseñanza. Al resultado de este cambio se le conoce de un modo seguramente impropio, con el nombre de Matemática Moderna y la modalidad y procedimiento de su introducción puede convertirse en un problema, porque una modificación aparentemente sustancial no puede hacerse de la noche a la mañana sin que se resienta todo un modo de entender las cosas".

[8] El niño, la matemática y la realidad: TRILLAS México. 1991

[9] El juicio y razonamiento en el niño. Jean Piaget. Editorial Guadalupe. 1972

[10] Prólogo al libro Matemática 5 curso de bachillerato. Ediciones Bruño. 1965

Y Don José tenía razón. Realmente, en Centroamérica fue un problemas de grandes magnitudes, precisamente por el papel que le asignaron a estos contenidos en la escuela primaria.

Fue la época de los "conjuntos". Todos los conceptos y algoritmos matemáticos se querían explicar mediante la teoría de conjuntos o, en una posición opuesta, se desarrollaban los contenidos de la teoría sin ninguna conexión con los demás contenidos, quedando en el estudiante la impresión de una teoría inaplicable e inconexa.

¿Cuál fue el error?... Entre muchos, ubicar la teoría de conjuntos como *la negación de la Matemática Clásica*.

Actualmente sabemos que la teoría de conjuntos no debe considerarse, al menos en primaria, como un contenido programático, sino como *una línea directriz* cuya función fundamental radica en la *organización y categorización de los conceptos matemáticos a partir de las operaciones lógicas de adición (unión de conjuntos) y multiplicación (intersección de conjuntos)* dando así unidad y coherencia al conocimiento matemático. Por otra parte, la correspondencia entre conjuntos conduce a la línea directriz "Relaciones y Funciones" de tanta aplicación en la construcción de los algoritmos de las operaciones fundamentales. Ahora sabemos que la "Teoría de Conjuntos" no es la negación de la matemática clásica en el sentido de que enseñe distintas cosas sino un *"modo distinto de enseñar la misma cosa"* afirma Don Luis Santaló[11]. En este aspecto hemos avanzado mucho.

Existieron en esa época, otros aspectos que llamaríamos de carácter circunstancial. Uno de ellos fue "enseñar lo que aprendimos y cómo lo aprendimos". En este sentido la pedagogía ha hecho muy poco para modificarlo y sólo se ha dirigido a cambiar las FORMAS de enseñanza sin ocuparse todavía de "qué enseñamos". Manteniendo así estáticos los objetivos, olvidando que, al menos en matemática, la organización de una clase está íntimamente relacionada con el objetivo de la asignatura, y un cambio en la organización de la clase solo tiene sentido, si nuestros objetivos han cambiado.

En los últimos años, los cambios curriculares muestran sorprendentes avances en los que respecta a la organización y categorización del marco teórico de la asignatura. Los objetivos y logros de aprendizaje están más claros. Pero la función de la asignatura aún no está bien definida y seguimos dando clase con la noble, pero reducida idea de proporcionar al alumno un conjunto de conceptos, definiciones y algoritmos que le servirán para abordar con éxito el siguiente nivel.

Sin menospreciar tan loable función, queda todavía en el olvido una de las funciones más importantes de la asignatura, tal es *la formación en el alumno (a) de una CULTURA MATEMÁTICA que se convierta más tarde en conducta y se manifieste concretamente en forma de pensar y actuar científicamente ante las situaciones que el medio le presente*.

[11] Conferencia del Dr. Santaló dictada en República Dominicana. 1998.

ANÁLISIS DEL PROBLEMA:

Ante la pregunta: ¿cuál es la función de la asignatura matemática en la escuela primaria? tenemos dos respuestas: la primera, asociada directamente al encargo social de la asignatura y, se supone, claramente definidos en los objetivos, estándares educativos y logros de aprendizaje. La segunda, relacionada con la ciencia matemática, y totalmente involucrada en la formación de lo que hemos dado en llamar cultura matemática. Esta función es la que se refleja muy poco en los objetivos y es a ella que le dedicamos la mayor parte del análisis, partiendo de lo que en los distintos programa se propone. ¡Empecemos!

Un propósito universal en los programas de matemática es "desarrollar el pensamiento lógico".
Al respecto resultan pertinentes las siguientes preguntas:

> ¿Qué es el pensamiento lógico?
> ¿Es posible "desarrollar" el pensamiento lógico de una persona? ¿Cómo?
> El desarrollo del pensamiento lógico... ¿Es una tarea exclusiva de la asignatura de matemática?
> Llama poderosamente la atención que este objetivo no aparece formulado en las otras asignaturas (español, ciencias sociales, ciencias naturales) ¿Por qué?

Intentemos una respuesta a la primera pregunta y analicemos lo que en la escuela hacemos para lograrlo.

¿Qué es el pensamiento lógico? En su conceptualización más elemental, el pensamiento lógico es la facultad de comparar y relacionar dos o más conceptos, situaciones o circunstancias mediante la relación "causa-efecto"[12].

Los primeros pasos sobre el desarrollo del pensamiento lógico los da el alumno o alumna en lo que se conoce como "Etapa de Aprestamiento" lo que no es otra cosa más que la ubicación en el tiempo y el espacio a partir de un punto de referencia.

Ampliemos un poco más esta afirmación.

Durante la etapa de aprestamiento el alumno o alumna usa los conceptos espaciales complementarios duales "arriba-abajo"; "encima-debajo"; "dentro-fuera"; "cerca-lejos"; delante-detrás"..tales conceptos no contribuyen en nada al pensamiento lógico si nuestro estudiante no reconoce su relatividad con respecto al punto de referencia. Por ejemplo; "el pizarrón está *lejos* del último alumno de la clase pero *cerca* de la o el profesor, igualmente se puede estar *dentro* del colegio, pero *fuera* del salón de clase; podemos decir que Anita llegó *antes* de Juan pero *después* de Alfredo.

¿Cuándo violentamos el pensamiento lógico? Veamos un ejemplo.

[12] Concepto dado por el Diccionario de la Real Academia Española. –Ediciones Larousse 1998.

Le enseñamos al alumno que para multiplicar fracciones, el numerador del producto se calcula multiplicando los numeradores; y el denominador del producto se calcula multiplicando los denominadores. Esto es: $\frac{3}{4} \bullet \frac{2}{5} = \frac{3 \bullet 2}{4 \bullet 5}$

La lógica del alumno seguramente le indique que para dividir fracciones se debe proceder en forma similar, esto es: $\frac{6}{15} \div \frac{2}{5} = \frac{6 \div 2}{15 \div 5} = \frac{3}{3} = 1$ y el alumno tiene razón.

¿Por qué entonces no le permitimos ese razonamiento y lo obligamos a proceder así:

$\frac{6}{15} \div \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \bullet \frac{5}{2}$ sin darle ninguna justificación.

Los docentes sabemos que la justificación es el inverso multiplicativo. Pero, el alumno lo convierte en algo mecánico.

Pero lo importante no es desarrollar el pensamiento lógico en la clase de matemática. Lo esencial es que *dicho pensamiento se incorpore a la cultura del alumno y lo aplique en el análisis de cualquier otra situación no necesariamente algorítmica*. He aquí un ejemplo: ¿qué relación tiene quebrar un huevo, freírlo y la propiedad conmutativa de la adición? Para un estudiante que no tiene cultura matemática, ninguna; pero para quien ha incorporado la matemática a su bagaje cultural, sabrá que quebrar un huevo y freírlo son acciones no conmutativas; en cambio, limpiarse los zapatos y bañarse sí son acciones conmutativas. El fondo del asunto radica en el concepto de conmutatividad como "dos acciones que pueden realizarse sin importar el orden y obtener el mimo resultado".

Es desde esta perspectiva que tiene sentido estudiar, en la escuela primaria, las propiedades de las operaciones. Estas propiedades resultarán interesantes para el alumno en la medida que las incorpore a su cultura matemática y formen parte de su pensar y actuar. El "desarrollo del pensamiento lógico" incluye, por lo tanto, *la capacidad del alumno de transferir los conocimientos matemáticos a otras áreas*.

- Acelerar y frenar son acciones opuestas cuyo idéntico es el estado de reposo. Tales acciones no son conmutativas.

- Calentar agua y enfriarla son acciones opuestas no conmutativas cuyo idéntico es la temperatura ambiente.

En estos dos ejemplos el signo "-" representa exactamente lo que debe representar "lo opuesto a" (no necesariamente restar) De esta forma diríamos:

Frenar = -(acelerar)
Calentar = -(enfriar)

¿Cuál es el riesgo de presentar los negativos así en la escuela primaria?

Un ejemplo clarísimo de violencia del pensamiento lógico lo constituye la forma en que presentamos la llamada ley de los signos. El alumno difícilmente encuentra una explicación lógica al hecho de que el producto de dos cantidades negativas sea una cantidad positiva. Al final en limita un memorizar una tabla como esta:

(+) . (+) = +	(-) . (+) = -
(+) . (-) = -	(-) . (-) = +

Aquí hay muchos errores, incluso de carácter científico. El más notorio de ellos es que el producto no está definido por signos sino para cantidades negativas o positivas. Si quisiéramos definir el producto para signos, tendríamos que construir otra estructura matemática ajena a la que usamos en primaria y en secundaria. Pero el problema de fondo es de carácter pedagógico: la dificultad de darle sentido lógico a estos productos. He aquí una propuesta.

Una persona necesita comprar un electrodoméstico, tal objeto, le puede resultar bueno o con defecto. Por otra parte, sabemos que "comprar el aparato y que resulte bueno" es una multiplicación lógica. Definamos entonces:

+ : Comprar el electrodoméstico
- : No comprar el electrodoméstico
} En cuanto a comprar o no el electrodoméstico

+ : El objeto comprado es bueno
- : El objeto comprado no es bueno
} En cuanto a la calidad del objeto

+ : La decisión fue afortunada
- : La decisión fue desafortunada
} En cuanto a la decisión final

Bajo estas definiciones, la multiplicación lógica nos da los siguientes resultados:

(+) . (+) = + Comprar el electrodoméstico y que resulte bueno es una decisión afortunada.
(-) . (-) = + No comprar el objeto que iba a resultar defectuoso es también una decisión afortunada.

Si la persona debe comprar 4 electrodomésticos 5 veces cada año y toma la decisión de no comprarlos y además los aparatos eran defectuosos entonces tenemos:

$$(-4) \cdot (-5) = +20$$

Esto es, la persona ha tomado 20 decisiones afortunadas.

Ejemplos como estos pueden multiplicarse con el fin de darle sentido lógico al producto de números negativos y positivos.

¿Cuál es la transferencia de este conocimiento? El alumno (a) entiende que evitar malas decisiones trae ventajas y de esta manera desarrolla su sentido lógico.

Un segundo objetivo muy común en los programas de estudio es el siguiente.

"Que el estudiante lea, escriba y compare, ordene y represente números naturales y fraccionarios para realizar las operaciones fundamentales, construir significado con números y aplicar estos conceptos en la formulación y resolución de problemas".

Lo que en lenguaje sencillo este objetivo nos indica:

2.1. Que el alumno (a) lea, escriba y compare cantidades...

2.2. Que domine los algoritmos de las operaciones fundamentales y las aplique correctamente a la resolución de problemas.

Respecto al inciso (2.1) lo que se está exigiendo es que el egresado (a) de primaria tenga sentido lógico de la cuantificación. Esta parte del objetivo está íntimamente relacionada con el concepto de aproximación y el estándar de medición. A manera de ejemplo, ejercicios como los siguientes le dan sentido a la cuantificación. ¿Qué acciones pueden realizarse en tres minutos? ¿Cuántos granos de frijoles hay aproximadamente en una libra? ¿Cuántos libras u onzas pesa tu libro de matemática? ¿Cuánto pesa aproximadamente un perro pastor alemán de 8 meses de edad? ¿Cuántas calorías tiene un mango maduro?

La importancia de que el alumno (a) tenga conciencia de una cantidad, radica en el hecho de que más tarde usará este conocimiento matemático para organizar y planificar sus actividades.

En relación a (2.2) lo que se está exigiendo es que el alumno (a) asimile las leyes lógicas que sustentan el algoritmo de una operación; leyes que están referidas a un sistema numérico en particular, y que no son universales para todos los sistemas.

Ahora estamos en capacidad de reflexionar sobre los algoritmos y la calculadora, de lo cual hablamos en la presentación del capítulo. En realidad, *la calculadora ejecuta electrónicamente el algoritmo, la escuela presenta las leyes lógicas que lo sustentan*. De esta forma, la escuela y la calculadora se complementan, por tanto, no hay razón para que el alumno no use la calculadora una vez que ha asimilado las leyes que rigen el algoritmo.

Reflexionemos un poco sobre la resolución de problemas ¿Cuál es la razón de resolver problemas en la escuela? Básicamente que el alumno (a) *formule y practique estrategias de solución*. Es tan importante la creación de estrategias de solución por parte del alumno que se ha intentado estructurar métodos de enseñanza basados en la resolución de problemas. Mucho cuidado con lo que se conceptualiza como problema. Una situación en la cual el estudiante solo necesita identificar el modelo matemático a usar no adquiere la categoría de problema. Este es el caso de "calcular el área del rectángulo que mide 3 cm de base y 4 cm de altura"

El problema para que sea tal, debe contener –en opinión de Polya[13]– un cierto descubrimiento en su solución; algo que ponga a prueba "las facultades inventivas del alumno". Y en esto radica precisamente el poder formativo de la resolución de un problema.

Otro objetivo que a menudo se lee en el programa es el siguiente[14]:

"Que el estudiante use los conceptos geométricos básicos en la identificación, clasificación, trazado y construcción de figuras y cuerpos geométricos, empleando los instrumentos apropiados"

En palabras sencillas, se trata de que el alumno use correctamente los instrumentos geométricos y que al trazar figuras y construir cuerpos geométricos identifique las relaciones entre los distintos elementos y conceptos geométricos que aplica. Sobre este objetivo nos parece oportuno transcribir la opinión de Guido Castelnuovo[15]. "Cuando de geometría se trata –dice Guido– les presentamos el universo como un edificio, cuyas líneas tiene una exactitud geométrica y que nos parecen desfiguradas y oscuras a causa del carácter ignorante de nuestros sentidos. Deberíamos hacer comprender que las formas inciertas reveladas por los sentidos constituyen la sola realidad accesible, la cual sustituimos, para responder a ciertas exigencias de nuestro espíritu, por una precisión ideal". Esta opinión fue expresada en 1912 y, de acuerdo con nuestros programas, nada hemos avanzado al respecto.

Nosotros creemos que el papel de la geometría en la escuela primaria es el análisis de formas y tamaños como modelos matemáticos, construidos a partir de la observación y análisis de formas y tamaños de objetos de la realidad.

NUESTRO PUNTO DE VISTA SOBRE EL PROBLEMA:

Como recordaremos, el problema central, objeto de estudio de la unidad, es: "Por qué se enseña matemática en la escuela primaria"

El análisis realizado en el acápite anterior, nos induce a concluir que las funciones de la asignatura matemática se pueden formular en los siguientes términos:

1. Dotar al alumno (a) de un instrumento lógico que, incorporado como parte de su cultura, le permitan pensar y actuar científicamente en las circunstancias que el medio presente.

2. Proporcionarle al alumno (a) estrategias efectivas de planificación y organización de sus actividades mediante la cuantificación consciente del tiempo y del espacio.

3. Desarrollar la imaginación y la creatividad del estudiante en la formulación de estrategias para abordar con éxito las situaciones problemáticas de su medio.

[13] George Polya . Como plantear y resolver problemas. Editorial Trillas (1978)

[14] Programa de estudio de la República de Nicaragua. (2001).

[15] Emma Castelnuovo. Didáctica de la Matemática Moderna. Editorial Trillas (1980)

1. Apliquen correctamente los algoritmos de las operaciones fundamentales en el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números fraccionarios, mediante el conocimiento de las leyes lógicas que los rigen.

2. Dotar al alumno (a) de la sensibilidad científica que le permitan valorar la importancia de los modelos geométricos como aproximación aceptable de las formas y tamaños de los objetos, los elementos que se pueden definir en dichos objetos y las relaciones entre estos elementos.

¿Qué hacer para que la asignatura matemática cumpla con tan nobles propósitos?

En 1896, el psicólogo Jhon Dewey[16] afirmaba que "la educación es la vida" "aprender es hacer". El mismo Dewey sugiere como un importante mecanismo de aprendizaje, el mecanismo de conexión, el cual indica que el aprendizaje se establece por conexiones asociativas que, a su vez, se ampliarán con otras nuevas, dando lugar a unidades mayores. Aunque psicólogo, Dewey de algún modo nos presenta una estrategia pedagógica para el caso de la matemática.

Según el profesor Jeremy Kilpatric[17] de la Universidad de Georgia: "La nueva visión de la enseñanza de la matemática es de facilitadora de la adquisición del conocimiento por parte del que aprende, en contraposición de una visión de transmisora del conocimiento ya construido."

Estos criterios constituyen la estrategia fundamental para el logro de estos objetivos. El punto es, *que el alumno construya el conocimiento matemático*.

Es sobre esta ruta que la asignatura matemática logrará cumplir con su loable función. El reto es, que el alumno (a) *tenga la oportunidad de desarrollar sus capacidades y habilidades en la construcción del conocimiento matemático*.

RESUMEN DEL CAPÍTULO:

Ante la pregunta: ¿Cuál es la función de la asignatura matemática en la escuela primaria? Es importante indicar:

1. Las funciones de la asignatura matemática están contenidas en los estandares para la introducción matemática en Centroamérica.

    - Desarrollar el pensamiento lógico.
    - Desarrollar habilidades de cálculo y su correcta aplicación en la resolución de problemas.

Usar los conceptos geométricos básicos en la identificación y clasificación de figuras y cuerpos geométricos.

[16] Enciclopedia Autodidacta Océano. Tomo III. Año 1998

[17] Jeremy Kilpatric. Investigación en Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamericana: año 2000

2. A la luz de las exigencias del Ministerio de Educación y tomando en cuenta lo esencial de la asignatura se concluye que las funciones de la asignatura matemática en la escuela primaria son:

- ♣ Dotar al alumno o alumna de un instrumento lógico que, incorporado como parte de su cultura, le permitan pensar y actuar científicamente en las circunstancias que el medio presente.

- ♣ Proporcionarle al alumno o alumna estrategias efectivas de planificación y organización de sus actividades, mediante la cuantificación consciente del tiempo y del espacio.

- ♣ Desarrollar la imaginación y la creatividad del estudiante en la formulación de estrategias para abordar con éxito las situaciones problemáticas de su medio.

- ♣ Aplicar correctamente los algoritmos de las operaciones fundamentales en el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números fraccionarios, mediante el conocimiento de las leyes lógicas que los rigen.

- ♣ Dotar al alumno o alumna de la sensibilidad científica que le permita valorar la importancia de los modelos geométricos como aproximación aceptable de las formas y tamaños de los objetos, los elementos que se pueden definir en dichos objetos y las relaciones entre estos elementos.

- ♣ Desarrollar el pensamiento espacial.

CUESTIONARIO EVALUATIVO:

1. Contesta las siguientes preguntas:

   1.1 ¿Qué es “cultura matemática”?____

   1.2 ¿En qué consiste “desarrollar el pensamiento lógico”?________________________

   1.3 ¿Cuál es la diferencia entre la ciencia matemática y la asignatura matemática?

   ____

   ____

2. Asigna correctamente valor de verdad (verdadero o falso) a las siguientes proposiciones y argumenta tu respuesta explicando “el por qué” de la misma.

   2.1 Dado que las calculadoras efectúan cálculos rápidos y exactos, ¿el estudio de los algoritmos de las operaciones debe eliminarse de los programas de estudio?____________________

   ¿Por qué?____

2.2 ¿El estudio de las propiedades de las operaciones es importante en la escuela primaria?________

¿Por qué?____

2.3 El objetivo de resolver problemas en primaria es verificar que el alumno domina los algoritmos de las operaciones.___________

¿Por qué?____

3. Para cada una de las funciones de la Matemática dadas en el resumen de la unidad, escribe una situación que indique que el alumno aplica correctamente los conocimientos matemáticos adquiridos en primaria.

CAPÍTULO II

LINEAS DIRECTRICES DE UN PROGRAMA DE MATEMÁTICA

OBJETIVOS GENERALES DE LA UNIDAD:

Son objetivos generales de esta unidad, que los alumnos (as) de Didáctica de las Matemáticas:

1. Asimilen el concepto de línea directriz, como elemento eje en la organización de los contenidos de un programa de matemática.
2. Conozcan y relacionen las líneas directrices que todo programa de matemática debe contener.

PRESENTACIÓN:

Como profesional de la educación que vas a ser dentro de pocos años, te invitamos a reflexionar acerca de preguntas como las siguientes:

¿Cómo se estructura un programa?

¿Qué criterios determinan la selección de los contenidos de un programa de estudio?

¿Qué elementos rigen las relaciones que se establecen en los contenidos de un programa de estudio?

En términos generales, los contenidos de un programa están determinados por los objetivos que, de algún modo, reflejan el encargo social que la comunidad le determina a la asignatura; no obstante, los objetivos solamente nos indican el PARA QUE estudiamos determinados temas; el QUE estudiamos. Es un problema propio de la asignatura.

Usando una nomenclatura tradicional, diríamos que todo programa contiene dos tipos de objetivos: Los llamados objetivos instructivos y los objetivos educativos. Los primeros reflejan las exigencias científicas que la sociedad le plantea a la asignatura; los segundos corresponden a la contribución que la asignatura debe aportar a la formación moral y espiritual del educando. Los objetivos instructivos contienen el QUÉ de la ciencia que debemos transformar en asignatura esto es, qué del saber sabio debemos convertir en saber enseñado. Esto es, en contenidos. Los objetivos educativos contienen el PARA QUÉ estudiamos estos contenidos.

Veamos un ejemplo: el alumno (a) en la escuela estudia, analiza y asimila las distintas unidades de tiempo (esto es, qué estudiar). Se supone que el conocimiento de las unidades de tiempo le permitan organizar mejor su tiempo y de esta forma se transforme en una persona puntual (esto es el para qué)

Si aceptamos la existencia de los objetivos instructivos, tendremos que tales objetivos definen los contenidos a estudiar. La pregunta es: ¿Cómo organizar estos contenidos?, ¿cómo jerarquizarlos? Este problema se suscita a lo interno de la asignatura y es ahí donde debe resolverse. ¿Cómo resolverlo?

En principio la asignatura contiene un conjunto de ejes conductores llamados LINEAS DIRECTRICES. Una vez definidas las líneas directrices se analizan sus intercepciones y a partir de estas se definen los bloques de contenido.

En esta unidad analizaremos las distintas líneas directrices que determinan los contenidos de cualquier programa de la asignatura de matemática.

DESARROLLO DEL CONTENIDO:

DEFINICIÓN DE LÍNEA DIRECTRIZ

¿Qué es una línea directriz?

Las líneas directrices son ejes conductores sobre los cuales se definen: el marco teórico de la asignatura, las acciones mentales por realizar y los principios pedagógicos y psicológicos que se deben aplicar en una clase, una unidad temática o un curso de matemática. Los siguientes ejemplos pretenden ilustrar la definición anterior.

Por ejemplo, la construcción del conjunto de los números naturales y el conjunto de los números fraccionados en la escuela primaria, así como la construcción del conjunto de los números enteros, los números racionales y los números reales en secundaria corresponde a la línea directriz **Construcción de Dominios Numéricos**.

La construcción de los dominios numéricos como línea directriz contiene sus propios enfoques didácticos según la escuela matemática donde se ubique. Corresponde al equipo responsable de redactar el programa, la selección del enfoque didáctico que desea le dé el docente en el aula a la hora de estudiar la unidad temática. Estos enfoques (a menudo) se presentan en los programas como "orientaciones metodológicas", "actividades sugeridas" o "logros de aprendizaje". Es pertinente reconocer que el enfoque didáctico original, a menudo se ve afectado por las consideraciones psicológicas, pedagógicas y culturales del nivel académico de los alumnos y alumnas con los cuales se está trabajando.

Son las líneas directrices las que nos indican qué conceptos debemos definir y bajo qué criterio, por ejemplo: ¿conviene definir el concepto de ángulo en primaria?. Y si este es el caso, ¿cómo lo definimos?, ¿cómo la unión de dos rayos que tiene un origen en común?, ¿cómo una rotación?. Las respuesta nos las dará la línea directriz considerada en el programa de estudio.

Todo docente, por tanto, debe proponerse como tarea inicial, conocer las líneas directrices bajo las cuales está estructurado el programa.

CLASIFICACIÓN Y ANÁLISIS DE LAS LÍNEAS DIRECTRICES:

A continuación presentamos las principales líneas directrices que debe contener todo programa de matemática. Estas líneas son:

1. Teoría de conjunto.
2. Construcción de dominios numéricos.
3. Correspondencia y funciones.
4. Ecuaciones e inecuaciones.
5. Trabajo con variables.
6. Definir.
7. Demostrar.
8. Terminología y simbología matemática.

Como podemos observar, las líneas directrices 1, 2, 3, 4 y 5 corresponden a estructuras matemáticas bien definidas en la ciencia matemática, mientras que las líneas directrices 6, 7, 8, son habilidades y capacidades que debemos desarrollar a través del estudio de la matemática.

Enseguida analizaremos cada una de las líneas directrices a partir de su función dentro de la unidad temática.

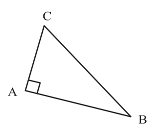
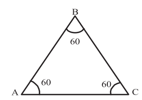
Teoría de Conjunto.

Aunque en los programas la teoría de conjunto no aparece como contenido (debería aparecer). Implícitamente, como línea directriz, cubre todo los contenidos. En educación primaria los docentes usamos muchísimo los conjuntos. He aquí algunos ejemplos: el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números primos, el conjunto de los triángulos rectángulos, etc. Pero: ¿cuál es la función de la teoría de conjuntos en primaria?

La teoría de conjuntos, como línea directriz, juega el papel de *discriminador, clasificador y organizador* de los objetos matemáticos. Su función discriminadora la realiza mediante la relación de pertenencia; la función clasificadora, mediante la relación de inclusión (subconjunto) y la función organizadora, a través de las operaciones (unión, intersección, etc.)

La siguiente tabla muestra, basándose en algunos ejemplos, la función discriminadora de la relación pertenencia. Se llama discriminadora porque esta relación contiene las exigencias que deben satisfacer los elementos para pertenecer al conjunto; de no satisfacerlas, es discriminado o sea expulsado del conjunto.

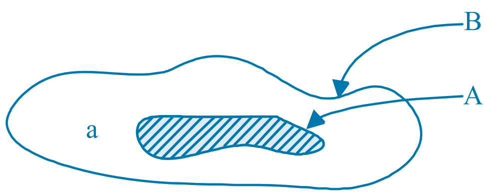
He aquí la tabla:

Conjunto	***Significado***	***Cuando decimos que..***	***Las exigencias para este elemento son:***	***Un elemento discriminado es:***	***Se discriminan porque***
El conjunto de los números naturales N	Ser número natural significa representar objetos concretos (sillas) o abstractos (rectas) que pueden contarse.	$4 \in N$ el número 4 pertenece al conjunto de los números naturales	Representar 4 objetos concretos (sillas) o abstractos (rectas) que han sido contados	$\frac{3}{4} \notin N$	¾ no representa una cantidad contable sino medible.
El conjunto de los números primos P	Ser número primo significa solamente tener dos factores el 1 y el mismo número	$3 \in \mathcal{P}$ el número 3 es primo	Solamente puede tener dos factores; el 1 y el 3 3=1*3	$6 \notin N$	Tiene más de dos factores: 6=2×3×1
El conjunto de los triángulos rectángulos τ_R	Ser triángulo rectángulo significa tener un ángulo interior recto.	 $\Delta(ABC) \in \tau_R$	$\Delta(ABC)$ tiene un ángulo recto	 $\Delta(ABC) \notin \tau_R$	No tiene ángulo recto.

Ahora analicemos algunos ejemplos donde la teoría de conjunto se convierte en un buen sustituto del cuadro sinóptico en un papel de clasificador de objetos matemáticos; para ello, la teoría de conjunto hace uso de la relación de inclusión y del concepto de partición. Recordemos ambos conceptos.

Concepto de inclusión: *Sean A, B dos conjuntos, decimos que A está incluido en B si y solo si todo elemento de A es elemento de B.*

En un diagrama de Veen-Euler, la inclusión se representa así:

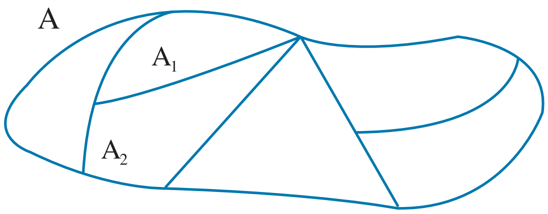


Para indicar que A está incluido en B, escribimos $A \subset B$

Observa que si $A \subset B$, en B pueden haber elementos que no estén en A, esto es el caso del elemento **a** del diagrama.

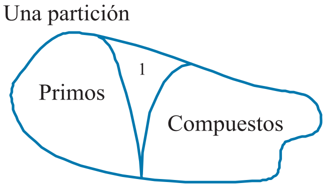
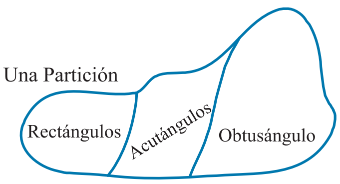
Concepto de partición: *Una partición sobre un conjunto A son conjuntos $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ que cubren todo A pero que ningún par de conjuntos tienen elementos comunes.*

El siguiente diagrama de Veen ejemplifica una partición en A.

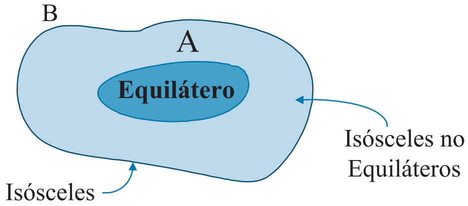


Veamos como se usan estos conceptos en la escuela primaria.

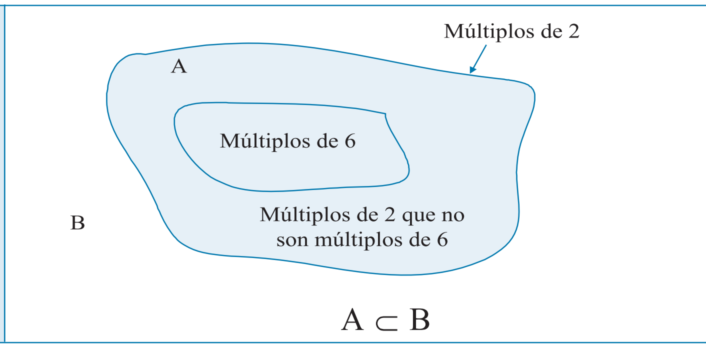
El siguiente cuadro pretende ilustrar la relación que existe entre el cuadro sinóptico y la teoría de conjuntos en lo que respecta a la clasificación de los objetos matemáticos.

Cuadro Sinóptico	*Teoría de Conjunto*	*Lo esencial que el alumno o la alumna debe asimilar*
Números Naturales { 1 / Primos / Compuestos		Un número natural distinto de uno o es primo o es compuesto, pero no ambas cosas.
Triángulos { Rectángulo / Acutángulo / Obtusángul o		Atendiendo a sus ángulos un triángulo o es rectángulo, o es acutángulo o es obtusángulo.

Observemos ahora como la teoría de conjunto transforma al lenguaje matemático expresiones que a menudo manifestamos en el aula; siempre en el plano de la clasificación.

Expresiones	*Teoría de Conjunto*	*Significado*
Todo triángulo equilátero es isósceles.	A={ x / x un triángulo equiláteros} B={ x / x un triángulo isóscele}  $A \subset B$	Si un triángulo es equilátero entonces es isósceles, pero existen triángulos isósceles que no son equiláteros. Esto es, todas las propiedades de los triángulos Isósceles la satisfacen los equiláteros.

Todo número múltiplo de 6 es múltiplo de 2.



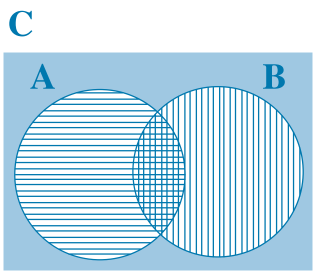
Si un número es múltiplo de seis entonces es múltiplo de 2.

Finalmente estudiaremos la función organizadora de la teoría de conjunto como línea directriz. Estudiemos esta función a partir de los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1:

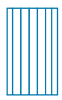
El diagrama de Veen de la derecha muestra como están organizados los conceptos rectánculo, rombo, cuadrado y paralelogramo en la geometría.

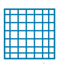
En el diagrama:



C= Conjunto formado por los paralelogramos

A= Conjunto formado por los rectángulos 

B= Conjunto formado por los rombos 

La región sombreada  corresponde al conjunto de los cuadrados.

Del análisis del diagrama podemos afirmar que:

- Todo cuadrado es rombo.
- Todo cuadrado es rectángulo
- Un cuadrado es un rombo rectangular.
- Existen rombos que no son cuadrados.
- Algunos rectángulos no son cuadrados.

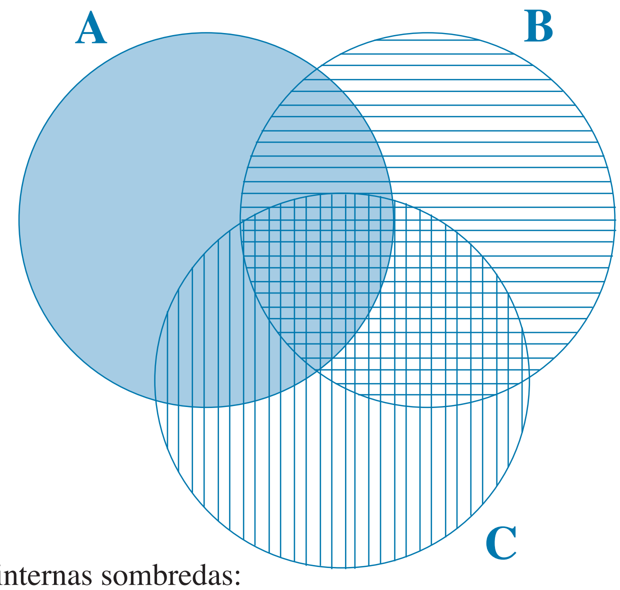
La región fuera de los círculos pero dentro del rectángulo corresponde a los trapezoides, paralelogramos que no tienen ángulos rectos ni lados congruentes. Razón por la cual son discriminados del conjunto de los rectángulos y del conjunto de los rombos.

Ejemplo:

El diagrama de Veen de la derecha muestra la relación que existe entre los múltiplos de 2, los múltiplos de 3 y los múltiplos de 5.

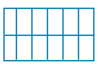
En el diagrama:

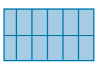
A= {x / x es múltiplo de 2}
B= {x / x es múltiplo de 3}
C= {x / x es múltiplo de 5}

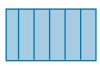


Veamos las regiones internas sombredas:

 Corresponde a los múltiplos de 2 y 3 o sea a los múltiplos de 2×3 que no son múltiplos de 15; esto es, los múltiplos de 6. En esta región estará por ejemplo, el 12, el 18.

 Corresponde a los múltiplos de 15.

 Corresponde a los múltiplos de 2, 3 y 5 o sea 2×3×5=30. Esto es, los múltiplos de 30.

¿A qué múltiplos corresponde la región sombreada? 

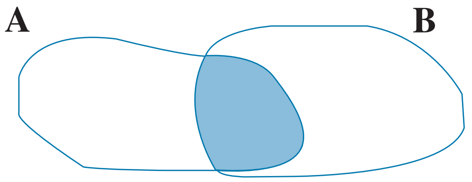
¿En qué región ubicarías el 24? ¿El 100? ¿El 25?

La teoría de conjunto es una de las líneas directrices que más posibilidades ofrece para transferir conocimientos al medio fuera de la escuela. Veamos como es posible esto mediante dos ejemplos:

Analicemos la expresión: "Algunos políticos son honestos". ¿Qué queremos decir con esta expresión?

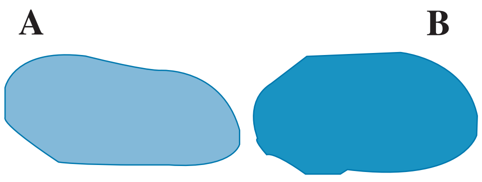
Definamos A= Conjunto formado por todos los políticos, B= Conjunto formado por las personas honestas.

Las personas cubiertas por nuestra expresión están ubicadas en la región sombreada del diagrama:



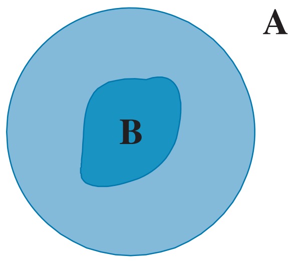
Esto es: existen personas que son políticas y son honestas.

El diagrama correspondiente a "Ningún político es honesto" es:



Lo que se interpreta como que no existe nexo entre la política y la honestidad.

La expresión: "Todas las personas de buena conducta son apreciadas por la sociedad", se puede diagramar así:



Donde A= { x / x es una persona apreciada por la sociedad}
B= { x / x es una persona de buena conducta}

Dentro de A, pero fuera de B, están las personas que no tienen buena conducta, pero son apreciadas por la sociedad por otras razones que podrían ser dinero, fama, poder, intelectualidad etc.

Construcción de Dominios Numéricos:

La ruta que se selecciona para construir los dominios numéricos está determinada por los objetivos del programa, los intereses del educando, el nivel académico donde los construimos y el dominio del docente, entre muchos factores.

En la ciencia matemática los dominios numéricos se construyen mediante la vía estructural usando clases de equivalencia. La estrategia es la siguiente:

1. Se estudian los números naturales mediante los axiomas de Peano.
2. Se demuestra que la sustracción no es posible en N y, mediante clases de equivalencias en N se construyen los enteros.

3. En el conjunto de los enteros la división no es posible. Esto nos conduce a los racionales mediante clases de equivalencias en los enteros.

4. El paso de los racionales a los reales se hace a través del límite y está motivada por el hecho de que los racionales no están en correspondencia biunívoca con los puntos de una recta.

La construcción de los dominios numéricos como línea directriz sigue otra ruta. La ruta histórica-cultural ¿En qué consiste esta ruta?

Una vía histórica-cultural toma en cuenta la aplicación de los dominios numéricos y la estructura interna de los mismos. Por ejemplo, por esta ruta, los números naturales emergen como consecuencia de la capacidad de contar y por ello, en el primer grado, se usa la equivalencia de conjuntos equipotentes. Esta es la razón por la cual, el logro de aprendizaje definido para este dominio numérico en los programas oficiales de nuestros países indica que el alumno (a): "Reconozca que todos los conjuntos tienen la misma cantidad de elementos..."

Algo similar ocurre con el conjunto de los números fraccionarios que se construye "<u>dividiendo</u>" la unidad en partes iguales y de esta forma aplicarlos en el proceso de medición.

Como línea directriz, en la escuela primaria, los dominios numéricos lo que hacen es proporcionar al docente y al alumno o alumna, objetos matemáticos llamados "números", con los cuales se puedan efectuar las operaciones y cuantificar la realidad.

Correspondencia y funciones:

Al igual que la Teoría de Conjuntos, la línea directriz "correspondencia y funciones" no aparecen explícitas en los programas de estudio, pero sí cubre en forma implícita todos los contenidos de la escuela primaria.

El trabajo de la línea directriz "correspondencia y funciones" es asociar, con categoría de dependencia, objetos matemáticos que separados resultan intrascendentes, pero, que en correspondencia, se transforman en modelos matemáticos de múltiples aplicaciones. Veamos algunos ejemplos.

Como todos sabemos, a cada círculo le corresponde su radio R. Círculo y radio entran en correspondencia para construir el modelo matemático:

$$A_c = \pi R^2$$

Donde el área del círculo A_c depende del radio R.

Otro ejemplo:

A cada base b de un triángulo le corresponde su altura h; la base b y altura h entran en correspondencia para construir el modelo matemático:

$$A_T = \frac{b \times h}{2}$$

Donde, el área A_T del triángulo depende de la base y de la altura.

A veces la función o correspondencia se presenta en forma de operaciones.

En realidad, todas las operaciones son correspondencias funcionales. Por ejemplo: la adición 4+3=7 transforma al par ordenado (4, 3) en 7. Otro tanto ocurre con las otras operaciones.

La sección funcional o de dependencia es una de las mas útiles en matemática, porque si conocemos qué magnitudes son dependientes y de quien, fácilmente podemos construir modelos matemáticos para analizar cualquier situación.

La correspondencia está presente en muchas de las actividades de la escuela. Establecemos correpondencia, cuando: decimos “esta situado en”; “corta a”; “es paralela a”; “es perpendicular a”; “es igual de longitud que”, “está situado entre”, “es mayor que”, “es múltiplo de”, “es factor de”...

La correspondencia, en definitiva, es parte integral del lenguaje matemático.

Ecuaciones e Inecuaciones:

Desde la perspectiva matemática, el trabajo con ecuaciones e inecuaciones comprende dos aspectos: *la formulación de la ecuación y la resolución de las mismas*. El primer aspecto se estudia en la línea directriz “técnicas para resolver problemas”. El segundo aspecto es el que corresponde a la línea directriz que estamos estudiando.

Aunque el contenido “ecuaciones” aparece en los programas hasta en el sexto grado; la línea directriz se presenta desde el primer grado cuando proponemos ejercicios como los siguientes:

$$\boxed{1} + \boxed{} = 7 \quad ; \quad \boxed{} - \boxed{3} = 2 \quad ; \quad \boxed{7} - \boxed{} = 4$$

o bien, cuando pedimos que escriba “**<**”, “**>**”, “**=**” en expresiones como:

$$4 \ \square \ 3 \quad ; \quad 5 \ \square \ 7 \quad ; \quad 3+1 \ \square \ 2+2$$

Ejercicios (para los primeros grados de primaria) muy útiles para preparar a los alumnos y alumnas en ecuaciones con dos variables son estos:

$$\begin{array}{l} \square + \square = 5 \\ \square + \square = 3 \end{array} \quad \text{o bien} \quad \begin{array}{l} \square \times \square = 18 \\ \square \times \square = 18 \end{array}$$

En realidad, las ecuaciones e inecuaciones estarán presentes cada vez que invitamos al estudiante a calcular un valor desconocido. He aquí algunos ejemplos:

Calcular A_T cuando h=2, b=5 en el modelo $A_T = \dfrac{b \times h}{2}$

Calcular L_c cuando R=6 cm en el modelo $L_c = 2\pi R$

La misión de la línea directriz “Ecuaciones e Inecuaciones” es ofrecer una oprtunidad para que se apliquen correctamente las operaciones y sus propiedades en el cálculo de una o más magnitudes desconocidas.

Mediante esta línea directriz, los alumnos (as) asimilan las relaciones intrínsecas que existen entre las distintas operaciones.

Por ejemplo, plantear simultáneamente las expresiones es de mucha utilidad para asimilar la relación que existe entre la adición y la sustracción.

Similares resultados se obtienen con ejercicios como: $\square + 2 = 5$; $5 - \square = 2$

Trabajo con variables:

Una variable es una magnitud desconocida que, en relación con otras magnitudes conocidas, satisface determinada condición. También se consideran variables a objetos matemáticos que en determinado momento debemos construir a partir de cierta información sobre él. Por ejemplo: construya una recta perpendicular a la recta “l” que pase por un punto dado P que no está en la recta. En este caso, la recta a construir es una variable.

Las variables a menudo se representan por letras como x, y, z. Pero esta no es la única representación que tienen; símbolos como estos $\square$ pueden representar variables; por ejemplo, en la expresión:

$\square . 3 = 15$; $\square$ Represente una variable

Otra particularidad de las variables es que deben pertenecer a un conjunto y por lo tanto deben tener determinadas restricciones, además de las restricciones que impone la situación particular donde dicha variable se define. Analicemos el siguiente ejemplo:

Si x representa el número de alumnos o alumnas de una clase, x tiene al menos las siguientes restricciones:

- x debe ser un número natural (no podemos hablar de ¼ de alumno)
- $x \leq 100$; asumiendo que en el aula caben a lo sumo 100 alumnos o alumnas.

¿Qué papel juega el "trabajo con variable como línea directriz?

En compañía de la línea directriz " ecuaciones e inecuaciones" contribuye a la aplicación correcta de las operaciones y sus propiedades.

En forma independiente, sirven para simbolizar o representar proposiciones consideradas como verdaderas dentro de una estructura matemática. Este es el caso, por ejemplo de:

- La propiedad conmutativa de la adición $a + b = b + a$
- La propiedad distributiva de la multiplicación para la adición $a \times (b+c) = a\times b + a\times c$

Definir:
En la línea directriz definir corresponde al grupo de líneas directrices que trascienden la asignatura matemática, por cuanto está relacionada con el desarrollo de capacidades y no con el conocimiento matemático propiamente dicho.

Los programas de matemática contienen un gran número de definiciones tales como: número primo, número par, número fraccionario, fracción propia, cuadrilátero, etc.

En matemática existen tres tipos de definiciones, a saber: definiciones de objetos, definiciones de relaciones y definiciones de operaciones[18].

Son definiciones de objetos, la definición de número primo, la definición de fracción propia, la definición de triángulo, etc.

Son definiciones de relación la definición de paralelismo, la definición de perpendicularidad, entre muchas.

Son definiciones de operaciones, la definición de raíz cuadrada, definición de división, etc. A las definiciones de operaciones se les llama definiciones genéticas.

[18] Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Werner Jungk. Editorial libros para la educación. 1981

En términos generales, por definición entendemos una determinación de qué es un objeto o cómo se reconoce; o una regla que establece cómo de utiliza o qué significa un signo verbal.

En toda definición debe distinguirse lo que debe definirse y lo que define.

Lo que debe definirse se llama definiendum y lo que define se llama definiens. Identifiquemos el definiendum y el definiens en las siguientes definiciones.

Definición de fracción impropia: se llama fracción impropia a toda fracción cuyo numerador es mayor que el denominador.

En esta definición el definiendum es FRACCIÓN IMPROPIA y el definiens “fracción cuyo numerador es mayor que el denominador”

Definición de número primo: se llama número primo a todo número natural que solamente es divisible por 1 y por él mismo.

El definiendum en este caso es NÚMERO PRIMO, y las propiedades esenciales de solamente ser divisible por 1 y por él mismo, es definiens.

La capacidad de definir se logra mediante un proceso que se inicia con la capacidad de observación.

En la unidad correspondiente a ELABORACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS abordaremos en forma detallada el proceso didáctico para desarrollar estas capacidades.

Demostrar:

La línea directriz **“demostrar”** la analizaremos exhaustivamente en el quinto capítulo, no obstante, a manera de generalidades, haremos algunas reflexiones sobre ella.

Formalmente, una demostración es un razonamiento mediante el cual se establece la verdad de una proposición. En la ciencia matemática el término “demostrar” a menudo se asocia con teoremas y una cadena de premisas que, concatenadas lógicamente, conducen a una conclusión determinada. Desde esta perspectiva, la demostración formal y rigurosa no existe en la escuela primaria, y muy pocas veces en secundaria.

De acuerdo con la Real Academia Española demostrar es “probar de un modo evidente algo” y desde este punto de vista la clase de matemática debe ser, en cualquier nivel, un continuo uso de la demostración. Esto significa que el docente debe planificar actividades en las cuales el alumno pueda verificar la falsedad o veracidad de sus conjeturas científicas.

Plantear conjeturas, analizar situaciones, formular proposiciones y verificar la consistencia o inconsistencia de éstas para eliminar unas e incorporar al conocimiento matemático las otras; esto debe ser en resumen, una clase cualquiera de matemática, cuando estamos interesados en que el alumno construya su propio conocimiento; y en este proceso, la demostración juega un papel importante como línea directriz.

Terminología y simbología matemática:

El símbolo es parte fundamental de la comunicación escrita. Desde tiempos antiguos los símbolos han sido la base de la comunicación escrita. Nubes de humo, caracteres grabados en piedra son, entre muchos, formas que el hombre ha usado para comunicarse.

Si observamos nuestro medio, encontramos el símbolo en todas partes. Símbolos como:

son portadores de mensajes:

De lo anterior se deduce que una correcta interpretación de los símbolos matemáticos, con un preciso uso de su terminología, son absolutamente necesarios para una fluida comunicación en matemática.

¿Qué es interpretar un símbolo? El símbolo es la representación material de un mensaje, de una idea. La traducción del símbolo requiere conocimiento de determinada terminología. El símbolo estará correctamente interpretado, sólo si al traducirlo, lo expresamos en los términos correctos. El siguiente ejemplo ilustra nuestro punto de vista.

Indíquele a un estudiante que traduzca la siguiente expresión: $\frac{3}{4} \bullet \frac{5}{2} = \frac{3 \bullet 5}{4 \bullet 2} = \frac{15}{8}$

Posiblemente la traducción será la siguiente: "Para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores y los denominadores entre sí". Esta es una traducción incorrecta. En realidad lo que se hizo fue una descripción del algoritmo de la multiplicación de fracciones.

La interpretación correcta de la expresión es como sigue:

"El numerador del producto de dos fracciones es el producto de los numeradores de los factores, y el denominador del producto es el producto de los denominadores de los factores".

El problema de la traducción hecha por el alumno es que en la "traducción" se perdió el término <u>factor</u> que es fundamental en toda multiplicación.

Existe una íntima relación entre el uso correcto de la simbología y terminología matemática y la construcción y adquisición del conocimiento. En efecto, en la medida que el símbolo sea correctamente interpretado, el conocimiento adquirido es más duradero y seguro.

RESUMEN DEL CAPÍTULO:

Una línea directriz es un eje conductor sobre los cuales se define el marco teórico de la asignatura y los principios pedagógicos y psicológicos que se aplican en una clase de matemática, una unidad temática o un curso.

Las principales líneas directrices en matemáticas son:

1. *Teoría de conjuntos,* cuya función es organizar y categorizar el conocimiento matemático.

2. *Construcción de dominios numéricos*. Mediante esta línea directriz organizamos las categorías metodológicas mediante las cuales el alumno (a) construye las estructura de los distintos conjuntos numéricos.

3. *Correspondencia y funciones,* cuya misión radica en asociar, con categoría de dependencia objetos matemáticos que separados resultan intrascendentes, pero en correspondencia, se transforman en modelos matemáticos de múltiples aplicaciones.

4. *Ecuaciones y inecuaciones*. Instrumento valioso para la aplicación de los distintos algoritmos y propiedades de los sistemas numéricos.

5. *Trabajo con variables*. A través de esta línea directriz llegamos a la generalización de las propiedades y los algoritmos.

6. *Definir.* Línea directriz mediante la cual el estudiante convierte en una conducta la observación y la capacidad de distinguir los elementos esenciales de los elementos secundarios en una situación determinada.

7. *Demostrar.* Línea directriz que le proporciona al estudiante la capacidad para justificar cualquier afirmación no axiomática.

8. *Terminología y simbología matemática*. Mediante esta línea directriz el alumno (a) va construyendo el lenguaje propio de la asignatura matemática.

CUESTIONARIO EVALUATIVO:

1. Organizar en un diagrama de Veen los siguientes conceptos: número primo, número compuesto, número par, múltiplos de 3, múltiplos de 6.

2. Construye un diagrama de Veen para las siguientes expresiones:

   2.1 “Todos los centroamericanos amamos nuestra patria”
   2.2 “Algunos centroamericanos viven en el extranjero”.

3. Identifica las líneas directrices que contienen los siguientes logros de aprendizaje:

   “Utiliza formas elementales de comunicación propias del lenguaje matemático”

   “Reconoce que la medida del número de unidades cuadradas que contiene una superficie constituye su área”

4. Define los siguientes conceptos matemáticos:

   4.1 Mínimo común múltiplo.
   4.2 Rectas paralelas.
   4.3 Cuadrilátero.

5. Interpreta las siguientes expresiones:

   5.1 $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

   5.2 $a > b \Leftrightarrow \exists_{c \in} N \,;\, b + c = a$

   5.3 $a - b = c \Leftrightarrow b + c = a$

CAPÍTULO III

IDENTIFICACIÓN Y APLICACIÓN DE LAS LÍNEAS DIRECTRICES

OBJETIVOS GENERALES:

Que los participantes en el curso o asignatura Didáctica de la Matemática:

1. Identifiquen las líneas directrices bajo las cuales están estructurados los contenidos, objetivos y logros de aprendizaje de un programa de matemática.

2. Valoren la importancia de las líneas directrices en la planificación y desarrollo de una clase de matemática.

3. Sean capaces de definir estrategias pedagógicas para implementar una línea directriz determinada en la clase de matemática.

PRESENTACIÓN:

Actualmente, uno de los problemas esenciales de la didáctica de la matemática es la definición de una estrategia pedagógica que le permita al alumno (a) construir el conocimiento matemático de tal forma que dicho conocimiento resulte interesante y útil. Interesante, en el sentido de que el alumno (a) se asombre ante su descubrimiento, y lo motive para nuevos "hallazgos intelectuales" y útil, no desde la perspectiva de acción inmediata, sino como un recurso intelectual valioso para analizar e interpretar científicamente las situaciones que el medio le presente.

La motivación de una clase de matemática por la matemática misma, constituye un reto fascinante para cualquier docente que se precie de serlo. Una forma de lograrlo es conociendo las leyes lógicas que subyacen en cualquier estructura matemática.

Conocer estas leyes y aplicarlas correctamente es la función de las líneas directrices.

En este capítulo veremos cómo el conocimiento de las líneas directrices contribuyen en forma efectiva, para que el docente conduzca la clase de matemática en forma lógica y atractiva, y lograr así el constante interés del estudiante.

Centraremos nuestra atención en la escuela primaria porque, es en este nivel donde el estudiante adquiere la mayoría de los hábitos de trabajo y la forma de pensar que más tarde aplica en los siguientes niveles, no obstante, cuando la situación lo requiera, incursionaremos en el nivel medio.

DESARROLLO DE LA UNIDAD:

CUESTIONARIO EVALUATIVO:

El siguiente cuestionario tiene como objetivo que reflexiones y expongas tus propias valoraciones respecto a cuestiones relacionadas con la asignatura de matemática desde la perspectiva de docente. ¡Adelante! Tu opinión es valiosa.

1. ¿Se debe incluir como contenido programático la teoría de conjuntos? Si es así: ¿a partir de qué grado o nivel?, ¿por qué?

2. ¿En qué momento conviene hacer demostraciones de proposiciones matemáticas?

3. ¿Qué tipo de conceptos se deben definir y por qué?

4. ¿A partir de qué momento se deben estudiar los números negativos?

5. ¿Cuál es la diferencia entre una fracción, un número fraccionario y un número racional positivo? ¿Conviene establecer esta diferencia en la escuela? ¿Por qué?

6. ¿Cuál es la importancia de la simbología y la terminología matemática?

7. ¿Cuándo estamos en capacidad de afirmar que un estudiante ha asimilado un dominio numérico determinado?

8. ¿En qué momentos nuestros estudiantes se inician en el trabajo con variables? ¿Y en el trabajo con ecuaciones e inecuaciones?

ANÁLISIS DE LAS LÍNEAS DIRECTRICES:

En el capítulo II definimos y describimos brevemente las líneas directrices más importantes de la asignatura de matemática; dichas líneas aparecen con mayor o menor incidencia en una clase, unidad o nivel, dependiendo del contenido que necesitamos estudiar y otros factores como grado académico, condiciones de nivel de partida, etc. En este capítulo haremos un análisis formal de cada una de ellas, tomando como referencia su aplicación en la definición de determinada estrategia pedagógica.

Primera línea directriz: Teoría de Conjuntos

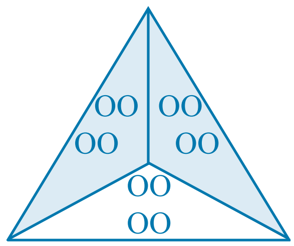
En el capítulo II afirmamos que la función de esta línea directriz es la de discriminar, clasificar y organizar los objetos matemáticos. Tales funciones podríamos llamarles fundamentales, pero como recurso pedagógico, esta línea directriz resulta muy útil desde los primeros grados para representar relaciones entre conceptos así como los conceptos mismos. Los siguientes ejemplos pretenden ilustrar esta última afirmación.

En primer grado, los conceptos (no los números) “uno”; “dos”... “nueve”, “cero” se construyen a partir de la relación de equipotencia entre conjuntos. De esta forma, los siguientes conjuntos representan el concepto “dos”

También, mediante conjuntos, es posible visualizar, sobre todo en los primeros grados, la relación que existe entre operaciones como la adición y la sustracción; la multiplicación y la división. Observemos estos diagramas:

oo		ooo		ooooo		ooo		oo
2	+	3	=	5	-	3	=	2

En este diagrama se ve claro que 2/3 de 12 es 8 →

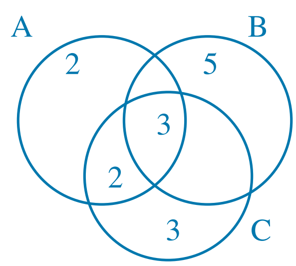


La teoría de conjuntos tiene múltiples aplicaciones cuando de organizar un contenido matemático se trata. Esto obedece básicamente a que la adición lógica es la unión de conjuntos, la multiplicación lógica es la intersección de conjuntos y la negación lógica está relacionada con el complemento de un conjunto.

Veamos como funciona esto en la aritmética y en el álgebra.

Supongamos que en nuestra clase nos interesa calcular el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor (MCD) de 12,15,18.

Los factores primos de 12 son $2^2 \times 3 = 2 \times 2 \times 3$
Los factores primos de 15 son 3×5
Los factores primos de 18 son $3^2 \times 2 = 3 \times 3 \times 2$



Definamos: A = $\{x \,/\, x$ es factor primo de $12\}$

B = $\{x \,/\, x$ es factor primo de $15\}$ Representaremos A, B, C

C = $\{x \,/\, x$ es factor primo de $18\}$ en un diagrama

Si definimos el m.c.m como el producto de los elementos de la unión, entonces...
m.c.m $(12, 15, 18) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = 180$

Definamos ahora el M.C.D como el producto de los elementos de la intersección de los tres conjuntos. En el diagrama vemos que M.C.D (12, 15, 18) = 3

Aún más, el diagrama nos proporciona toda una gama de información valiosa, por ejemplo:

m.c.m (12, 15) = 2 x 2 x 3 x 5 = 60; M.C.D (12, 15) = 3 M.C.D (12, 18) = 2 x 3 = 6; etc.

Mediante ejercicios como estos, debidamente orientados por el docente, el estudiante por su propia cuenta descubre que "el mínimo común múltiplo de un conjunto finito de números naturales mayores que 1 es el producto de los factores repetidos y no repetidos con su mayor exponente" y que el máximo común divisor de los mismos es el "producto de los factores repetidos con su menor exponente". Estas son las definiciones que encontramos en todos los libros de matemática.

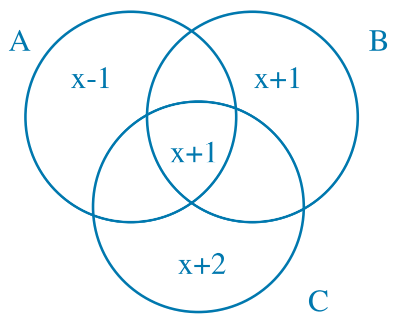
En este caso, la teoría de conjuntos trabajó como un recurso didáctico para elaborar los conceptos de M.C.M y M.C.D.

Veamos lo que ocurre en álgebra. Supongamos que necesitamos calcular el m.c.m y el M.C.D de: $x^2 - 1$; $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 3x + 2$. Procedemos en forma similar.

-Factorizamos los polinomios: $x^2-1= (x+1)(x-1)$; $x^2+2x+1= (x+1)(x+1)$; $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$

-Definamos $A= \{x \,/\, x \text{ es factor lineal de } x^2-1\}$
$B= \{x \,/\, x \text{ es factor lineal de } x^2+2x+1\}$
$C= \{x \,/\, x \text{ es factor lineal de } x^2+3x+2\}$

-Construimos el diagrama de Venn.



Por cuanto los conceptos son los mismos, tenemos:

$$M.C.M = (x+1)(x+1)(x-1)(x+2) = (x+1)^2 (x-1)(x+2)$$
$$M.C.D = x + 1$$

Para que los valores de x en M.C.D = 10 ?; x + 1 = 10 x = 9

Un ejemplo más. El concepto de "sistemas de ecuaciones" (no el algoritmo de solución) se puede construir fácilmente a partir de la línea directriz teoría de conjuntos; podemos plantear la situación así: Sea x un número natural menor o igual a que 5 "y" cualquier número positivo ¿Para qué valores de x, y se cumple que $2x + 3y = 13$ y además $3x – y = 3$?

Despejemos “y” en ambas ecuaciones y construyamos una tabla para cada ecuación.

x	1	2	3	4	5
$y=\frac{13-2x}{3}$	$\frac{11}{3}$	3	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	1
Solución	(1,11/3)	(2,3)	(3,7/3)	(4,5/3)	(5,1)

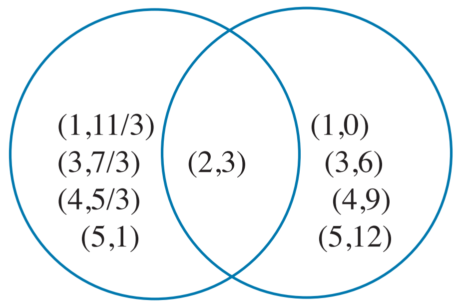
x	1	2	3	4	5
Y= -3+3x	0	3	6	9	12
Solución	(1,0)	(2,3)	(3,6)	(4,9)	(5,12)

Definamos los conjuntos A,B así:

$$A\left\{(x,y)\ /\ 2x+3y=13,\ x \text{ natural menor que } 6\right\}$$
$$B\left\{(x,y)\ /\ 3x-y=3,\ x \text{ natural menor que } 6\right\}$$

A es la solución de la ecuación 2x + 3y = 13; B es la solución de 3x - y = 3 ambas soluciones para x = 1, 2, 3, 4, 5.

Un diagrama de Venn para los conjuntos A,B es:

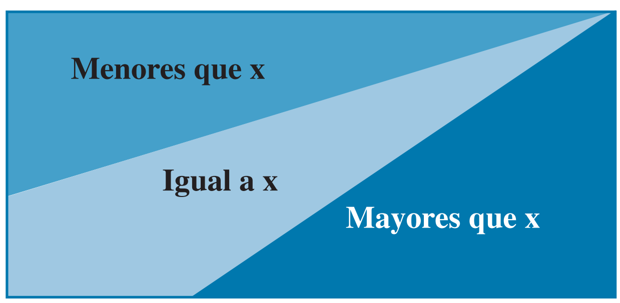


Las ecuaciones tienen como solución común el par ordenado: (2,3) esto significa que ambas ecuaciones forman un sistema.

Con ejemplos como estos el alumno (a) se percata que un conjunto de ecuaciones solo forma un sistema si tiene al menos una solución en común.

Una situación que el estudiante olvida, con mucha frecuencia, cuando trabaja con conjuntos numéricos es que cualquier número x determina una participación en el conjunto: los números iguales a x, los números menores que x y los números mayores que x.

Un diagrama de Venn como el siguiente ayuda mucho en este caso.

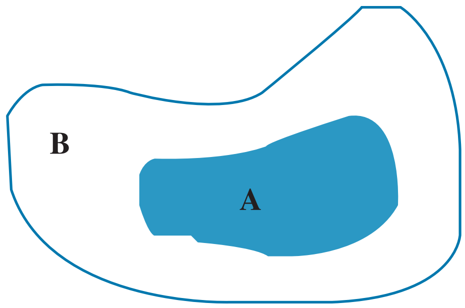


La proposición condicional "si... entonces..." tiene su expresión en la teoría de conjuntos como inclusión de conjuntos.

Como sabemos, si $A \subset B$ entonces todos los elementos que están en A también son elementos de B, pero B tiene elementos que no están en A. La inclusión de conjuntos es muy útil para jerarquizar...

Por ejemplo:

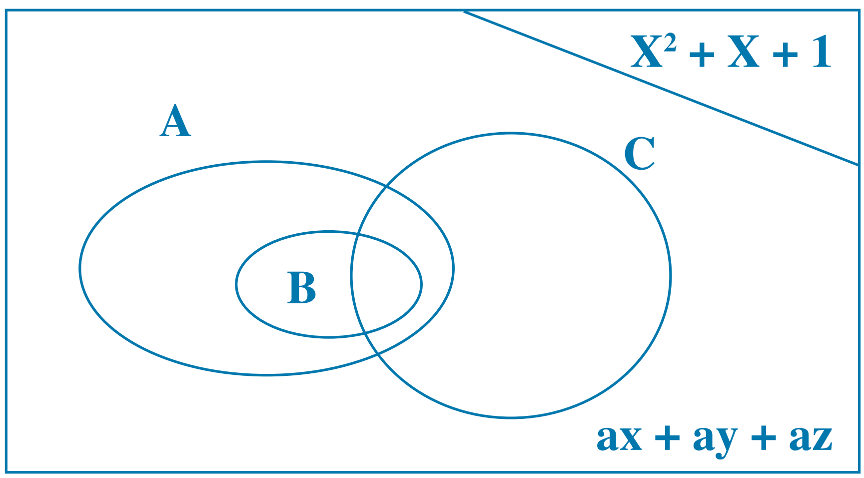
Definamos: A = {4,6,8,10,12,...} B = {0,4,6,8,9,10,12,14,15,...}

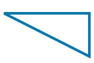
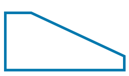


El diagrama muestra que todo número par mayor que 2 es compuesto, pero hay números compuestos como el 15,21,33... que no son pares.

Observa el diagrama

En el rectángulo se ubican todos los trinomios reales de variable real. En el rectángulo hay una partición.



 : Trinomio no factorizable  : Trinomio factorizable en factores lineales

Además de identificar fácilmente los siguientes conjuntos:

A: Conjunto formado por los trinomios factorizables de la forma $ax^2 + bx + c$
B: Conjunto formado por los trinomios factorizables de la forma $x^2 + bx + c$
C: Conjunto formado por los trinomios cuadrado perfectos

¿Qué trinomios están en la intersección de B con C? Pon un ejemplo.
¿Por qué $ax + ay + az$ no está en A?

El último ejemplo muestra como la línea directriz "Teoría de Conjunto" organiza y categoriza toda una estructura matemática.

La geometría es una campo fértil para esta línea directriz, porque, en definitiva, la recta, el plano, y el espacio se conciben como conjunto de puntos.

Por ejemplo; si A : Conjunto formado por los triángulos congruentes

B : Conjunto formado por los triángulos semejantes, entonces $A \subset B$

Lo que significa que la congruencia es un caso particular de la semejanza. De igual forma el conjunto de los hexaedros regulares (cubos) es un subconjunto del conjunto de los paralelepípedos. Ejemplos como estos y otros se multiplican cuando estudiamos geometría.

Segunda Línea Directriz: Construcción de los Dominios Numéricos

Una de las funciones propias de la ciencia matemática es la cuantificación de las variables que intervienen en un fenómeno. Al cuantificar, estamos en capacidad de comparar y por ende , en capacidad de describir el fenómeno, proyectarlo y en última instancia de tomar decisiones, fin último del intelecto humano.

La cuantificación, al menos en su nivel primario, se realiza mediante dos acciones: contar y medir. Al contar emerge el conjunto de los números naturales y al medir, el conjunto de los números fraccionarios en sus dos formas principales: como una fracción o como un decimal. Los racionales resuelven aquellas situaciones cuya unidad es convencional, (por ejemplo 1/2 de 12; la unidad en este caso es 12) y los números irracionales nos proporcionan el valor aproximado de la relación entre dos magnitudes, cuando dicha relación no se puede expresar como un cociente de magnitudes, no obstante, de permanecer constante o contener una constante de proporcionalidad. Este es el caso de π, e, $\sqrt{3}$ etc. Todos los conjuntos numéricos antes mencionados se unen para formar el conjunto de los números reales positivos.

Los números reales positivos presentan magnitudes opuestas a las magnitudes reales negativas.

A continuación analizaremos, desde la perspectiva pedagógica, cómo trabajan la línea directriz, dominios numéricos, en la asignatura de matemática.

Como se dejó claro en el párrafo anterior, la función de los dominios numéricos es cuantificar las variables. Esto nos da el primer cruce entre dos líneas directrices: trabajo con variables y dominios numéricos. Dada una variable debidamente definida, debemos saber en qué dominio numérico toma valores, por ejemplo: si x es el número de persona que recibe atención médica en un hospital todos los días, entonces x toma valores en el conjunto de los números naturales N. Con el auxilio de la línea directriz teoría de conjuntos, escribimos $x \in N$. En la expresión $x \in N$ se entrelazan tres líneas directrices.

Lo anterior nos conduce a la pregunta siguiente: ¿Cuándo podemos afirmar que un estudiante ha asimilado un dominio numérico determinado? Cuando dado una variable correctamente definida, el alumno (a) puede identificar el dominio numérico al que le pertenece. Por ejemplo, si x representa la longitud del lado de un triángulo entonces $x \in R^+$ donde R^+ representa el conjunto de los números reales positivos. Algunos valores para x son, ?, 4, , 0.3 etc.

Para continuar, conviene aclarar qué vamos a entender por dominio numérico. Un dominio numérico es una estructura matemática constituida por un conjunto numérico, una relación de igualdad, una relación de orden definida en dicho conjunto y una o más operaciones con sus respectivas propiedades definidas también en el conjunto numérico.

Los números de los dominios numéricos son objetos abstractos que carecen de naturaleza propia. La naturaleza corresponde a la variable, la cual se la hereda al número una vez que la variable está ubicada en el conjunto. Tomemos por ejemplo el conjunto N o sea $x \in N$. Si x representa la cantidad de frutas de un expendio, cada número natural es la cantidad de frutas del expendio.

Una vez aclarados los aspectos básicos, procedemos a analizar los aspectos pedagógicos y científicos que se deben tomar en cuenta en la construcción y aplicación de los dominios numéricos, empezando por el conjunto de los números naturales N.

Como sabemos, el dominio numérico N se usa para cuantificar variables contables. La construcción de este dominio se inicia en primer grado y comprende las siguientes etapas:

1. La construcción mediante la equipotencia de conjuntos, de los conceptos uno, dos, tres... nueve, cero; las combinaciones básicas y la relación de orden con estos números.

2. La elaboración de los conceptos decena, centena, millares, etc. Esta etapa constituye la columna vertebral en la construcción de N, porque lo esencial de N lo constituye el hecho de ser un sistema numérico posicional de base diez. Es en esta etapa donde el alumno (a)debe asimilar los conceptos de orden, clase y período. Son estos conceptos los que se aplican en la correcta lectura y escritura de un número natural. Aún más, estos conceptos son los que se aplican para comparar dos números naturales.

3. La tercera etapa comprende la sistematización del conjunto en una tabla como la siguiente:

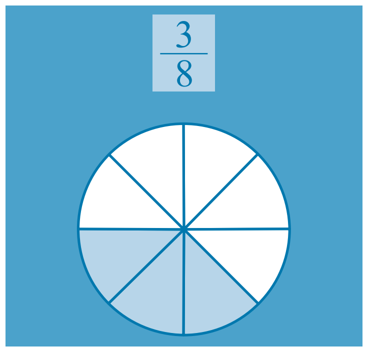
Billones		*Millones*						*Unidades*					
Tercer Período		**Segundo Período**						**Primer Período**					
Quinta Clase		*Cuanta Clase*			*Tercera Clase*			*Segunda Clase*			*Primera Clase*		
14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Orden	Orden	Orden	Orden	Orden	Orden	Orden	Orden	Orden	Orden	Orden	Orden	Orden	Orden
Decenas de Billón	Unidades de Billón	Centenas de Millar de millón	Decenas de millar de millón	Unidad de millar de millón	Centena de Millón	Decena de Millón	Unidad de Millón	Centena de Millar	Decena de Millar	Unidad de Millar	Centena	Decena	Unidad
2	**4**	**9**	**3**	**2**	**1**	**4**	**5**	**8**	**9**	**2**	**6**	**3**	**9**

Veinticuatro Billones · Novecientos treinta y dos mil. · ciento cuarenta y cinco millones · ochocientos noventa y dos mil · Seiscientos treinta y nueve

Cuando una variable toma valores en N se llama discreta.

El conjunto de los números fraccionarios al igual que el conjunto de los números racionales se aplica a variables medibles conocidas como VARIABLES CONTINUAS y su construcción comprende las siguientes etapas:

1. Elaboración del concepto de fracción. A menudo dicho concepto se elabora dividiendo la unidad en partes iguales y tomando algunas partes de ella. Por ejemplo: la región sombreada representa $\frac{3}{8}$ de la unidad.



Una construcción así, aunque matemáticamente correcta, resulta poca atractiva al estudiante. En el capítulo IV presentamos una propuesta diferente.

2. La segunda etapa corresponde a la construcción del marco teórico en este conjunto. Es en esta etapa donde el alumno construye los conceptos de fracción propia, fracción impropia, fracciones equivalentes, etc.

¿Cuál es la función de los números irracionales?, ¿cómo surgen? El término "irracional" históricamente se le asignó a aquellos números no racionales, es decir, números que no se pueden escribir como el cociente ó la razón de dos magnitudes. Esto fue antes de que aparecieran los números complejos. Actualmente, se les llama irracionales a todos los números decimales infinitos no periódicos. Pero: ¿cómo surgen? ¿para qué sirven? Analicemos como surgen algunos de ellos.

- El número irracional π (π= 3.141592654...) surge como el cociente de la longitud de la circunferencia entre su diámetro. Por lo tanto, originalmente fue un cociente.
- El número irracional $\sqrt{2}$ es una constante que relaciona la diagonal "d" de un cuadrado con su lado "l" ($d = l\sqrt{2}$).
- El número irracional $\sqrt{3}$ es una constante que relaciona a uno de los catetos con la mitad de la hipotenusa de un triángulo rectángulo 30º, 60º. (Cateto = $\frac{e}{2e}\sqrt{3}$).

Lo anterior hace suponer con muy buen tino, que los números irracionales, en su mayoría, tienen origen geométrico y efectivamente así es. Posiblemente esta sea una de las razones por las cuales, a excepción de π, los alumnos usan muy poco estos números en sus estudios. Sin embargo, los números irracionales cumplen el papel de "completar" al conjunto de los números reales, y son ellos los que junto con los racionales les dan el carácter de continuidad y completitud al conjunto de los números reales.

Tercera línea directriz. Correspondencia y funciones

Una función es un operador cuyo trabajo consiste en transformar los elementos de un conjunto en elementos de otro conjunto. El papel principal de la línea directriz "función" en la matemática es la de "transformar". El alumno le encontrará más sentido lógico a las estructuras matemáticas, si identifica las distintas transformaciones que surgen cuando entre los elementos de un conjunto se establecen determinadas correspondencias. Veamos algunos ejemplos donde la función trabaja en forma directa.

Una de las funciones de mayor utilidad en nuestro medio es la función "medida". Medimos longitudes, tiempo, masa, capacidad de trabajo, etc.

¿Qué hacemos cuando medimos? En esencia, a determinada característica de un objeto abstracto o concreto le asignamos un número real. La medida es, por lo tanto, una función que transforma una característica de un objeto en un número real.

Por ejemplo, a un conjunto de puntos llamado segmento, le asignamos un número real con una naturaleza determinada llamada medida de la longitud del segmento. Con ello, hemos transformado la "longitud" en un número real.

Del tiempo medimos sus efectos. Ponemos a hervir el agua, al tiempo que tarda el agua para transformar su temperatura, le asignamos un número real cuya naturaleza puede ser segundos, minutos, horas. Mediante la función <u>medida</u> hemos transformado los efectos del tiempo en un número real.

Las operaciones fundamentales, (adición, sustracción, multiplicación, y división) así como otras operaciones como potenciación, radicación, logaritmización, etc, son todas transformaciones, vale decir funciones. En su concepción más general, sumar es transformar un par de números reales (a,b) en otro número real c. Ahora bien: ¿qué significa sumar?, ¿cómo realizamos la suma?, ¿en qué unidades la expresamos? ... ¡Vayan preguntas interesantes!

Sumar es “juntar”, “unir” objetos de la misma naturaleza y la suma o total, conserva la naturaleza de estos objetos. Si sumamos naranjas, la suma o total serán naranjas, si sumamos longitudes, el total será una longitud, etc.

En la línea directriz “función”, lo más importante es “como definimos la transformación”, en qué unidades vamos a expresar el resultado y cual será su naturaleza. Los siguientes ejemplos ilustrarán esta afirmación.

Supongamos que tenemos dos variables de naturaleza distinta: x: número de libros que se compran; *y*: precio de cada libro. Para estas variables, la suma x + y no está definida. No podemos sumar cantidades de libros con precios. El producto xy si está definido y la naturaleza del producto es la naturaleza de *y* (córdobas, lempiras, colones, quetzales,). Aún más, el producto xx no está definido, no podemos afirmar que $x \cdot x = x^2$ porque: ¿qué cosa es el cuadrado de un libro?

En el capítulo relacionado con la construcción de algoritmos ampliaremos estos aspectos.

La línea directriz “relación” como su nombre lo indica, establece relaciones entre los elementos de un mismo conjunto. Esta es la diferencia fundamental entre relaciones y funciones. Las funciones transforman; las relaciones proporcionan criterios para ordenar o determinan particiones en el conjunto.

En la asignatura de matemática existen infinidad de relaciones que nos son hasta familiares. En el conjunto de las rectas de un plano son muy conocidas las relaciones de paralelismo y perpendicularidad. En los del conjunto N tenemos las relaciones “mayor que”, “múltiplo de”, “divisor de” etc. En el conjunto de las figuras geométricas son muy conocidas las relaciones de congruencia y semejanza, etc.

Nuevamente, lo más importante es cómo se define la relación en el conjunto, y cuál es la consecuencia. Por ejemplo: ¿cómo se define una relación de orden en el conjunto de los números reales? He aquí una posibilidad. Sean a,b números reales. Decimos que “a es mayor que b” ($a>b$) si existe un número positivo c tal que $b + c = a$ con esta definición, afirmamos que $-3 > -5$ porque existe $c=2$ tal que $-5 + 3 = -2$. Una vez definida y asimilada la relación se convierte en criterio de comparación.

Cuarta línea directriz: Ecuaciones e Inecuaciones

La línea directriz “ecuaciones e inecuaciones”, combinada con las tres líneas anteriores, es un instrumento valioso para aplicar los dominios numéricos y las operaciones definidas en ellos. Lo más importante de esta línea directriz no es la resolución en sí de la ecuación o inecuación sino las leyes, proposiciones y definiciones que se aplican en su resolución.

Uno de los procedimientos efectivos y generalmente olvidados en la escuela es el conocido como “ensayo, error”. Se trata de ensayar con algunas posibles soluciones y razonar sobre las respuestas falsas hasta obtener la correcta.

Veamos un ejemplo. ¿Cómo resolveríamos la ecuación $\frac{x-10}{5} = \frac{x+32}{2x+1}$; $x \in N$ frente a estudiantes que aún no se han iniciado en el álgebra? He aquí un razonamiento aceptable en este nivel.

$\frac{x-10}{5}$; $\frac{x+32}{2x+1}$ Corresponden al mismo número racional, por lo tanto, uno es múltiplo del otro.

Dado que el 5 es primo $\frac{x+32}{2x+1}$ debe ser múltiplo de $\frac{x-10}{5}$

Si $\frac{x+32}{2x+1}$ es múltiplo de $\frac{x-10}{5}$ entonces $2x + 1$ es un múltiplo impar de 5.

De $x - 10$ sabemos que $x > 10$

El razonamiento anterior nos hace concluir que $2x + 1$ es un múltiplo impar de 5 con $x > 10$; esto es: $2x + 1 = 15, 25, 35...$ $x = 11, 12, 13$

Cuales son los posibles valores de x; la siguiente tabla nos da la solución:

$2x + 1$	$2x$	x	$\frac{x-10}{5}$	$\frac{x+32}{2x+1}$	$\frac{x-10}{5} = \frac{x+32}{2x+1}$
15	14	7	**Valor no aceptable porque $x > 10$**		
25	24	12	$\frac{2}{5}$	$\frac{44}{25}$	$\frac{2}{5} \neq \frac{44}{25}$
35	34	17	$\frac{7}{5}$	$\frac{49}{25}$	$\frac{7}{5} = \frac{49}{25}$

De acuerdo con la tabla, la solución es: $x = 17$. La segunda solución: $x = -5$ no es número natural.

Lo anterior nos demuestra cómo las líneas directrices ecuaciones e inecuaciones nos sirve para aplicar el marco teórico estudiado en los dominios numéricos. Esto es una de las funciones de esta línea directriz. Veamos otro ejemplo:

¿Cuál es el conjunto solución de: $(x+1)^2 (x-2)^2 (x-3) > 0$?

Si sabemos que el cuadrado de cualquier número diferente de cero es positivo, podemos cancelar los factores al cuadrado y nos queda: $x - 3 > 0$ $x > 3$. Nuevamente, el conocimiento de las propiedades de los dominios numérico facilita el trabajo.

Como afirmamos en el capítulo dos, esta línea directriz se inicia desde el primer grado, con expresiones como: $3 + \square = 7$; $4x \square = 12$... y a medida que se avanza en los niveles, dichas ecuaciones se van sistematizando. Todos los modelos matemáticos que se construyen para calcular áreas, perímetros y volúmenes son ecuaciones; pero es hasta en la escuela secundaria cuando se estudia la teoría de ecuaciones como tal.

Quinta línea directriz: Trabajo con Variables

Del trabajo con variables ya expusimos algunos detalles, cuando nos referimos a dominios numéricos, no obstante necesitamos aclarar algunas cuestiones al respecto. Por ejemplo: ¿qué es una variable?, ¿en qué momento la debemos usar?

Una variable es una magnitud cuyo valor específico no conocemos pero sí conocemos todos sus posibles valores. Todos los posibles valores forman el dominio de la variable. En la escuela el alumno (a) se empieza a familiarizar con las variables cuando trabaja con expresiones como 4x+__= 9; 7-__=2 etc. Si la variable toma valores en un conjunto como N, dicha variable se llama discreta, si está definida para dominios continuos, la variable se llama continua. Una de las aplicaciones más comunes de las variables es su uso como magnitudes desconocidas en la formulación de ecuaciones. En realidad, cuando necesitamos formular una ecuación, a partir de un problema, lo primero que debemos hacer es definir las variables. Estas a menudo se encuentran en las preguntas del problema. Al definir una variable debemos no sólo especificar su dominio, sino lo que se conoce como condiciones de contorno es decir, condiciones adicionales, si es que existen. Debemos a acostumbrar al alumno (a) a definir bien sus variables, en realidad, de ello depende en gran parte la interpretación del problema donde interviene.

Esta línea directriz siempre trabaja en combinación con las cuatro líneas anteriores.

Sexta línea directriz: Definir

Esta es una de la líneas directrices más importante en la asignatura de matemática, porque está íntimamente relacionada con el lenguaje y con el desarrollo del pensamiento mismo.

Según Piaget[1] , las primeras definiciones lógicas aparecen en el niño (a) entre los 7 u 8 años de edad; pero el pensamiento definitorio no se construye sino hasta los doce años. Entre los siete y los doce años, el niño (a) es incapaz de dar definiciones exhaustivas y se limita a descripciones del objeto por el uso. Por ejemplo: ¿qué es el mínimo común múltiplo? Respuesta posible: "es lo que usamos para sumar fracciones que tienen distinto denominador". Esta definición, para un niño (a)de cuarto grado es incuestionablemente correcta. ¿Cómo definir la actividad docente para que el alumno pase de la simple descripción por uso a la definición? Para el caso del m.c.m ya presentamos una propuesta al estudiar la línea directriz teoría de conjuntos.

Las actividades preparatorias a la línea directriz "definir" son la observación, la comparación, el análisis de situaciones, el hacer que un niño (a) haga del objeto a definir su centro de interés. Ello implica, preparar científicamente el cuestionario, entre muchas acciones.

Los siguientes ejemplos posiblemente ayuden a explicar nuestro punto de vista.
Necesitamos que el estudiante aprenda a definir variables, ¿cómo proceder?

[1] El juicio y el razonamiento en el niño. Jean Piaget. Editorial Guadalupe, 1972

Planteamos una situación como ésta: En el grado de Luis hay en total 24 estudiantes y por cada 4 niños hay 2 niñas, ¿cuántos niños y cuantas niñas hay? (Problema planteado para segundo grado en los programas de Nicaragua)

Sugerimos un cuestionario como el siguiente:

Primera pregunta: ¿qué necesitamos saber?
Segunda pregunta: ¿sabemos cuántos niños hay?, ¿sabemos cuántas niñas hay?
Tercera pregunta: ¿qué sabemos del número de niños y del número de niñas?
Cuarta pregunta: si a las cantidades que no conocemos las llamamos variables: ¿cuántas variables tenemos?
Quinta pregunta: ¿qué representa cada variable?
Sexta pregunta: ¿pueden estas variables tomar el valor de 30?, ¿por qué?

Un segundo ejemplo: ¿cuál es el área máxima de un rectángulo cuyo perímetro es 20 centímetros?

He aquí un cuestionario que recomendamos para definir variables en este problema.

¿Qué necesitamos conocer?, ¿de qué magnitudes depende el área? o: ¿qué dimensiones necesitamos conocer para calcular el área?, ¿conocemos estas dimensiones?...

La acción mental de "definir" se cultiva mediante un proceso largo y continuo, pero debe empezar desde los primeros años en la escuela. El éxito radica en partir de la primera respuesta que da el alumno (a) por muy absurda que parezca y, mediante pregunta sobre sus propias respuestas construir la definición. Ensayemos algunos ejemplos:

Queremos construir el concepto de relación "es múltiplo de". Para ello partimos de ejercicios preparatorios como los siguientes:

1. Escribimos productos como 3 x 5 = 15, 7 x 2 = 14, 13 x 3 = 39, 4 x m = p.

2. Preguntamos: en el primer producto. ¿Cómo se llaman el 15, 3 y el 5? Igual con los demás productos.

3. Preguntamos. ¿qué es el 3 del 15?, ¿qué es "m" de "p"?

4. Explicamos. Dado que 3 es parte del 15 le llamaremos "múltiplo de" 3. ¿Cómo le llamamos al 14? ¿Cómo le llamamos al 39? ¿Qué es "p" de "m"?

5. Planteamos la siguiente situación: En la expresión a x b = c ¿Qué es "c" de "a"? ¿Qué es "c" de "b"?

6. La pregunta fundamental: ¿Cuándo afirmamos que "t" es múltiplo de "x"?

Tal como afirmamos anteriormente, desarrollar en el alumno la capacidad de definir es un proceso largo y continuo, pero que el alumno disfruta con su progreso.

Las definiciones, una vez construidas, pasan a formar parte de la cultura matemática y del marco conceptual del alumno. Como cultura matemática el estudiante adquiere el hábito de definir y como marco conceptual, lo podrá usar cada vez que lo necesite.

Otro problema que debemos resolver desde los primeros años de estudio, es que el alumno (a) tenga el hábito de usar la definición. Nuestros estudiantes, en su mayoría, proceden por imitación. Generalmente actúan guiados por modelos y esta forma de proceder les va creando limitaciones intelectuales que terminan por convertirse en "pereza mental". Un alumno (a) que no tiene el hábito intelectual de usar definiciones, terminará con serias dificultades intelectuales.

Séptima línea directriz: Demostrar

La etapa preparatoria a la demostración es el razonamiento lógico. Todo razonamiento es una demostración.

La línea directriz "demostrar", parte del principio de que todo conocimiento matemático, por muy obvio que parezca, debe pasar por un proceso de demostración para que sea aceptado por el alumno y pase a formar parte, concientemente, de su cultura matemática. Nos referimos, claro está, a conocimientos que implican relaciones entre objetos matemáticos precisamente definidos.

Esta última reflexión nos obliga a la pregunta: ¿Qué vamos a entender por "demostrar"?

En principio, el concepto "demostrar" está estrechamente vinculado al nivel de desarrollo del pensamiento y al objeto, relación u operación que estamos estudiando. Otra verdad incuestionable, es que toda demostración implica una acción mental, una operación lógica que cuando se aplica correctamente nos conduce necesariamente al éxito, entendiendo como tal, la asimilación consiente del objeto, relación u operación que estamos estudiando.

Una demostración no debe ser necesariamente una cadena de implicaciones complicadas con símbolos y rigor matemático, dependiendo del nivel en el que estamos trabajando; la demostración se puede concebir como una comprobación o una verificación.

Concretamente, en primaria y aún en secundaria, la demostración se enmarca dentro del descubrimiento de propiedades que el alumno verifica, entre muchas formas, por medio de mediciones, comparaciones, superposiciones, etc.

Veamos algunos ejemplos de demostraciones que se pueden realizar en primaria.

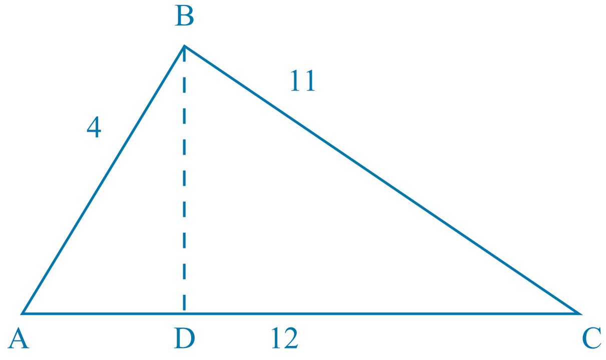
Podemos demostrar por ejemplo, que en magnitudes, el perímetro del triángulo A,B,C es mayor que su área, ¿cómo?

Trazamos la altura correspondiente a AC.
La altura BD es menor que 4.

El área por tanto es menor que $\frac{12x4}{2} = 24$

El perímetro, por otra parte es 27.

Si el perímetro es 27 y el área menor que 24, entonces el perímetro es mayor que el área.



Lo anterior es una demostración formal, aunque lo hayamos hecho para un triángulo en particular.

Lo que intentamos inducir, de la demostración anterior, es que una proposición no necesita ser general para ser demostrable. Didácticamente, cualquier proposición es susceptible de ser demostrada, salvo que sea un axioma o un postulado. Esto es lo que exige la línea directriz demostración.

Octava línea directriz: Terminología y Simbología Matemática

Dos son las funciones de esta línea directriz: "Enriquecer cada vez más el vocabulario matemático, y contribuir al desarrollo mental a través del lenguaje". Mediante la primera función, el alumno (a) cultiva la correcta expresión de sus ideas matemáticas en su propio lenguaje: el matemático. A través de la segunda función, el estudiante asimila los conceptos y las definiciones. Cada vez que el alumno (a) construye un concepto, debemos inmediatamente denotarlo con la notación universal que para éste se ha determinado. Desde ese momento, el símbolo que representa al concepto se convierte en el concepto mismo, de tal suerte que dicho símbolo ahora se convierte en un instrumento poderoso de trabajo.

Veamos dos símbolos aplicados a los segmentos.

La expresión AB denota al segmento cuyos extremos son los puntos A y B.

La expresión AB denota la longitud de AB.

¿Verdad que el símbolo tiene el poder de contener todo un concepto en sí?

Como hemos dejado claro, en la dinámica de las clases, las líneas directrices no aparecen solas sino entrelazadas. Por ello, nos ha parecido pertinente tomar un tema determinado, bosquejar las actividades de la clase y ubicar en ellas las líneas directrices. He aquí la clase.

Grado: Segundo

Tema: Técnicas para resolver problemas: Etapa preparatoria.

(1) Presentar el siguiente problema

En el grado de Luis hay 4 niños por cada 2 niñas. Si en total hay 24 estudiantes ¿Cuántos niños y cuantas niñas hay en el grado de Luis?

(2) Una vez leído el problema por los alumnos formular las preguntas y realizar las actividades que aparecen en la siguiente tabla. A la par de cada pregunta escribimos la línea directriz correspondiente a la justificación.

• ¿Qué necesitamos saber?	Trabajo con Variables	Una variable es el número de niñas y otra el número de niños.
• ¿Cuántos estudiantes hay en total?	Dominios numéricos y simbología y terminología matemática.	Este es un número natural (24)
• ¿Es correcta esta afirmación? Niños + niñas = 24	Ecuaciones e Inecuaciones	La expresión niños + niñas = 24 es una ecuación.
• Por cada 4 niños hay 2 niñas ¿Qué significa esto?	Demostración	Debemos conducir al alumno (a) a que razone y concluya que el número de niños es el doble del número de niñas.
• Es posible que hayan 18 niñas y 6 niños? Sí__ No__ ¿Por qué?	Demostración	El niño (a) debe concluir que no es posible porque 18 no es el doble de 6.
• Es posible que hayan 12 niñas y 6 niños? Sí __ No__ ¿Por qué?		El niño debe concluir que no es posible porque 12 + 6 24 aunque 12 es el doble de 6.
• Indica a los alumnos que formulen posibles respuestas. Una vez formuladas analizar si está o no correctas. Para ello se sugiere la siguiente tabla en la pizarra. Niños + Niñas = 24	Demostración	El niño(a) debe manejar la situación siguiente: Niños = 2 (niñas) Y la operación adición.
• Una vez obtenida la respuesta niños = 16 niñas = 8. Hacer notar que: La suma es 24 y el número de niños es el doble del número de niñas.	Correspondencia y Funciones	

El problema que hemos resuelto contiene cinco líneas directrices. Mejor aún, en la resolución del problema aparecieron cinco líneas directrices.

RESUMEN DEL CAPÍTULO:

A continuación presentamos a manera de resumen, las funciones de las líneas directrices en la asignatura de matemática.

La teoría de conjuntos es un instrumento pedagógico que identifica, organiza y categoriza conceptos. Además, los diagramas de Venn son muy útiles para representar las relaciones entre los conceptos matemáticos.

Los dominios numéricos cumplen con la función de cuantificar variables, tal cuantificación se puede hacer mediante conteo o mediante medición.

La correspondencia y funciones "transforma" los elementos de un conjunto y las relaciones generan particiones en el conjunto donde se definen y se ordenan los elementos de dicho conjunto.

La línea directriz ecuaciones e inecuaciones sirve para aplicar los dominios numéricos y la línea directriz "trabajo con variables" proporcionan los objetos que se usan en las ecuaciones.

La línea directriz "Definir" se usa para "ponerle nombre" a los objetos matemáticos que usamos. Una definición, en esencia, es un nombre, y la línea directriz "demostrar" es la columna vertebral del razonamiento matemático.

Finalmente, la línea directriz "terminología y simbología matemática", proporciona el lenguaje particular de la asignatura de matemática. La función es servir como instrumento de comunicación.

CUESTIONARIO EVALUATIVO:

1. Redacte tres ejemplos donde la teoría de conjuntos se aplique como organizador y categorizador de los conceptos.

2. Redacte una clase de matemática con el tema y nivel que estime conveniente e identifique en ellas las líneas directrices.

3. Busque un programa de matemática, ubíquese en una unidad temática cualquiera e identifique en ellas las líneas directrices, los objetivos y los contenidos que dicha unidad sugiere.

4. ¿Cuál es la importancia de las líneas directrices en el trabajo docente?

CAPÍTULO IV

ELABORACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

OBJETIVOS GENERALES:

Que los participantes del curso Didáctica de la Matemática:

1. Conozcan lo que es un concepto, los diferentes tipos de conceptos y las etapas de su elaboración.

2. Comprendan las etapas de la formación de un concepto y las apliquen exitosamente en la clase.

3. Elaboren científicamente los conceptos matemáticos contenidos en los programas de la escuela primaria.

PRESENTACIÓN:

En el proceso de construcción del conocimiento matemático se realizan un gran número de acciones mentales. Entre éstas, las más importantes son: elaboración de conceptos, demostración de proposiciones, construcción de algoritmos, formulación y resolución de problemas y construcciones geométricas. Estas acciones no están de inmediato, se formulan según determinadas leyes.

En esta unidad abordaremos las leyes que rigen la elaboración de conceptos y las distintas etapas por las cuales pasa este proceso.

Dado que la elaboración de conceptos matemáticos es una acción mental, conviene incursionar, aunque brevemente, en el terreno de las acciones mentales.

La acción es la piedra angular de toda actividad humana. El contenido de la acción está constituido, por una parte, por la transformación real de un objeto inicial o de una situación inicial en un producto deseado o en una situación deseada. A esta parte de la acción se le llama *Fase de Realización de la Acción*.

Las acciones mentales siempre han sido desarrolladas a partir de acciones exteriores. La actividad mental es, desde esta perspectiva, una interiorización de la actividad real con objetos.

Para poder formar acciones mentales valederas en el alumno, a las que corresponde también una serie de características cualitativas, no se debe permitir que la interioridad se realice por sí misma, aisladamente, sino que cada paso de la interioridad debe ser planificado y dirigido con exactitud. Esto es posible cuando se conoce el proceso cómo se realiza la acción mental y las etapas respectivas. Eso es lo que haremos en esta unidad con la elaboración de los conceptos.

DESARROLLO:

Debido a la naturaleza e importancia del tema, hemos decidido dividir la exposición del contenido en dos partes: una primera parte que llamaremos *Marco Teórico* y la segunda parte que llamaremos *Ejemplificación*.

PRIMERA PARTE: MARCO TEÓRICO

Reflexiona y contesta:

1. ¿Qué es un concepto? ¿Qué es una definición? ¿Cuál es la diferencia entre concepto y definición? ¿Por qué es importante elaborar conceptos en matemática?

2. Describe brevemente lo que harías para elaborar el concepto de "número primo".

3. Revisa las dos primeras unidades de primer grado y a partir del contenido y las actividades ahí expuestas, describe un procedimiento para elaborar el concepto de Número Natural.

4. Redacta un procedimiento para elaborar el concepto de fracción.

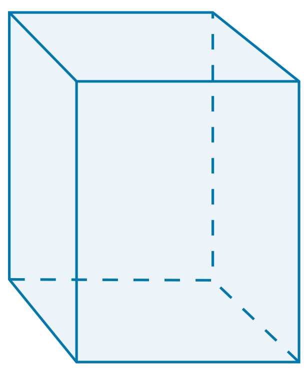
5. Compara con tus compañeros (as) el trabajo realizado, discute los detalles en los que no están de acuerdo, saquen una única conclusión y guárdenla para después de haber estudiado la unidad.

ASPECTOS A TOMAR EN CUENTA EN LA ELABORACIÓN DE UN CONCEPTO:

¿Qué es un concepto? Por concepto se entiende el reflejo mental de una clase de cosas, proceso o relaciones de la realidad o de la conciencia, sobre la base de sus características invariables. El concepto es el reflejo mental. El reflejo verbal, es decir, la descripción del concepto, se llama DEFINICIÓN.

Analicemos el siguiente ejemplo: Supongamos que tenemos una caja de madera, una caja pequeña de cartón donde han empacado un par de zapatos, una caja de cartón que contiene un televisor, una refrigeradora, etc.

Todas las cajas que hemos mencionado y muchas otras tienen esta forma.



Geométricamente, todas estas cajas tienen la forma de un paralelepípedo o prisma rectangular.

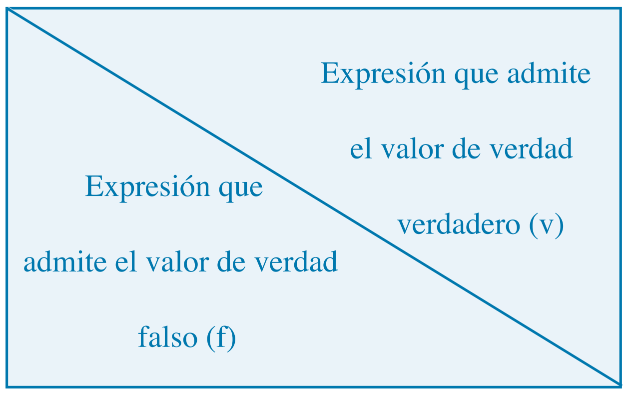
Observemos que lo de paralelepípedo o prisma se refiere solo a la forma. La FORMA es la característica invariable. En el concepto hemos eliminado cuestiones como color, tamaño, material, etc. El paralelepípedo, es el reflejo mental de una forma; es la abstracción de la forma.

Desde el punto de vista psicológico, un concepto es el resultado de adiciones o multiplicaciones lógicas. ¿Qué es una adición lógica? ¿Qué es una multiplicación lógica?

La adición es una operación lógica mental que consiste en encontrar la clase más pequeña que contiene a un conjunto de clases dadas. El concepto de PROPOSICIÓN MATEMÁTICA LOGICA es un ejemplo de adición lógica.

"Una proposición matemática lógica es una expresión que admite uno y solo un valor de verdad: verdadero (v) o falso (f)".

En este concepto tenemos la adición de expresiones que admiten valor de verdad verdadero con las que admiten valor de verdad falso.



Proposiciones

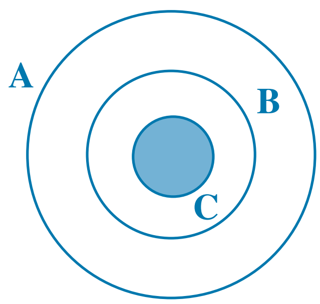
La multiplicación lógica es una operación lógica mental que consiste en encontrar la máxima clase que está contenida en un conjunto de clases dadas; o si se prefiere, el conjunto de los caracteres comunes a esas clases. El concepto de *triángulo equilátero* es un ejemplo de multiplicación lógica.

"Un triángulo equilátero es una figura geométrica que tiene tres lados, de los cuales, al menos dos son congruentes"

Definamos los conjuntos A, B así:

A = {x /x es un triángulo}
B = {x / x es un triángulo que tiene al menos dos lados congruentes}

$B \subset A$



La región sombreada C de la figura corresponde a los triángulos equiláteros. La parte de B no sombreada corresponde a los triángulos isóseles
Este es un ejemplo más de concepto como reflejo mental.

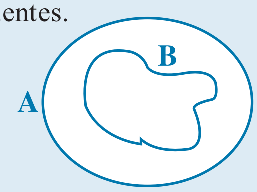
Si la clase reflejada mentalmente contiene todas las clases de conjuntos equipotentes, entonces la equipotencia es una característica invariable, y el reflejo es el concepto de “número natural”.

Todo concepto tiene su extensión y su contenido. La extensión es la clase de objeto a la que se refiere el concepto. El contenido son las características comunes a todos los objetos. Analicemos la extensión y el contenido del concepto TRIANGULO.

Extensión del concepto triángulo: Todas las figuras geométricas que tienen tres y solamente tres lados.

Contenido del concepto triángulo: Figura plana, conjunto de puntos que se componen de tres vértices y de los puntos de los tres segmentos correspondientes. Los vértices no están situados sobre una recta.

La relación entre extensión y el contenido del concepto es la siguiente: cuanto mayor es la extensión del concepto menor es su contenido o viceversa: a menos extensión mayor contenido. Observa y analiza el siguiente cuadro.

Concepto	Contenido	Extensión
Número par positivo	Todo número positivo múltiplo de 2.	{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18...}
Múltiplo de 6 positivo	Todo número positivo múltiplo de 2 y de 3. Observa que el contenido tiene una extensión más.	{6, 12, 18, 24... } Observa que la extensión es menor
Triángulo equilátero	Figura plana, conjunto de puntos formado por tres vértices y tres segmentos. Los vértices no están en línea recta y los tres lados tienen la misma medida.	Todas las figuras geométricas con tres lados, todos congruentes.
Triángulo Isósceles	Figura plana... con al menos dos lados congruentes. (Observa que el contenido es menor). A = {x / x es triángulo isósceles} B = { x / x es triángulo equilátero }	Ahora la extensión cubre a los que tienen dos lados congruentes. 

Como dijimos antes, el reflejo verbal del concepto es la definición. Desde el punto de vista psicológico *la definición es la toma de conciencia del empleo que se hace de un concepto en el curso del razonamiento*.

Según Pieget[1], la construcción y redacción de definiciones corresponde a la última etapa del desarrollo del pensamiento. Esta etapa corresponde a niños mayores de 12 años.

¿Cuál es el proceso que se sigue para elaborar un concepto en la escuela?

El proceso total de la elaboración de un concepto tiene tres etapas: consideraciones y ejercicios preparatorios; formación del concepto y asimilación del mismo. Analizaremos detalladamente cada una de estas etapas.

Primera etapa: Consideraciones y Ejercicios Preparatorios

Esta etapa comienza a veces, muchos años antes de la introducción del concepto. En esta etapa los alumnos (as) se familiarizan con fenómenos, formas de trabajo que más tarde relacionarán con el concepto. Los alumnos (as) conocen parcialmente el concepto, mucho antes de su tratamiento en clase, porque, en algunos casos ya lo han utilizado en el lenguaje común. Por ejemplo, un par de zapatos, un par de calcetines, son conceptos que el niño (a) ya conoce antes de que en el tercer grado se lo expliquen. Otro ejemplo: con frecuencia el niño (a) conoce las denominaciones de las monedas y efectúa transacciones comerciales con ellas, mucho antes de que se estudien en quinto grado los decimales. En la segunda parte del capítulo, ejemplificamos esta etapa.

Segunda Etapa: Formación del concepto

Esta etapa comprende –según el pedagogo alemán Werner Jungk[2]– la creación del nivel de partida, la motivación hacia el objetivo y la definición o explicación del concepto. Describamos brevemente cada una de estas acciones.

Se llama creación del nivel de partida a las actividades que familiarizan al alumno con el concepto que se quiere formar.

La motivación –que debe durar durante todo el proceso– puede estar centrada entre muchas acciones en una pregunta, cuya respuesta es el concepto mismo.: aparente incongruencia entre relaciones, necesidad real de crear o formar el concepto para resolver una situación, etc. La orientación hacia el objetivo debe mantenerse, al igual que la motivación durante todo el proceso de formación de conceptos y consiste básicamente, en las explicaciones o participación del docente para indicarle al alumno que es exactamente lo que queremos lograr.

Tercera Etapa: Asimilación del Concepto

La asimilación del concepto comprende tres momentos bien definidos: la ejercitación, la profundización y la sistematización.

[1] El juicio y el razonamiento en el niño. Jean Piaget , Editorial Guadalupe, 1972

[2] Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Warner Jungk, Editorial libros para la educación. 1981

Tanto en la formación del concepto como en la asimilación, el punto esencial desde el aspecto metodológico está en reconocer y buscar un sistema de características necesarias y suficientes. Del reconocimiento de estas características, depende la asimilación correcta del concepto. Abordemos ahora lo referente a los tres momentos de la asimilación.

La ejercitación: está caracterizada por todas aquellas actividades orientadas a la IDENTIFICACIÓN del concepto; esto es, actividades en las cuales el alumno determina si tal o cual objeto pertenece o no al concepto.

La profundización: llamada realización, consiste en crear objetos pertenecientes al concepto o transformar los ya existentes.

Sistematización: conocida también como aplicación; se realiza siempre en relación con otras situaciones.

En estos tres momentos, durante la etapa de asimilación, se debe lograr los siguientes objetivos:

- Poder indicar ejemplos para el objeto tratado.
- Conocer y utilizar correctamente la denominación del concepto, es decir, la palabra o el símbolo correspondiente.
- Poder nombrar propiedades del concepto.
- Estar en condiciones de nombrar e indicar contraejemplos y de fundamentar por qué estos no pertenecen a la extensión del concepto.
- Poder señalar casos especiales y casos límite.
- Conocer las relaciones con los demás conceptos.

¿Cómo se clasifican los conceptos?

Desde el punto de vista didáctico los conceptos se clasifican en los grupos según el criterio que se aplique. De acuerdo con su naturaleza, los conceptos se clasifican en conceptos de objeto, conceptos de operación y conceptos de relación.

Los conceptos de objetos designan clases de objetos reales o irreales que se pueden caracterizar por medio de representantes. Por ejemplo: triángulo, número par, ángulo, etc.

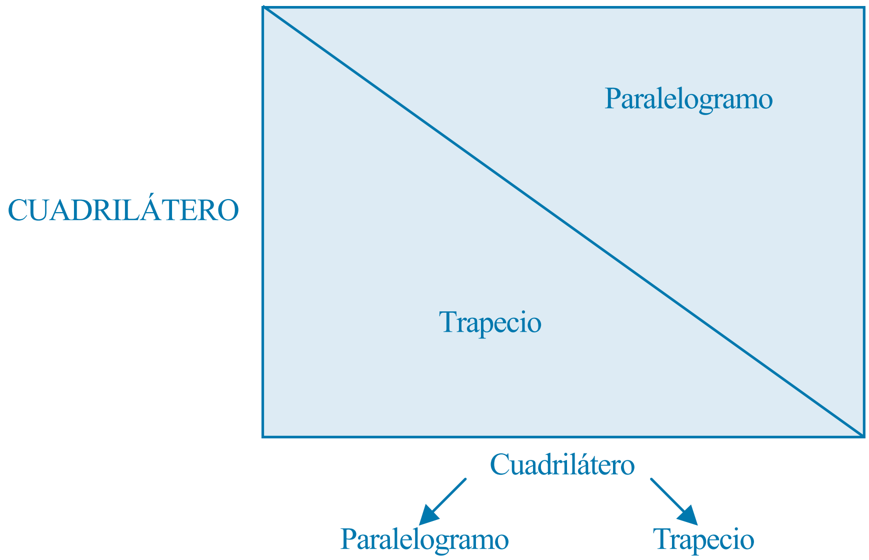
Los conceptos de relaciones reflejan las relaciones existentes entre los objetos; por ejemplo: “menor que”; “perpendicular a”; “tangente a”...

Los conceptos de operaciones designan las acciones que se efectúan con los objetos. Por ejemplo: adición, multiplicación, etc.

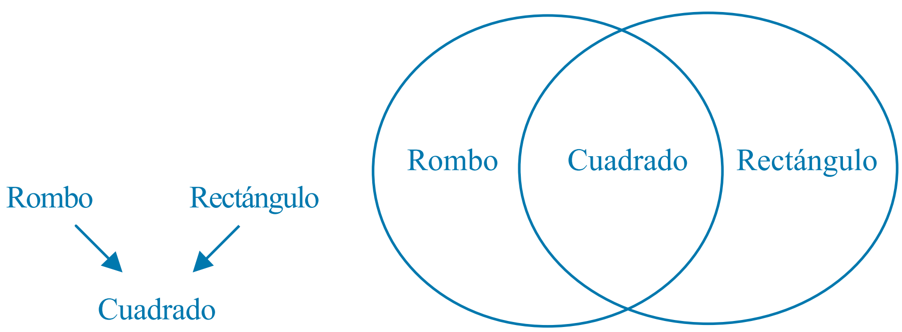
Según su dependencia, los conceptos se clasifican en superiores, colaterales y subordinados.

Los conceptos superiores son la suma lógica de conceptos colaterales y los conceptos subordinados son la multiplicación lógica de conceptos colaterales. Observa el siguiente ejemplo:

El concepto cuadrilátero es superior a los conceptos paralelogramo y trapecio.



El concepto cuadrado está subordinado a los conceptos rombo y rectángulo.



SEGUNDA PARTE: EJEMPLOS DE ELABORACIÓN DE CONCEPTOS

En esta segunda parte de la unidad, presentamos la elaboración de algunos conceptos, siguiendo las etapas descritas en el marco teórico.

Primera Etapa: Consideraciones y Ejercicios Preparatorios

El proceso de elaboración del concepto de número natural obedece, en su etapa preparatoria, a ciertas leyes, las cuales erróneamente se han considerado patrimonio del niño desde la más tierna edad. Estas leyes son según Piaget[3]: la ley de conservación del todo y ley de reversibilidad; la ley de la continuidad y ley de la correspondencia biunívoca.

Las consideraciones generales y ejercicios preparatorios deben concentrarse en la formación de estas leyes en el niño. Para formar estas leyes es que en los programas de primer grado incluyen el aprestamiento matemático.

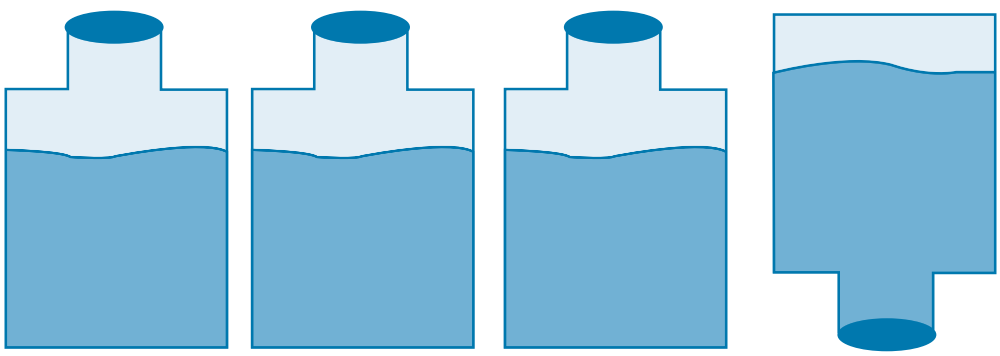
En otras palabras, los ejercicios preparatorios para la elaboración del concepto número natural, están perfectamente diseñados en el aprestamiento matemático.

Analicemos las acciones de esta etapa, la ley que se construye y su implicación es la formulación del concepto de número natural.

Primera ley: Conservación o ley de reversibilidad

Un número natural -para nosotros, no para el niño- es la representación simbólica de una clase de conjuntos equipotentes. Que un niño o niña de 6-7 años capte este reflejo mental es uno de los trabajos más delicados e interesantes de la Didáctica de la Matemática. En este sentido, lo primero que hay que hacer es que el niño (a) "descubra" que la equipotencia depende de la cantidad de elementos y no de factores como tamaño, forma, material, etc. A este reflejo mental se le llama ley de reversibilidad. ¿Cómo saber si el niño (a) posee esta ley? He aquí algunas actividades recomendables.

Actividad 1: Tome dos botellas de la misma forma y tamaño y vierta en ellas la misma cantidad de agua. Que los niños vean que la cantidad de agua es la misma. Invierta verticalmente la posición de una de las botellas. Que los niños observen ahora en nivel del agua. Pregunte: ¿Cuál de las botellas tiene más? Si el niño o la niña contesta que ambas botellas tienen la misma cantidad de agua, entonces diremos que posee la ley de reversibilidad.



[3] El juicio y el razonamiento en el niño. –Jean Piaget. Editorial Guadalupe, 1972

Actividad 2: Tome dos hojas rectangulares verdes del mismo tamaño y dígale al niño que cada hoja es un terreno con pasto. Que los niños verifiquen que son del mismo tamaño. Recorte dos pedazos de cartulina blanca o amarilla del mismo tamaño. Cada pedacito de cartulina es una casa. Coloque una cartulina en el centro de una de las hojas verdes y la otra en una esquina.

Pregunta: ¿En qué terreno hay más pasto?

Si el niño responde que en ambos terrenos hay la misma cantidad de pasto, entonces posee la ley de reversibilidad.

Ley de Continuidad:

Según Enma Castel Nuovo en su DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA MODERNA[4], en la metodología anterior a Montessori y Decroly no se ponía atención en el paso de números a números sino que se insistía en la percepción de un determinado número. No había “de uno a dos” ni “de dos a tres”, más bien había “uno, dos, o tres”. Por ejemplo: esto “OO” es dos; esto “OOO” es tres. Esta metodología tiene el concepto de intuición como contemplación, no como construcción activa.

En la metodología activa (construcción de Piaget) el dos se debe construir a partir del uno y el tres a partir del dos. Esto es: el niño debe comprender que dos está contenido en el tres. ¿Cómo saber cuando el niño está preparado para este paso? Esta es la razón de construir series. Cuando el niño posee la ley para construir series, se dice que posee la ley de continuidad. Experiencias como las siguientes son muy útiles para observar si el niño posee o no la ley de continuidad.

Ponga al niño a ordenar objetos de la misma forma y diferentes tamaños:

Objetos de forma circular 

Objetos de forma rectangular 

Objetos de forma triangular 

Objetos de forma semicircular 

¡Mucho cuidado! Lo que el docente debe observar es el método que el niño usa para orden. El niño posee la ley de continuidad y para ordenar confronta el más pequeño con los demás en cada paso.

El proceso de clasificación

Para formar un concepto de número, es necesario que el niño desarrolle una condición de orden. Esto es: el niño debe estar en la posibilidad de ordenar en sucesión los elementos y esto sólo se obtiene, en opinión de los psicólogos, hasta los 5 ó 6 años.

[4] Didáctica de la Matemática Moderna; pag 20, Editorial TRILLAS; 1980

Experiencias como las siguientes resultan interesantes.

Proporciónele al niño algunas tiras de papel del mismo color, pero que difieran cada una de tamaño (por ejemplo 1cm) e indíquele que las ordene de acuerdo con su tamaño. La experiencia nos dice que es hasta los 5 ó 6 años cuando el niño encuentra el método correcto. Otras experiencias como agrupar objetos por color, tamaño, forma, etc. También ayudan a construir en el niño la acción mental de clasificar.

Ley de correspondencia

Una clase de conjuntos equipotentes es una clase de conjuntos que mantienen una correspondencia biunívoca entre sus elementos, independientemente de forma, tamaño, etc.

El último aspecto a tomar en cuenta, es la formación del concepto de número natural en su simbolización. La esencia de esta acción radica en la necesidad de hacer comprender al alumno que en el símbolo se encuentra todo un mensaje que entiende todo el mundo y que las expresiones de las ideas se realizan por medio de símbolos.

En resumen, la ley de reversibilidad, la ley de continuidad, la correspondencia biunívoca y la simbolización son las leyes que deben formarse en la etapa preparatoria de la elaboración del conceptos de número natural.

Segunda Etapa: Formación del Concepto de Número Natural

Aseguramiento del nivel de partida. Tal aseguramiento solo existe si el niño posee todas las leyes descritas y analizadas en la etapa anterior.

Motivación; –¿Cómo motivar a un niño de 6-7 años para que se interese por el concepto de número natural? He aquí un reto interesante. Según Piaget, un niño de 6-7 años tiene como centro de actividad el juego (acción sensorio-motriz) y es en este tipo de actividades en que debemos centrar la motivación.

Por otra parte, cantidad de experimentos han demostrado que el concepto de número natural se construye mediante series, esto es: 1-2-3 como primera serie, 4-5-6 como segunda serie y 7-8-9 como tercera serie.

Partiendo de estas premisas, parece razonable centrar la motivación en actividades como las siguientes:

- Indicar a los niños que aplaudan una vez; después dos veces y finalmente tres veces.

- Indicar a los niños que se levanten una vez, después dos veces y finalmente tres veces.

- Que salga de la clase un niño, luego sale otro; pregunta: ¿cuántos niños están afuera?, finalmente sale otro... ¿cuántos están afuera ahora?

Que los niños dibujen un barco, luego otro.. ¿Cuántos barcos hay?, por último un tercer barco: ¿cuántos hay ahora?

Se pueden realizar muchísimas actividades con series de tres. Lo importante es que el niño construya el reflejo mental de que el dos es el resultado de agregar uno al uno, y si agregamos uno al dos obtenemos tres. Por esta razón: 1 > 2, 2 > 3.

Orientación hacia el objetivo. Este momento, para el caso del concepto de número natural corresponde a esta etapa gráfica. Las actividades recomendables, entre muchas otras son:

Presentar láminas pintadas con colores diferentes, donde se ubiquen clases de un objeto, clases de dos objetos y clases de tres objetos.
A partir de estas láminas, promover un diálogo con los alumnos con el fin de que asimilen que cada una de las clases de la primera lámina se puede simbolizar por 1 que se lee uno. Preguntas como estas ayudan al diálogo.

¿En que se diferencian los elementos de este conjunto? ¿Qué tienen en común? ¿Cuántos elementos tiene cada conjunto?

Se procede de una forma similar con el dos (2) y con el tres (3).

Este procedimiento aplicado para la formación de la serie 1, 2, 3 se puede aplicar con la serie 4, 5, 6 ... 7, 8, 9.

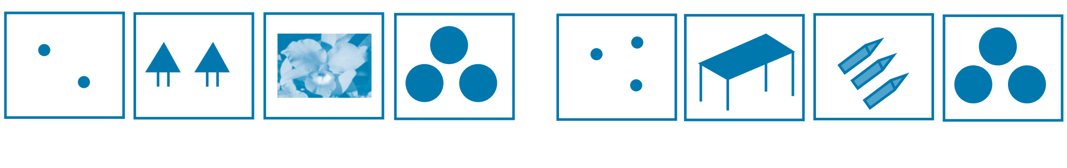
Seguramente ya te diste cuenta de que la formación del concepto de número natural se realiza a partir de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,. La formación del concepto CERO corresponde a otra situación pedagógica, lo mismo que la formación de la decena.

ASIMILACIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO NATURAL:

Ejercitación ... Para el caso de los números naturales, la ejercitación se realiza mediante las combinaciones básicas, las relaciones de orden y la relación de igualdad. Estos son algunos recursos para la ejercitación.

Para ejercitar la serie 1, 2, 3.

1. Debajo de cada motivo escriba el número correspondiente.



2. En $\square$ Escriba “>” ; “<” ; “=” según sea correcto

$\boxed{o\ o}$ $\square$ $\boxed{o\ o\ o}$ $\boxed{o}$ $\square$ $\boxed{o\ o\ o}$ $\boxed{o}$ $\square$ $\boxed{o\ o}$ $\boxed{o\ o\ o}$ $\square$ $\boxed{o\ o\ o}$

3. En $\square$ Escriba “>” ; “<” ; “=” según sea correcto

2 $\square$ 1; 3 $\square$ 1 + 2; 2 $\square$ 3; 1 $\square$ 3; 1 + 1 $\square$ 2; 3 $\square$ 2 - 1; 1 $\square$ 3 - 2;

4. Escriba en $\square$ el número correspondiente.

2 + 1 = $\square$; $\square$ + 1 = 3; 3 - $\square$ = 2; 1 + $\square$ = 3; 3 - $\square$ = 1; 1 + $\square$ = 2;

Este mismo tipo de ejercicios debe repetirse concluida la serie 4, 5, 6 y la serie 7, 8, 9.

Profundización.- La profundización se logra con ejercicios similares a las preguntas en la etapa de ejercitación, pero con los números del 1 al 9. Veamos algunos ejemplos:

1. En $\square$ escribe >,<, = según lo crea correcto.

   5 $\square$ 1; 3 $\square$ 9; 7 $\square$ 5 + 2; 8 $\square$ 5 + 2; 9 $\square$ 6; 8 $\square$ 4 + 4

2. En $\square$ escribe el número correspondiente.

   5 + $\square$ = 7; $\square$ - 3 = 2; $\square$ + 4 = 9; 3 + 5 = $\square$; 6 - 2 = $\square$ 9 - $\square$ = 4

3. Completa la siguiente tabla.

a	a + 5
3	

a	a - 5
8	

a	b	a + b
4	5	

a + 5	a
9	

a	b	a + b

4. Escribe en $\square$ los números correspondientes.

   9 = $\square$ + $\square$; 9 = $\square$ + $\square$; 9 = $\square$ + $\square$; 9 = $\square$ + $\square$;

   7 = $\square$ + $\square$; 7 = $\square$ + $\square$; 7 = $\square$ + $\square$; 7 = $\square$ + $\square$;

Aplicación. –Para la aplicación, nos parece interesante recomendar la siguiente experiencia que aparece en el libro: “Descubrimiento y Reconstrucción del Conocimiento” de Genoveve Sastre[5] y Montserrat Moreno. Esta es la experiencia.

[5] Genoveve Sastre; Montserrat Moreno – Descubrimiento y reconstrucción del conocimiento. –Editorial PAIDÓS.

Se toman parejas de niños. De cada pareja uno sale del salón y el otro se queda. Al que se queda el profesor le indica que "debe hacer en una hoja de papel lo que le parezca mejor, lo que crea más conveniente para que el niño que ha salido, cuando entre y mire el papel, sepa exactamente cuántos caramelos ha puesto sobre la mesa". El profesor en este momento coloca sobre la mesa cualquier número de caramelos desde 1 como mínimo a 9 como máximo.

Al dar las instrucciones al niño, se deben evitar palabras como "número, escribe, dibuja" o cualquier otro término que induzca al alumno a una conducta intelectual determinada. Terminada la prueba, se invierten los personajes.

Sabemos que el alumno ha asimilado el concepto de número, si en el papel escribe el número de caramelos que observa en la mesa.

La actividad puede resultar interesante para el alumno, si se asignan dos puntos a la pareja ganadora, 1 punto si solo acierta uno de la pareja y cero puntos si no se acierta. Los resultados se dan a conocer después de que todos los alumnos pasan y se premian con aplausos a los ganadores.

Ejemplo 2.. Elaboración del concepto de fracción (5to grado)

NOTA ACLARATORIA: Tal como se explicó en el marco teórico, la definición de los conceptos corresponde a los niños mayores de 12 años (educación secundaria). En primaria, el niño se limita a describir el concepto, no a definirlo.

Nos parece razonable que en el nivel de 5to grado, definir una fracción como el reflejo mental de "un número que expresa la medida de un objeto, cuya unidad de medida puede dividirse en un número exacto de partes". Este es el concepto de fracción que construiremos en este ejemplo.

Primera Etapa: Consideraciones y Ejercicios Preparatorios

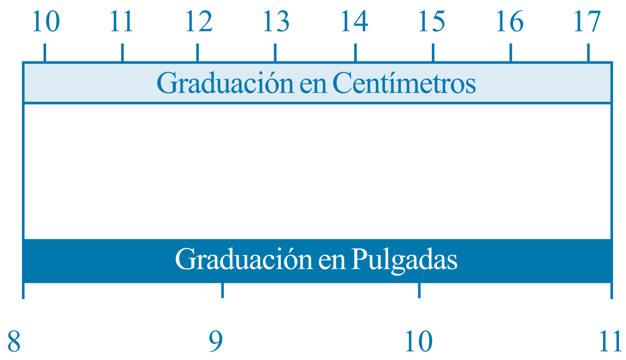
La fracción, como unidad de medida, el niño y la niña la vienen usando desde tercer grado-no con ese nombre, obviamente- En efecto, en tercer grado se habla de 5 centavos de córdoba (5/100C$); también se estudia el decímetro y el centímetro, como parte del metro, la botella como parte del galón, el galón como parte de la lata, etc.

Todos estos conocimientos adquiridos de fracción como parte de una unidad de medida, se pueden considerar como ejercicios preparatorios del concepto de fracción.

Segunda Etapa: Formación del Concepto

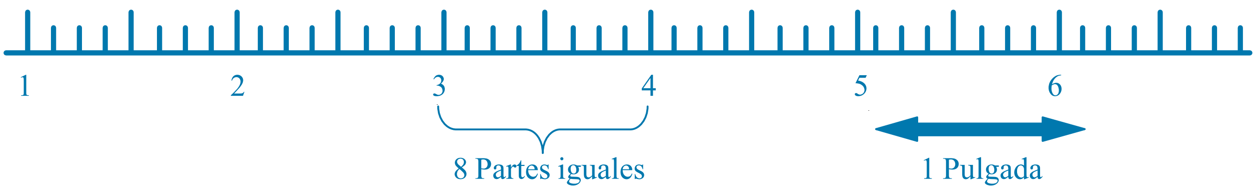
Indicamos al alumno que realice acciones que ha hecho o ha visto hacer. Una de estas acciones puede ser:

- Observar y describir la graduación de una regla milimetrada. ¿Cuántos centímetros tiene la regla? ¿Cuántas pulgadas?



Indicar a los alumnos que midan el ancho y largo de cualquier hoja de papel. Los alumnos deben reflexionar sobre esta pregunta. ¿Cómo expresar, en pulgadas, la medida exacta del ancho y el largo de una hoja de papel?

- Regale a los alumnos una hoja de papel bond tamaño carta. Que mida el ancho y el largo y que exprese la medida en pulgadas. Que el alumno reflexione. ¿Por qué no podemos expresar la medida exacta en pulgadas?
- Formular la siguiente pregunta: ¿Existe alguna forma de expresar la medida exacta , en pulgadas de la hoja de papel Bond?
- Que los alumnos observen la parte graduada de la regla en pulgadas. ¿Cuántas "rayitas" hay entre dos pulgadas consecutivas?

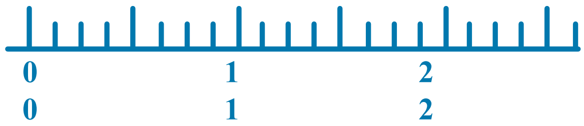


Explicar que cada una de las 8 partes iguales en que se ha dividido la pulgada corresponde a lo que se llama "un octavo de pulgada" y se escribe así $\frac{1}{8}$ pulg.

Que el alumno:

- Conteste: ¿Cuántos octavos de pulgada hacen una pulgada?
- Construya segmentos de 3/8 de pulgada, 5/8 de pulgada y 7/8 de pulgada.
- Mida nuevamente la longitud de la hoja de papel bond e identifique la medida exacta.
- Conteste: ¿Por qué no podíamos expresar la medida exacta de la hoja de papel? ¿Cómo superamos la dificultad?

- Construya y mida un segmento de longitud mayor que 2 pulgadas pero menor que 3 pulgadas y que exprese la medida en dos formas diferentes. Por ejemplo:



Medida del segmento:

$\frac{21}{8}$ pulgadas ó bien $2 + \frac{5}{8}$ que es lo mismo que $2\ \frac{5}{8}$

1. Indicar que las expresiones ... $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, 2\frac{5}{8}, \frac{21}{8}$ se llaman "fracciones"; e inducir el concepto de fracción mediante un diálogo como el siguiente:

   ¿Para qué sirven las fracciones? ¿Cómo se construye una fracción? ¿Por qué fue necesario construir fracciones para medir el papel? El diálogo debe inducir al concepto de fracción dado al inicio de este ejemplo.

2. Ahora debemos familiarizar al alumno con la terminología y el lenguaje de las fracciones. Para ello conviene explicar que:

   En la fracción, $\frac{3}{8}$, 3 se llama NUMERADOR y 8 se llama DENOMINADOR. Preguntar: ¿qué indica el numerador?, ¿qué indica el denominador?, ¿cuál es el numerador y el denominador de: $\frac{7}{8}, \frac{15}{8}, \frac{3}{4}, \frac{8}{6}$??

3. En una tabla como ésta presentar la terminología que se usa en el lenguaje de las fracciones:

Si el denominador de la fracción es:	La fracción se lee:
2	Medio
3	Tercio
4	Cuarto
5	Quinto
6	Sexto
7	Séptimo
8	Octavo
9	Noveno
10	Décimo

Ejemplos:

$\frac{5}{2}$ se lee " cinco medios"

$\frac{3}{9}$ se lee "tres novenos"

Para denominadores, mayores que 10 a la fracción se le asigna la terminación “avo”.

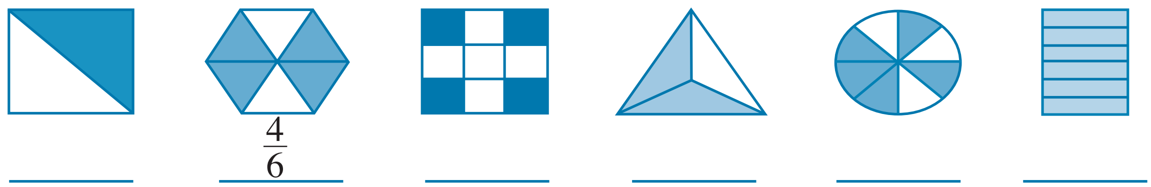
Tercera etapa: Asimilación del concepto

1. Ejercitación

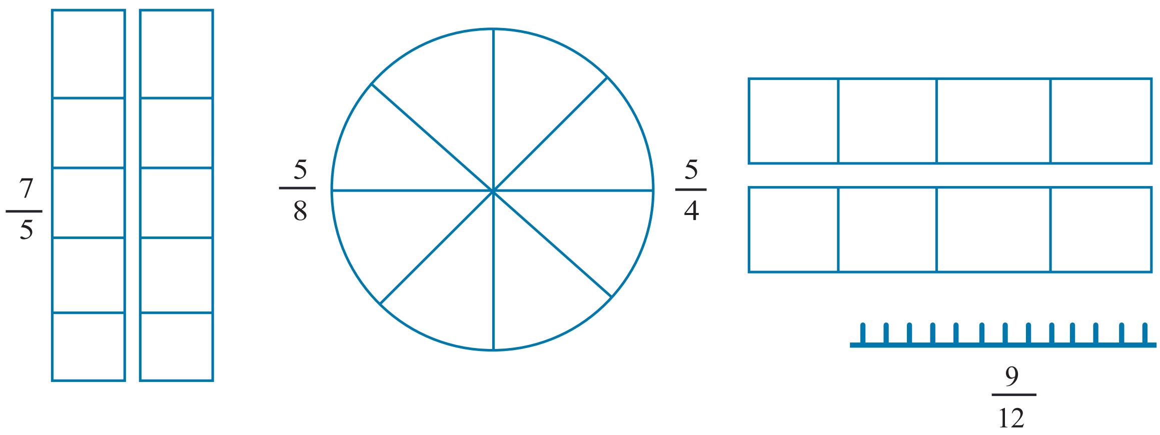
La ejercitación se puede realizar mediante actividades como las siguientes:

Escribe la medida de cada segmento como una fracción

Escribe sobre la raya que está debajo de cada figura, la fracción que representa la parte coloreada. Observa el ejemplo:



En las siguientes figuras, pinta la fracción indicada.



2. Profundización

La profundización ó realización se puede realizar mediante las siguientes actividades:

- Escribe todas las fracciones de forma a/b tales que a+b=5, a>b, $b \neq 0$.
- ¿Para qué valores de a y b se cumple que (a+b)/(a-b)= $\frac{4}{2}$

3. Sistematización

Para la sistematización ó aplicación, se sugieren las siguientes actividades:

- ¿Qué fracción del año ha transcurrido hasta el 18 de mayo?
- ¿Qué fracción de la hora son 25 minutos?
- ¿Qué fracción de un quintal es una arroba?
- ¿Qué fracción del galón son dos botellas?
- Para medir frijoles y maíz , los campesinos usan el "medio". Un medio tiene 14 libras. ¿Qué fracción de un medio representan 8 libras?
- Un millonario al morir, dona su fortuna en partes iguales a 7 instituciones. ¿Qué parte de la fortuna le corresponde a cada institución?
- ¿En qué fecha se cumplen los $\frac{7}{12}$ del año?

RESUMEN DEL CAPÍTULO:

1. La elaboración de conceptos matemáticos es una acción mental que se forma según determinadas leyes.

2. El concepto es el reflejo mental de una clase de cosas, procesos ó relaciones de la realidad ó de la conciencia, sobre la base de sus características invariables. El reflejo verbal del concepto se llama definición.

3. Desde el punto de vista psicológico, un concepto es el resultado de adiciones ó multiplicaciones lógicas.

4. El proceso de elaboración de un concepto pasa por tres etapas: consideraciones y ejercicios preparatorios, formación del concepto y asimilación del concepto.

5. De acuerdo con su naturaleza, los conceptos se clasifican en: conceptos de objetos, conceptos de relación y conceptos de operación.

6. Según su dependencia los conceptos se clasifican en superiores, colaterales y subordinales.

CUESTIONARIO EVALUATIVO:

1. Fórmese voluntariamente y en números iguales 6 grupos y cada grupo analiza los conceptos que se estudian en un determinado grado de primaria y los clasifican según su naturaleza.

2. Selecciona un concepto de los que se estudian en primaria y elabóralos siguiendo sus tres etapas.

3. Escribe las principales actividades para la etapa de formación del concepto "Raíz cuadrada".

4. Escribe las principales actividades para la etapa de asimilación del concepto "Proporcionalidad".

CAPÍTULO V

ESTRATEGIAS BÁSICAS A TOMAR EN CUENTA EN LA DEMOSTRACIÓN DE PROPOSICIONES

OBJETIVOS GENERALES:

Que los participantes en el curso de la asignatura de Didáctica de la Matemática:

1. Apliquen exitosamente las estrategias pedagógicas propias de una demostración matemática.

2. Identifiquen las leyes lógicas que rigen una demostración matemática.

3. Cultiven en sus futuros estudiantes el hábito de verificar, justificar y explicar las razones lógicas que validan el conocimiento matemático.

PRESENTACIÓN:

Una de las tareas más complicadas para el docente de matemática es organizar pedagógicamente una demostración. Si para el docente es difícil, para el alumno (a) es más complicado asimilar los nexos lógicos que la justifican si no se les presenta en forma organizada y secuencial y sobre todo, si desconoce las leyes lógicas que sustentan la demostración.

A nuestro criterio, la dificultad expuesta anteriormente es lo que ha relegado casi al olvido la demostración en la escuela. Los profesores, en la mayoría de los casos obvian la demostración y los alumnos (as) no son exigentes al respecto. De todo esto, una verdad sale a flote, la demostración es una necesidad en una clase de matemática, si estamos interesados en la formación de una cultura matemática.

Ahora bien: en una clase de matemática existen dos tipos de demostraciones, la demostración formal y la demostración no formal. La primera es aquella que parte de una conjunto de premisas llamadas hipótesis para, mediante nexos lógicos, llegar a una conclusión. La segunda es fundamentalmente intuitiva, se razona sobre situaciones particulares para generalizar en la medida de lo posible. La demostración formal sólo es posible en la escuela secundaria. La demostración no formal es una actividad que se puede y se debe realizar en primaria.

El objetivo de este capítulo es abordar ambos tipos de demostraciones y ejemplificarlas ampliamente.

CUESTIONARIO INTRODUCTORIO:

Reflexiona con tus compañeros (as) las respuestas a cada una de las siguientes preguntas:

1. ¿En qué consiste demostrar una proposición matemática?

2. ¿Cuál es la función de la demostración en la formación matemática del alumno (a)?
3. ¿Qué leyes lógicas intervienen en una demostración?
4. Un alumno mide los tres lados de un triángulo rectángulo, eleva al cuadrado estas magnitudes y descubre la relación pitagórica. Entusiasmado por su descubrimiento, repite la experiencia por otros triángulos rectángulos. ¿Podemos afirmar que ha demostrado el Teorema de Pitágoras?
5. ¿Usted cree que es necesario la demostración en primaria? ¿A partir de qué grado?
6. Explique cómo demostraría en primaria las siguientes proposiciones:
   - La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° grados.
   - La suma de dos números pares es un número par.
   - Si a ,b son números naturales entonces $(a + b)^2 \geq a^2 + b^2$

DESARROLLO DEL CAPÍTULO:

La demostración es una acción mental, una actividad del pensamiento y como tal debemos concebirla.

Los psicoanalistas han distinguidos dos maneras fundamentales de pensar: el pensamiento dirigido o inteligente y el pensamiento no dirigido que Bleuler ha propuesto llamar autístico.

El pensamiento dirigido es consciente, es decir, persigue fines que están presentes en el espíritu del que piensa; es inteligente en el sentido que se adapta a la realidad sobre la que se pretende actuar; es susceptible de verdad o error y es comunicable por el lenguaje. Este pensamiento obedece cada vez más a las leyes de la lógica. La acción mental DEMOSTRAR corresponde a esta manera de pensar.

El pensamiento dirigido es socializado, lo que permite proceder cada vez más por concepto, gracias al lenguaje que enlaza el pensamiento a las palabras.

Se ha estimado aproximadamente la edad de 12 años como la edad en que aparece el pensamiento formal. Se llama pensamiento formal al pensamiento que se refiere a hipótesis y se limita a ver si las conclusiones extraídas de esas hipótesis son justificables o no desde el punto de vista de la deducción, sin recurrir a lo real o concreto. Entre los 7 y los 12 años la demostración debe ceñirse en mayor o menor grado a las características del pensamiento egocéntrico[1]. ¿A qué se le llama pensamiento egocéntrico? ¿Cuáles son sus características?

Se llama pensamiento egocéntrico al pensamiento que busca la adaptación a la realidad, pero sin comunicarse como tal. Las características de este pensamiento son:

1. El pensamiento egocéntrico es más intuitivo que deductivo. El razonamiento no está explicitado. El juicio va en un salto único de la premisa a la conclusión.

[1] Jean Piaget. De la lógica infantil a la lógica del adolescente. Editorial Paidós. -1960

2. Mantiene una visión de conjunto y totalidad de la situación, acompañado de un estado de esencias y seguridad. Insiste muy poco en la demostración.

3. Usa esquemas personales de analogía.

4. Las esquemas visuales desempeñan un gran papel, llegando a ocupar el lugar de demostraciones y sirviendo de soporte a la deducción.

5. Los juicios de valor personal influyen mucho más que el pensamiento comunicable.

Otro aspecto a tomar en cuenta en el aspecto mental de la demostración, es el papel que juega la lógica de las relaciones. La capacidad de razonar lógicamente está subordinada a la capacidad de manejar la lógica de las relaciones. En matemática, generalmente razonamos sobre casos singulares, pero al construir y combinar las relaciones que los diversos elementos que estos objetos presentan entre sí, generalizamos las relaciones iniciales tan completamente como sea necesario. La fecundidad del razonamiento reside en la capacidad ilimitada que tenemos de construir nuevas relaciones.

Lo anterior expuesto nos proporciona pautas a seguir en el trabajo relacionado con la demostración. Entre estas pautas tenemos:

1. El desarrollo mental de un niño de primaria no permite la demostración formal en este nivel. Esto no significa que no debamos realizar demostraciones en este nivel; sí debemos realizarlas, y con mucho frecuencia, pero respetando las características ya mencionadas del pensamiento egocéntrico.

2. La demostración formal debemos dejarla para la escuela secundaria. En este nivel es una necesidad demostrar formalmente.

3. La esencia de una demostración radica en la lógica de las relaciones. El objetivo de una demostración es estimular la capacidad de obtener y establecer relaciones.

Dada la importancia de las demostraciones que cobran en una clase de matemática, dedicaremos el resto del capítulo a presentar los métodos y estrategias a seguir en una demostración, sea esta formal o no formal.

LEYES LÓGICAS QUE VALIDAN UNA DEMOSTRACIÓN:

La materia prima de las demostraciones son las proposiciones. Desde el punto de vista lógico, una proposición es una expresión que tiene la propiedad de ser verdadera o falsa, pero no verdadera y falsa simultáneamente. Son ejemplos de proposiciones:

- El 2 es número primo ... verdadero
- El cuadrado de cualquier número real diferente de cero es positivo ... verdadero
- Todo número primo es impar ... falso

En matemática, las proposiciones que aceptamos como verdaderas sin exigir demostraciones algunas se les llama "Axiomas". Por ejemplo: "tres puntos no coolineales determinan un plano". Toda teoría matemática posee como base un sistema de axiomas; las proposiciones que no pertenecen al cuerpo de axiomas debe ser demostrada como verdadera para que pasen a formar parte de la asignatura. A este proceso mental es lo que se le llama DEMOSTRACIÓN.

Según las proposiciones se refieran a objetos particulares, a varios objetos o a la totalidad de objetos del universo, estas se clasifican en:

Proposiciones únicas: 13 es un número primo pero 4 no es primo

Proposiciones existenciales: Existen rectángulos que son cuadrados.
Algunos números naturales son primos

Proposiciones Universales: Todo número par es divisible por 2.

Además de las proposiciones existen las formas preposicionales, éstas son expresiones aseverativas que contienen al menos una variable; por ejemplo: "x es mayor que 5". De forma proporcional pueden obtenerse proposiciones sustituyendo las variables por elementos del dominio básico.

Formas preposicionales que dan origen a una proposición verdadera cualquiera sea el valor de las variables, se llaman **formas preposicionales válidas o identidades.** Por ejemplo:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Proposiciones y formas preposicionales se juntan en el concepto "expresión".

Ahora estamos en capacidad de definir lo que entenderemos por DEMOSTRACIÓN.

Una demostración es una cadena finita de proposiciones verdaderas, que se obtienen con ayudas de reglas de inferencia lógica. El punto de partida de esta cadena son proposiciones cuya verdad es conocida. El punto final de la cadena es la proposición a demostrar. Cada miembro de la cadena se obtiene del miembro anterior mediante reglas de inferencia.

A estas reglas e inferencia es lo que llamamos "leyes lógicas que validan una demostración".

La siguiente tabla presenta las principales leyes de inferencia que se aplican en las demostraciones:

NOMBRE DE LA LEY	FORMA Y CONTENIDO DE LA LEY	EJEMPLO
Inferencia de una implicación	Si la proposición "Si A entonces B" es verdadera, y además A es verdadera, entonces concluimos que B es verdadera.	- Si la cifra de las unidades de un número natural es par, entonces el número es par. - La cifra de las unidades de 1846 es par. Conclusión: 1846 es par.

NOMBRE DE LA LEY	FORMA Y CONTENIDO DE LA LEY	EJEMPLO
Inferencia de una conjunción	Si la proposición "A y B verdadera y sabemos que A es verdadera , concluimos B. Si sabemos que B es verdadera, concluimos A.	- El dos es primo y es par. - El dos es primo. Conclusión: es par. - El triángulo equilátero tiene tres lados congruentes.
Inferencia de una conjunción Inferencia de una negación Modus tollendus tollens	Si sabemos que A es verdadera y B es verdadera; concluimos que A y B es verdadera. La negación de una negación conduce a la proposición original. Si la proposición "Si A entonces B" es verdadera y la negación de B es verdadera entonces concluimos la negación de A.	- El triángulo equilátero tiene tres ángulos congruentes. Conclusión: El triángulo equilátero tiene tres lados y tres ángulos congruentes. No es cierto que el 4 no es par. Conclusión: El 4 es par. -Si $\sqrt{2}$ es un número racional entonces $\sqrt{2}$ se puede escribir como una fracción. Conclusión: $\sqrt{2}$ no es racional.
Regla de contraposición	Si la proposición "Si A entonces B" es verdadera, concluimos que "Si no B entonces no A" es verdadera.	De la proposición "si el triángulo es equilátero entonces es isósceles" concluimos que "si el triángulo no es isósceles entonces no es equilátero".
Regla de transitividad	Si la proposición "Si A entonces B" es verdadera y la proposición "si B entonces C" es verdadera; concluimos que "Si A entonces C" es verdadera.	Si el 20 es par entonces es múltiplo de 2, si es múltiplo de 2 entonces es divisible por 2. Conclusión: Si el 20 es par entonces es divisible por 2.

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN:

En términos generales, el método de demostración depende de las leyes lógicas o la estrategia que predomine en la demostración. En este capítulo describiremos los cuatro métodos de demostración más comunes, a saber: la demostración directa, la demostración indirecta, la demostración por construcción y la demostración por inducción matemática. Describamos cada una de ellas.

La demostración directa. En este método las leyes lógicas que predominan son: la inferencia de una implicación y la regla de transibilidad.

La esencia de la demostración consiste en suponer o aceptar como verdadero un conjunto de proposiciones iniciales llamadas premisas para concluir la proposición llamada tesis. El conjunto de premisas forman lo que se llama la hipótesis.

La forma de la demostración directa la presentamos en la siguiente tabla:

Necesitamos demostrar la proposición “Si P entonces S”.

El esquema de la demostración es el siguiente:

Sabemos que la proposición...	Del marco teórico obtenemos la proposición...	Para construir la proposición	Por la ley inferencia de una implicación	Concluimos que
“p”: es verdadera (Hipótesis)	“q”: verdadera por ser del marco teórico.	$p \Rightarrow q$: verdadera . (si p entonces q)	$p \Rightarrow q$: verdadera	q es verdadera
q: es verdadera. La obtuvimos de una ley.	r: verdadera	$q \Rightarrow r$ (Si q entonces r)	$q \Rightarrow r$	r

... Continuamos la inferencia hasta obtener la proposición s como conclusión.

De los razonamientos anteriores sabemos que:

$$p \Rightarrow q \Rightarrow r \ldots \Rightarrow s$$

Por la ley de transitividad tenemos: $p \Rightarrow s$

Como p es verdadera p ... concluimos s. Conclusión lógica válida.

La demostración indirecta se basa en la ley de inferencia “modus tollendus tollens”.
La teoría consiste en:

1) Escribir la proposición en la forma “si p entonces q”
2) Asumir que q es falsa
3) Del marco teórico obtenemos proposiciones que generan una contradicción.
4) Del paso (3) concluimos $\sim q$ como verdadera.
5) Por la ley Modus Tollendus Tollen concluimos $\sim p$.
6) Puesto que $\sim q \Rightarrow \sim p$ es verdadera, concluimos como válida la proposición $p \Rightarrow q$.

La demostración de construcción consiste en construir un diagrama o una estructura matemática, donde la proposición cumpla con su tesis y su hipótesis.

La demostración, por inducción matemática, es propia de la educación matemática universitaria y comprende los siguientes pasos.

- Demostrar que la proposición es verdadera para $n = 1$.
- Suponer que la proposición es verdadera para algún $K > 1$.
- Demostrar que es verdadera para $K + 1$.

En este capítulo centraremos nuestra atención a los primeros tres métodos.

ESTRATEGIAS PEDAGÓGICAS BÁSICAS PARA UNA DEMOSTRACIÓN

Primera Estrategia: Motivar previamente la demostración

Esta estrategia consiste en poner al alumno (a) frente a una situación en la cual él descubra o al menos sospeche la existencia de la proposición que necesitamos demostrar. Tal situación se puede construir, entre muchas formas: generando una contradicción aparente, induciendo la sospecha de una posible ley, formulando una pregunta interesante ... Veamos algunos ejemplos:

Indique al alumno que efectúe los cálculos indicados en la siguiente tabla. (Puede usar su calculadora)

SUME	CALCULE EL PRODUCTO
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 =$	$\frac{5 \bullet (5+1)}{2}$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 =$	$\frac{9 \bullet (9+1)}{2}$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots + 20 =$	$\frac{20 \bullet (20+1)}{2}$

Preguntas: ¿Cómo calcular el total de $1 + 2 + 3$ ..... 500 sin efectuar la suma?

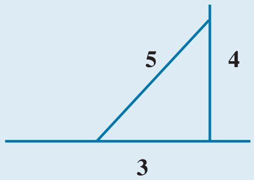
¿Cómo calcular el total de $1 + 2 + 3 + \ldots n$?

¿Será cierto que para cualquier número natural **n** se cumple que

$1 + 2 + 3 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$

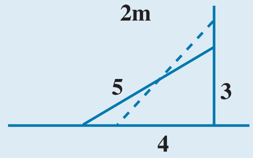
La actividad anterior induce la siguiente proposición: si **n** es un número natural entonces
$1 + 2 + 3 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$

Esta es una escalera de 5 mts. la longitud apoyada sobre una pared a una altura de 4m.



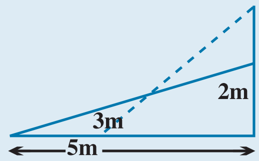
El teorema de Pitágoras confirma que $5^2 = 4^2 + 3^2$

Si la escalera se desliza 1 m sobre la pared, lógico es que se deslice 1 m sobre el suelo.



El teorema sigue siendo válido (confírmalo)

Si la escalera se deslizara 2m sobre la pared, lógico es pensar que debe deslizarse 2m sobre el suelo.



Pero ahora el teorema de Pitágoras no funciona. ¿Por qué?

¿Qué proposiciones estamos induciendo en esta actividad?

Teoremas como el teorema de Pitágoras, el teorema de Tales, los teoremas relacionados con los ángulos interiores de un triángulo, etc., se pueden inducir por mediciones. La esencia de esta técnica es la generalización de situaciones particulares.

Después de trabajar con los números racionales podemos preguntarnos: ¿Es $\sqrt{2}$ un número racional? Esta pregunta es una buena forma de empezar para inducir la proposición "$\sqrt{2}$ no es un número racional".

Segunda estrategia:

Explicar, mediante la ejemplificación el espíritu, o sea la esencia de la proposición que necesitamos demostrar.

Supongamos que estamos interesados en demostrar: "para todo par de número naturales a , b se cumple que $(a + b)^2 \geq a^2 + b^2$", lo más indicado es ejemplificar la proposición con una tabla como ésta:

Números	$(a + b)^2$	$a^2 + b^2$	Conclusión
a = 2 b = 3	$(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$	$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$	$(a + b)^2 > 2^2 + 3^2$
a = 5 b = 7	$(5 + 7)^2 = 122 = 144$	$5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$	$(5 + 7)^2 > 5^2 + 7^2$

Tercera estrategia:

Asegurarse que el alumno (a) domina el marco teórico donde está ubicada la proposición. Esto significa que, antes de realizar la demostración, el alumno (a) debe ser capaz de inferir del marco teórico la consecuencia inmediata de una proposición conocida. Por ejemplo: de la proposición "12 es par", ¿qué se puede inferir? Entre muchas inferencias tenemos:

Si 12 es par, doce es múltiplo de 2.

- Si 12 es múltiplo de 2, 12 = 2n (donde n es natural)

- Si 12 = 2n, doce es divisible por 2.

La actividad mental de inferir proposiciones del marco teórico es algo que se cultiva, y lo más recomendable es hacerlo justo en el momento en que construimos con el alumno el marco teórico. Desde esta perspectiva, la demostración de una proposición no debe ser una actividad eventual y transitoria en la clase, sino una acción debidamente planificada desde el inicio del curso escolar.

Cuarta estrategia:

Escribir la proposición en la forma condicional "si ... entonces" para identificar las premisas de la hipótesis y la tesis. Por ejemplo, consideremos la proposición: "Para todo número natural múltiplo de tres se cumple que la suma de las cifras de dicho número es múltiplo de 3". Esta proposición, para su demostración debemos escribirla así:

"Si un número natural es múltiplo de 3, entonces la suma de sus cifras es múltiplo de 3".
La hipótesis es: "el número es múltiplo de 3".
La tesis es: "La suma de sus cifras es múltiplo de 3".

Quinta estrategia:

Describir superficialmente el método de la demostración, para que el alumno (a) esté consciente de las inferencias que se van obteniendo en el proceso.

A continuación aplicaremos todo el marco teórico que hemos explicado en la demostración de proposiciones sencillas.

Ejemplo: Demostrar la siguiente proposición.

"La suma de dos números múltiplos de K es un múltiplo de K donde K es un número natural".

Primero: Motivemos la existencia de la proposición con ejercicios como los siguientes:

Indicar al alumno (a) que:

- Escriba dos múltiplos de 3 y los sume. ¿Es la suma múltiplo de 3?
- Escriba dos múltiplos de 5 y los sume. ¿Es la suma múltiplo de 5?

Repetir la experiencia tantas veces como sea necesario hasta cuando el estudiante intuya la proposición.

Formular las siguientes preguntas: si sumamos dos múltiplos de 15, ¿qué propiedad se supone tiene la suma? ¿Cómo generalizamos lo que está ocurriendo? Escriba en la pizarra todo lo que los alumnos opinen.

Segundo: Conducir u orientar a los alumnos (as) para que formulen la proposición en la forma "si...entonces".

"Si n_1 y n_2 son números naturales múltiplos de K entonces $n_1 + n_2$ es múltiplo de K"

La hipótesis que aceptamos como verdadera es: n_1 y n_2 son múltiplos de K.

La tesis que debemos validar es: $n_1 + n_2$ es múltiplo de K.

Tercero: recordar el marco teórico. ¿Qué se infiere de los términos múltiplos?

Conducir un diálogo, con ejemplos numéricos si es necesario, hasta cuando los alumnos concluyan que:

Si "a" es múltiplo de "b" entonces existe un número "c" tal que a = b . c

Cuarto: Explicar el procedimiento de la demostración.

En este momento explicamos que tomaremos dos números múltiplos de K, los sumaremos y el resultado debe ser un múltiplo de K.

Quinto: Proceder a la demostración, para ello conviene un esquema como el siguiente:

(Demostración Directa)

Sabemos que:	Por definición de múltiplo existen números naturales p y p_1 tales que:	Sumamos $n_1 + n_2$	Por la propiedad distributiva.	La suma de dos números naturales es otro número natural.	Por lo tanto	Por definición de múltiplo
n es múltiplo de K n_1 es múltiplo de k	$n = k \cdot p$ $n_1 = k \cdot p_1$	$n + n_1 = kp + kp_1$	$n + n_1 = K(p+p_1)$	$p + p_1 = p_2$ p_2 natural	$n + n_1 = kp_2$	$n + n_1$ es un múltiplo de k.

Por la propiedad transitiva

Si n . n_1 son múltiplos de k entonces $n + n_1$ es múltiplo de k.

Ejemplo2: Muchas proposiciones que el (la) alumno (a) considera verdadera se puede demostrar que son falsas mediante un contraejemplo.

Desde la perspectiva lógica, un contraejemplo de una proposición "si p entonces q" es una proposición verdadera ~ q tal que p ^ ~ q es verdadera. Demostrado que P ^ ~ q es verdadera, concluimos que: "si p entonces q" es falsa. Ejemplos de estas proposiciones son:

Si un número es primo entonces es impar.

p: un número primo
q: un número impar
~ q: el 2 es par

$\Big\}$ P ^ ~ q: El 2 es primo y es par... (verdadero)

Conclusión: La proposición "si un número es primo entonces es impar" ... es falsa.

Similarmente, se procede para demostrar la falsedad de: "Todos los números impares son primos".

Ejemplo 3: Demostrar la siguiente proposición: "Existe un único número real llamado cero (denotado 0) tal que a + 0 = 0 + a = a.

Este es uno de los muchos teoremas llamados de unicidad. Lo que se quiere demostrar es que el elemento es único, que no hay dos elementos que satisfacen la tesis. La mayoría de estos teoremas se demuestran por contradicción.

Primero: Motivar la demostración.

La mayoría de los docentes y estudiantes no le dan importancia a la propiedad del elemento neutro de ser único. La siguiente experiencia lo sacará del error.

Indique al alumno que, por un momento, suponga que existen dos neutros, manteniendo inalterable el resto de leyes de la estructura. Sean 0 y 1 estos neutros para la adición, entonces:

Por este camino, sólo tendríamos dos números en la estructura; 0, 1 que además son neutros.

Ahora bien: ¿Quién nos asegura que el neutro es único? He aquí la necesidad de su demostración.

Segundo: Escribir la proposición en la forma "Si... entonces".

"Si el cero es neutro entonces es único".

p: el cero es neutro (verdadero)
q: es único: por demostrar)

Tercero: Proceder a la demostración.

Neguemos q: el cero no es el único neutro, por tanto, existe al menos dos neutro. Sean 0 y 1 idénticos, tal que 0 ≠ 1.

(1) Dado que el 0 es neutro, para cualquier número a se cumple que a + 0 = a

(2) Puesto que el uno es neutro, se cumple que .... a + 1 = a

De (1) y (2) concluimos que 0 + a = 1 + a (ambos son a)
Cancelando el número a nos queda: 0 = 1. Esto es una contradicción con el marco teórico.
Conclusión: el cero es único.

Ejemplo: Demostrar la proposición: "si n es cualquier número natural, entonces

$$1 + 2 + 3 \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

La motivación de la existencia de este proposición ya la hicimos en las páginas anteriores.

Esta proposición se puede demostrar al menos por dos métodos: inducción matemática y construcción. Aquí la haremos por construcción.

Debemos, antes de realizar la demostración explicar al alumno (a) en qué consiste este tipo de demostración y sobre todo, explicar el marco teórico en el cual se fundamenta la demostración.

La demostración se fundamenta en los siguientes conceptos:

Antecesor de un número natural. El antecesor de un número natural "n" es el número inmediatamente anterior a él. Por ejemplo: el antecesor de 10 es 9, el antecesor a 15 es 14. En general, el antecesor a n es n - 1, el antecesor a n - 1 es n - 2, el antecesor a n - 2 es n - 3

La suma de n veces un número es n multiplicado por dicho número, por ejemplo:

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \times 4 \; ; \qquad a + a + a + a + a = 5a$$

El siguiente paso es ensayar el procedimiento de la demostración con números. Podemos, por ejemplo, ensayar con n = 10; sea S la suma.

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$
$$S = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \text{ (la misma suma)}$$
$$2S = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 \text{ (10 veces 11)}$$
$$2S = 10 \,.\, 11 \Rightarrow S = \qquad \text{como } n = 10,\ S = \frac{n \bullet (n+1)}{2}$$

Los ejercicios anteriores deben repetirse hasta cuando el alumno (a) intuya la estructura de la demostración.

El último paso es darle al estudiante la oportunidad de que generalice. Esto es precisamente la demostración.

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots\ldots\, n$$
$$S = n + n\text{-}1 + n\text{-}2 + n\text{-}3 + n\text{-}4 \ldots\ldots\ldots\, 1$$

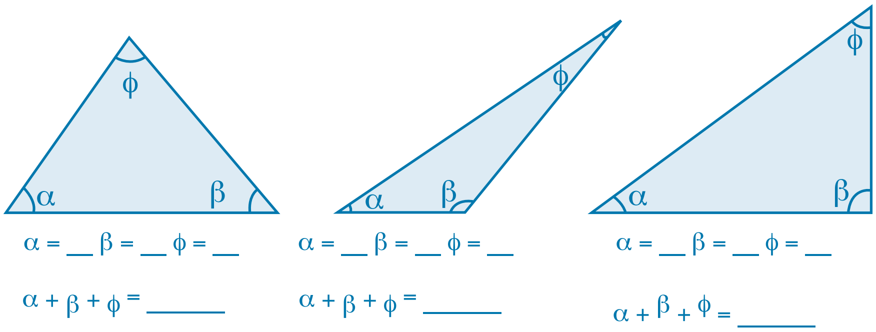
$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1) \ldots \qquad \text{(n veces n + 1)}$$

$$2S = n \,.\, (n + 1) \Rightarrow S = \frac{n \bullet (n+1)}{2}$$

Ejemplo 4: Demostrar la siguiente proposición: “La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180^0”

Primero: Motivar la existencia de la proposición con ejercicios como los siguientes:

Indique al alumno (a) que, con un transportador, mida los ángulos interiores de los siguientes triángulos. Tenga el cuidado de denotar los ángulos con α, β, ϕ.



Inducir mediante preguntas, la existencia de la proposición. ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos interiores en cada triángulo? .... ¿Tiene relación este resultado con la forma del triángulo?... ¿Qué podemos afirmar de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo?

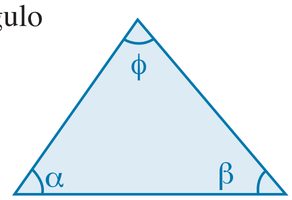
Segundo: Con la participación de los alumnos concluir que:

“Parece ser que la suma de los ángulos ....? (Esto es lo que debemos de probar)

Tercero: Escribir la proposición en la forma “Si ..... entonces”:

Conviene auxiliarse de una gráfica.

Si α, β, ϕ son ángulos interiores de un triángulo
Entonces $\alpha + \beta + \phi = 180^o$

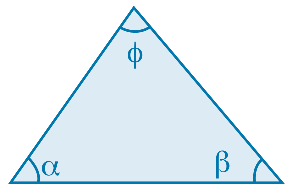


Cuarto: Escoger el método de demostración. En primaria, la demostración se puede hacer por construcción; en secundaria, por demostración directa. Si se hace por construcción, lo único que debe recordar el estudiante es que el ángulo llano mide 180^o. Si se hace por demostración directa se debe recordar que: ángulos correspondientes entre paralelas son congruentes y ángulos opuestos por el vértice (ángulos verticales) son congruentes. En ambos casos se debe recordar el marco teórico.

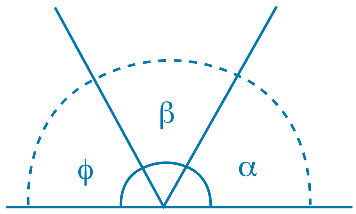
Quinto: Proceder a la demostración.

A: Por construcción:

Indicar a los alumnos que dibujen un triángulo así....



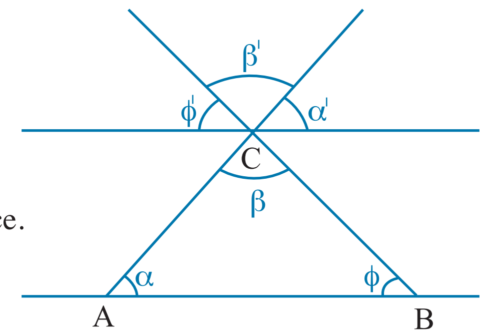
recorten los ángulos α, β y los peguen junto a ϕ así:



Se ve que la suma de las medidas de los tres ángulos forman un ángulo llano; esto es 180º.

B: Demostración Directa:

Indicar a los alumnos (as) que por el punto "c" trace una paralela al segmento AB entonces...



ϕ es congruente con ϕ'
α es congruente con α'

β es congruente con β'... por ser opuesto por el vértice.

Como ϕ', α' , β' = 180º entonces α, β, ϕ = 180º.

Ejemplo 5:

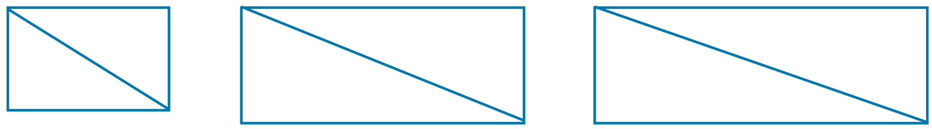
Demostrar la siguiente proposición: "El área A de un rectángulo que mide de base b unidades y altura h unidades se calcula mediante la fórmula". $A = \frac{b \bullet h}{2}$

Primero: Motivar la existencia de la proposición.

Esta es una proposición propia de la escuela primaria por tanto, partimos de que el alumno (a) desconoce la proposición y sólo puede calcular áreas de rectángulos. Además conoce los conceptos de base y altura de un triángulo.

Una forma de motivar al alumno (a) para que descubra la existencia de la proposición, es indicarle que calcule el área de los siguientes triángulos a partir del área del rectángulo.

El estudiante debe recordar que la diagonal divide el rectángulo en dos triángulos congruentes. Incluso el alumno puede cortar los triángulos y verificar la propiedad por superposición.



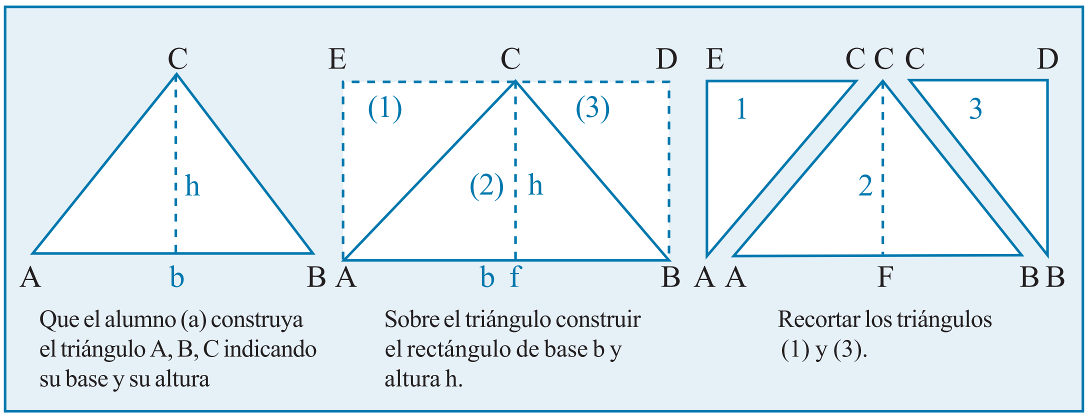
Al realizar la actividad anterior, el alumno (a) debe "descubrir" que la altura y la base del triángulo coinciden con la altura y la base del rectángulo. $A = \dfrac{b \bullet h}{2}$ El objetivo es que el estudiante sospeche que el área A del triángulo de altura h y base b es:

Segundo: Formular la proposición.

"Si b es la base de un triángulo y h es su altura, entonces el área $A = \dfrac{b \bullet h}{2}$

Tercero: Demostrar la proposición para un triángulo rectángulo.

Sugerimos los siguientes pasos:

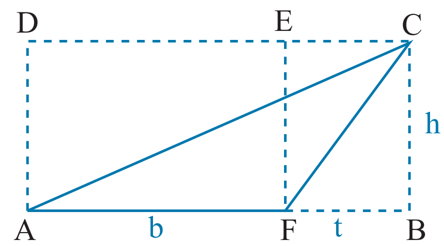


Finalmente indicar al alumno (a) que superponga los triángulos (1) y (3) sobre el triángulo (2) hasta cuando coincidan.

Mediante un diálogo debidamente dirigido, el estudiante debe concluir que el área del rectángulo es el doble del área del triángulo y por lo tanto, el área A del triángulo es $A = \dfrac{b \bullet h}{2}$

El tercer paso es una demostración por construcción, pero a nivel concreto. El cuarto y último paso es una demostración por construcción, pero a nivel abstracto. Para ello se procede así:

1. Se le presenta al estudiante una figura como ésta y mediante preguntas conducimos al alumno a las siguientes conclusiones:



2. El área A del triángulo AFC es:

A = Area del triángulo ABC - Area del triángulo FBC

$$A = \frac{(b + t) \bullet h}{2} - \frac{t \bullet h}{2} = \frac{b \bullet h + t \bullet h}{2} - \frac{t \bullet h}{2} = \frac{b \bullet h}{2} + \frac{t \bullet h}{2} - \frac{t \bullet h}{2} \Rightarrow A = \frac{b \bullet h}{2}$$

ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LA DEMOSTRACIÓN NO FORMAL

Llamaremos demostración no formal a las justificaciones, comprobaciones o validaciones que se hacen de las proposiciones que, sin llegar a ser verdaderas demostraciones, abren el camino a la demostración formal. El objetivo de la demostración no formal es crear en el alumno (a) el hábito de justificar, comprobar o verificar el conocimiento matemático. Esta “demostración” es propia en la escuela primaria.

Expresiones como “sumar llevando”, “restar prestando”, “cero como guardador de lugar” etc. Necesitan y merecen una demostración. Estos son algunos ejemplos de proposiciones que en primaria pueden ser sometidas a una demostración no formal.

Ejemplo 1: El producto de 2 números positivos menores que 1 es menos que cualquiera de sus factores.

Ejemplo 2: Para sumar números fraccionarios que tienen distinto denominador debemos reducirlos a un común denominador. En otras palabras.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \neq \frac{1 + 2 + 3}{2 + 3 + 4} \; ?$$

Ejemplo 3: ¿Cómo se obtiene el valor de $\pi = 3.1416$?

Ejemplo 4: ¿Por qué el área del trapecio es $\frac{(B + b) \bullet h}{2}$ donde B es la base mayor, b la base menor y h la altura?

Ejemplo 5: ¿Cuál es el valor límite a la que se acerca una fracción propia cuando le sumamos la misma cantidad al numerador y al denominador?

Ejemplo 6: ¿Por qué $\frac{1}{2} \bullet 2 = 1 \qquad 3 \bullet \frac{1}{3} = 1 \qquad n \bullet \frac{1}{n} = 1$?

Ejemplo 7: ¿Qué condiciones debe satisfacer el denominador de una fracción, para que su forma decimal sea finita no periódica?

A continuación intentaremos demostrar algunas de estas proposiciones.

Ejemplo 1: Demostrar la siguiente proposición: "El producto de dos números positivos menores que 1 es menor que cualquiera de sus factores".

Demostración:- obviamente el primer paso es que el alumno "descubra"la proposición. Para ello, se le presenta al alumno (a) diferentes productos indicados para que los calculen y compare el producto con los factores.

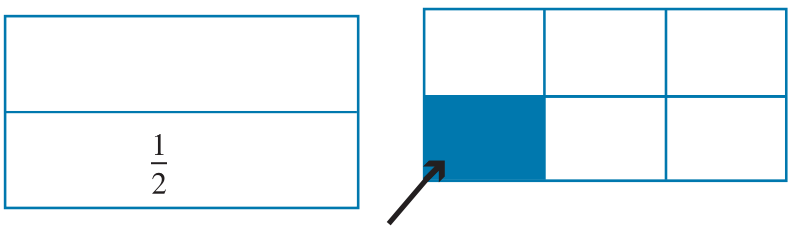
$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \_\_\_\_\_\_ \qquad \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} = \_\_\_\_\_\_ \qquad \frac{5}{11}\cdot\frac{3}{7} = \_\_\_\_\_\_$$

Una vez que se ha "descubierto" lo que ocurre, se formula la siguiente pregunta. ¿Ocurrirá lo mismo con otros productos? ¿Por qué cuando multiplicamos dos números menores que 1 el producto es menor que sus factores?

Después de que se deja que los estudiantes expongan sus criterios, recordamos el concepto de producto.

"Multiplicar un número <u>a</u> por un número <u>b</u> es tomar <u>a</u>, b veces".

Según la definición, cuando multiplicamos 1/2 por 1/3 lo que estamos haciendo es:



Tomando $\frac{1}{3}$ Razón por la cual $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

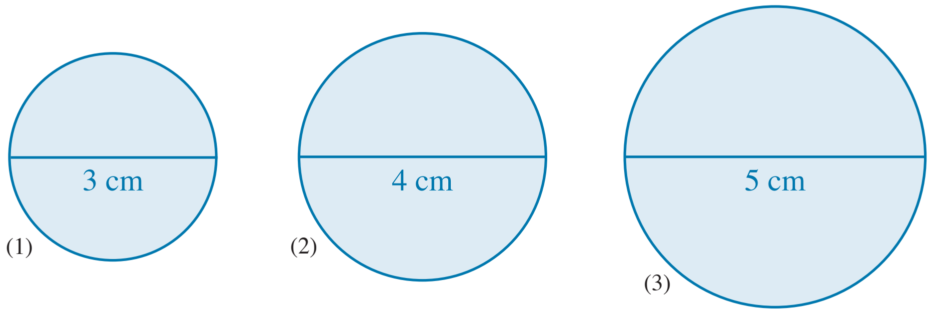
La razón por la cual cuando multiplicamos por un número menor que uno por otros también menor que 1 el producto es menor que sus factores, es que del número sólo estamos tomando una parte.

Como podemos ver, esto es una explicación lógica, no una demostración. Por eso se le llama demostración no formal.

Ejemplo 2: ¿De dónde obtenemos el valor de $\pi = 3.1416$?

En el nivel de primaria podemos hacer lo siguiente:

Le proporcionamos al alumno (a) círculos de cartulinas con diámetros conocidos.



Le pedimos que complete la siguiente tabla, después de medir la longitud de la circunferencia en cada círculo.

Círculo Nº	**(1)**	**(2)**	**(3)**
***Longitud de Diámetro:* D**			
***Longitud de la Circunferencia:* C**			
$\dfrac{\textit{Longitud de } \mathbf{C}}{\textit{Longitud de } \mathbf{D}}$			

Si las medidas están normalmente correctas, el estudiante observará que el cociente es siempre 3:1... A este cociente se le llama π y se le ha asignado un valor aproximado de 3.1416.

Nuevamente la pregunta: ¿De donde obtenemos el valor de π? Dejemos que el alumno (a) llegue por sí solo a la respuesta.

RESUMEN DEL CAPÍTULO:

En este capítulo aprendimos que:

1. La demostración es una acción mental. Esta acción corresponde al pensamiento dirigido y consiente.

2. La demostración formal solo es posible en la Escuela secundaria, porque es hasta la edad de los 12 años cuando aparece el pensamiento formal en el niño (a).

3. En primaria priva el pensamiento egocéntrico, por tanto debemos recurrir a la demostración no formal. Esto es, a la comprobación, la verificación, la explicación, etc.

4. La demostración no formal es una necesidad en primaria para cultivar el hábito de la demostración e indicarlo en la lógica de las relaciones.

5. Los métodos de demostración formal más conocidos en matemática son: la demostración directa, la demostración indirecta, la demostración por construcción y la demostración por inducción matemática.

6. Las principales estrategias para seguir en una demostración son:

   - Motivar previamente el "descubrimiento" de la proposición que se quiere demostrar.
   - Explicar, mediante la ejemplificación, el espíritu o el contenido de la proposición.
   - Asegurar en el alumno (a) el dominio del marco teórico.
   - Escribir la proposición en la forma "Si ... entonces" para identificar la hipótesis t, la tesis.
   - Auxiliares de gráficos, esquemas, dibujos etc, cuando sea necesario.
   - Descubrir superficialmente el procedimiento de la demostración.

CUESTIONARIO EVALUATIVO:

1. Seleccione dos proposiciones matemáticas y demuéstrelas aplicando las estrategias dadas en el capítulo.

2. Escriba en la forma "Si ... entonces" las siguientes proposiciones y demuéstrelas indicando el método que usó, el marco teórico y las estrategias que empleó:

   2.1 El producto de dos número impares es un número impar.

   2.2 La suma de dos números impares es un número par.

   2.3 Para cualquier par de números reales a, b si a.b = 0 entonces a = 0 y b = 0

   2.4 El producto de dos número negativos es un número negativo.

3. Escribe un contraejemplo que demuestre que las siguientes proposiciones son falsas:

   3.1 Todos los números múltiplos de 3 son impares.

   3.2 El producto de dos números positivos es mayor que cualquiera de sus factores.

   3.3 Si dos ángulos son congruentes entonces son opuestos por el vértice.

4. Demuestre por construcción las siguientes proposiciones:

   4.1 Para todo par de números reales a, b se cumple que $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$

   4.2 Si a, b, x son números reales entonces $(a + x)\,(b + x) = x^2 + a\,x + b\,x + a\,b$

CAPÍTULO VI

METODOLOGÍA
PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

OBJETIVOS GENERALES:

Son objetivos generales de esta unidad, que los alumnos (as) de didáctica de las matemáticas.

1. Conozcan las diferencias conceptuales entre el término ejercicio y el término problema.

2. Analicen las distintas concepciones teóricas que existen en relación con los métodos y procedimientos que deben aplicarse a la resolución de problemas.

3. Motiven a sus alumnos (as) a resolver problemas, proporcionándole las técnicas que se requieren para abordar exitosamente esta actividad.

PRESENTACIÓN:

Una de las actividades más fascinantes en el trabajo matemático es la resolución de problemas.

De acuerdo con Brousseau[1], desde la perspectiva constructivista, los problemas matemáticos juegan un importante papel en el aprendizaje de la matemática. ¿Qué ocurre en la escuela?

En términos generales podemos afirmar que, actualmente, la enseñanza de la matemática está fuertemente centrada en los algoritmos de las operaciones y la resolución de problemas tiende a reducirse a la aplicación de algoritmos previamente explicados y después de haber estudiado un ejemplo modelo. De esta forma, el sentido de la resolución de problemas en la escuela, tiende a ser la aplicación de las técnicas operatorias previamente enseñadas.

Quizá la explicación de esta conducta en el aula, obedezca a dos razones: primero, el concepto que la mayoría de los docentes tienen del término "Problema" y el significado que le dan a esta actividad docente. A menudo, cuando pensamos en problemas, pensamos en una situación que requiere la aplicación de determinado algoritmo, procedimiento, etc. Y la solución del mismo se reduce a explicar la aplicación de un procedimiento específico. La segunda razón, está desarrollada con los recursos pedagógicos que el docente puede poner en juego en esta actividad; tales recursos, en la mayoría de los casos, el docente no los conoce. Caben entonces las siguientes preguntas: ¿qué es resolver un problema?, ¿qué se entiende por problema?, ¿qué recursos pedagógicos deben emplearse para motivar a los alumnos (as) a resolver problemas?

En este capítulo daremos respuestas a todas estas preguntas.

[1] Brouosseau. G. Los diferentes roles del maestro. Editorial Paidós. 1994

DESARROLLO DEL CAPÍTULO:

¡REFLEXIONEMOS!

Una preocupación de pedagogos y matemáticos, ha sido la de desarrollar en los estudiantes una disposición hacia el estudio de las matemáticas.

Explique cómo la resolución de problemas puede contribuir a esta disposición.

Entre las diversas corrientes que es posible identificar en la evolución de la enseñanza de la matemática, destaca la idea de que es esencial que los estudiantes reflexionen abiertamente sobre las estrategias de solución de un problema. Haga un comentario de lo que usted piensa de esta corriente pedagógica.

Actualmente, el interés en la resolución de un problema se centra en el análisis que el alumno (a) hace en el proceso de resolución y no en el resultado. Analice las ventajas y desventajas de este punto de vista.

Un principio fundamental, al considerar la resolución de problemas en el aprendizaje de la matemática, es aceptar que no se reduce a un conjunto de reglas que puedan aplicarse en un orden determinado. ¿Está usted de acuerdo con este principio? Explique, justifique y ejemplifique su punto de vista.

A su criterio: ¿Cuál es la función de la resolución de problemas en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática?

¿Qué elementos científicos aporta la resolución de problemas al proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática?

ALGUNAS CONSIDERACIONES TEÓRICAS A TOMAR EN CUENTA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:

En los últimos veinticinco años la resolución de problemas ha sido identificada como una actividad importante en el aprendizaje de la matemática ¿Por qué? Entre muchas, identificaremos tres razones.

Primero:

La construcción del conocimiento matemático por parte del alumno, exige un ambiente estructural que motive al estudiante a participar activamente en todo el proceso. La resolución de problemas favorece y promueve este ambiente. La idea central es considerar la resolución de problemas como una forma de pensar donde el estudiante continuamente tiene que desarrollar diversas habilidades y utilizar diferentes estrategias. Ello, al final, contribuye a desarrollar una disposición hacia el estudio de la matemática, sobre todo cuando se discuten las estrategias y el significado de las soluciones.

Segundo:

Existe la necesidad real de que los estudiantes utilicen los conocimientos adquiridos en situaciones diferentes y novedosas. Una oportunidad para ello es la resolución de problemas. La simple resolución de ejercicios no satisface esta exigencia.

Tercero:

El concepto actual de "aprender matemática", como la actividad mental donde el alumno desarrolle o construya las ideas matemáticas, ubica la solución de problemas como la columna vertebral de este proceso mental. Es decir, aprender matemática es un proceso que incluye encontrar sentido a las relaciones, separarlas y analizarlas para distinguir y discutir las conexiones con otras ideas. En opinión de Schoenfeld[2]: "para que los estudiantes vean la matemática como una actividad con sentido, necesitan aprenderla en un salón de clases que sea un microcosmos de la cultura matemática". Ésta, posiblemente sea la razón pedagógica fundamental de la resolución de problemas.

Una segunda pregunta... ¿Qué es un problema?, y una última pregunta: ¿Qué entendemos por resolución de problemas?

Las respuestas a estas preguntas pasan necesariamente por la concepción que se tenga de la enseñanza de la matemática. Alrededor de los años sesenta, por ejemplo, la enseñanza de la matemática ponía énfasis en lo que se llamó matemática moderna; ésta recomendaba centrar la atención en las estructuras y el lenguaje formal de la matemática desde los niveles elementales. Otro movimiento conocido como el regreso a lo básico, le daba muchísima importancia a los procedimientos algorítmicos. El movimiento surgió como una respuesta a la deficiencia que la matemática moderna había dejado en los estudiantes. El regreso a lo básico no mejoró el aprovechamiento en los estudiantes; en efecto, había casos donde el estudiante "encontraba" respuestas a problemas cuyos datos no tenían sentido. Para muestra un ejemplo: si 6 obreros hacen una casa en 15 días ¿cuánto tiempo tardarían 6000 obreros para construir la misma casa? Una simple regla de tres nos da la respuesta 0.015 días (aproximadamente 22 minutos). ¿Tiene sentido esta respuesta?

En este contexto surge la propuesta de relacionar el aprendizaje de la matemática con la resolución de problemas.

Lo importante de estas tres concepciones radica en lo siguiente: para la matemática moderna los problemas y sus resoluciones son un recurso para aplicar el lenguaje matemático y su estructura formal. Son ejemplos de este tipo de problemas los siguientes:

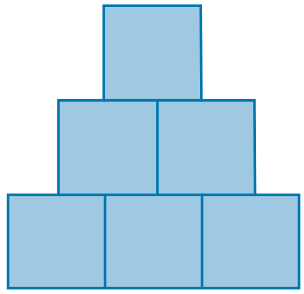
Demostrar que la suma de dos números pares es un número par: si $x * y = x^2 + y^2 - 1$ calcule el valor de $5 * 8$; demuestre que una recta y un punto que no pertenece a la recta determinan un plano, etc.

[2] Schoenfeld .- Tomado del Libro "Principios y métodos en la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas". Grupo Editorial Iberoamericano. 1997.

El regreso a lo básico aboga por problemas cuya resolución requiere la aplicación de un algoritmo previamente estudiado. A esta corriente pertenecen problemas como: Calcular al volumen de un cilindro de altura y radio conocidos. Calcular la sombra que una torre a determinada altura proyecta cuando el sol forma con el horizonte un ángulo conocido.

La tercera opción ubica el problema como un recurso pedagógico, para que el alumno descubra las relaciones que existen entre las magnitudes y generalice construyendo conceptos, modelos y procedimientos, etc. A esta corriente pertenecen problemas como los siguientes:

Un estibador hizo un arreglo de cajas como se muestra en la figura de la derecha. Cada fila tiene una caja menor que la anterior y la fila superior consta de una sola caja. Si la fila de base tiene 15 cajas ¿Cuántas cajas se usaron?



Como podemos ver, el análisis del problema conduce al modelo matemático

$$1 + 2 + 3 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sea cual fuere la corriente que impere en un momento dado, estas se ubican en una de las dos concepciones siguientes: la matemática como un cuerpo estático y acotado, y la matemática como algo dinámico con conceptos en continua expansión. Para la matemática estática, un problema es una situación que requiere de la aplicación de determinados algoritmos, procedimiento y forma de trabajo que se adquieren mediante la resolución de un "problema modelo". Para la matemática dinámica, un problema es una situación que pone a prueba la capacidad creativa del alumno (a). "Sabemos que estamos frente a un problema –dice Eduardo Mancera[3]– si no podemos saber de manera inmediata como vamos a proceder, no será posible aplicar de manera inmediata un procedimiento rutinario o una fórmula".

Un ejemplo de problema, desde la perspectiva estática, es el siguiente: Raúl ganó $75 en un trabajo, ¿cuánto dinero tendrá después de ganar $45 más? Un ejemplo de problema desde la perspectiva dinámica es el siguiente: utiliza los números 2, 4, 6, 8, 12 exactamente una vez, con las operaciones y signos de agrupación que desees, para expresar un número entero no negativo y lo más pequeño posible.

Ahora estamos en capacidad de contestar la pregunta: ¿Qué entendemos por resolver un problema? Para la matemática estática, resolver un problema es aplicar las operaciones prescritas, siguiendo determinada secuencia de pasos. De acuerdo con este punto de vista, los alumnos razonan siguiendo un procedimiento ya explicado. Desde esta perspectiva, la resolución de problemas ocupa el último lugar dentro de la estructura didáctica de la clase. En efecto, la estructura tradicional ubica en primer lugar el marco teórico, en segundo lugar los ejemplos, y en tercer lugar los ejercicios y por último los problemas, tal como lo vemos en la siguiente tabla.

[3] Saber matemática es saber resolver problemas –Eduardo Mancera– Grupo Editorial Latinoamericano. 1998

Primero: Teoría	Segundo: Ejemplo	Tercero: Ejercicio	Cuarto: Problemas
Se estudia el marco teórico. Por ejemplo: número primo es aquel que solo puede ser dividido por 1 y por el mismo.	Son números primos 2,3,5,7...	Encuentre los primos menores que 100	Encuentre todos los pares de números primos tales que la suma de sus cuadrados sea un número primo menor que 100 y su diferencia sea un número primo menor que 6.

La principal desventaja de esta concepción de "problema", radica en que cuando el docente espera un procedimiento específico en la resolución, entonces no analiza el razonamiento del alumno cuando este no es convencional.

Además, los problemas concebidos como aplicación de una teoría determinada pierden un elemento importante, el principal, en efecto, dejan de ser problemas, dado que ya se sabe como hay que intentar resolverlos. Aunque puede darse el caso de que aún así sea difícil encontrar la solución, lo cual se debería, con seguridad, a la carencia de un planteamiento adecuado, o a la falta de manipulación operativa o a la impropia interpretación de los conceptos.

Además, indicar al alumno con que operación o fórmula se resuelve el problema, evita la necesidad de que aquel busque el procedimiento, e impide a la vez que desarrolle alternativas.

La resolución de problemas, desde la perspectiva dinámica, de la matemática, parte del siguiente principio: Los medios más elaborados, como los algoritmos, adquieren sentido cuando el alumno (a) "descubre" tanto su pertinencia en un problema concreto, como las ventajas que le proporciona frente a los recursos que utilizaba antes.

Al resolver problemas, desde la perspectiva dinámica, se debe observar las siguientes recomendaciones.

- No proporcionarle al alumno información previa acerca de su solución.
- Permitir al estudiante que ensaye determinada conjetura, que rectifique errores y adopte creativamente recursos conocidos
- Aceptar la posibilidad de más de un procedimiento en su solución
- Permitir al alumno que ponga en juego todos sus conocimientos matemáticos

Al observar estas recomendaciones perseguimos lo siguiente:

- Que el alumno (a) ponga en juego todas sus habilidades y conocimientos
- Que el estudiante adquiera confianza en sí mismo

- El estudiante podrá conocer los alcances y limitaciones de su estrategia.

- El alumno apreciará la importancia del marco teórico.

- Que el alumno cuente con el espacio propicio para desarrollar sus habilidades intelectuales.

- Que el estudiante conozca la utilidad de los temas escolares.

En resumen, un punto de vista dinámico de la matemática conlleva a un ambiente de aprendizaje que tiende hacia:

- La aceptación de un salón de clase como una comunidad matemática

- El uso de la lógica y la evidencia matemática como medio de verificación, contrapuesta al ver al maestro como una sola autoridad para dar las respuestas correctas.

- El desarrollo del pensamiento matemático, es decir, no ubicar la matemática como un conjunto de fórmulas y reglas para memorizar.

- Conexión y aplicación de la matemática

Una vez analizadas las cuestiones: "¿qué es un problema?" y "¿qué se entiende por resolver un problema?" pasamos al aspecto esencial del capítulo, esto es, las estrategias pedagógicas a tomar en cuenta en la resolución de un problema. Tales estrategias las tomaremos de eminentes matemáticos y docentes que han dedicado parte de su vida profesional a investigar estos aspectos. En esta dirección, uno de los matemáticos de mayor crédito es George Polya[4] (1945), por tanto empezaremos presentando y ejemplificando su teoría al respecto.

ESTRATEGIA BÁSICA A TOMAR EN CUENTA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SEGÚN POLYA:

El trabajo de Polya empieza a llamar la atención en la manera como los "expertos" resuelven problemas, no en la forma de enseñar a plantearlos y resolverlos.

La heurística identificada por Polya se enmarca en comunicar su propia experiencia como matemático al resolver problemas. Polya compartía que las estrategias y preguntas de un experto al resolver problemas podían ser moderadas por los maestros en el salón de clase.

En el proceso de resolver problemas, Polya identifica tres etapas fundamentales en la que el uso de los métodos heurísticos juega un papel importante. A continuación identificaremos estas etapas y las ejemplificaremos.

[4] Como plantear y resolver problemas. G. Polya. Editorial Trillas. 1978

Primera etapa. Entendimiento del problema.

En esta fase se ubican las estrategias que ayudan a representar y entender las condiciones del problema. Por ejemplo: ¿cuál es la información dada en el problema?, ¿cuál es la incógnita? ¿cuáles son las condiciones que relacionan los datos en el problema? Veamos esta etapa en un ejemplo.

Problema:
Si Susana tiene \$5 más que Tomás y Tomás tiene \$2 más que Eduardo. Indique los cambios que debe hacerse entre ellos para que tengan la misma cantidad de dinero.

Corresponde a la primera etapa de Polya preguntas como las siguientes: ¿En qué consiste el problema? ¿Qué sabemos de Susana? ¿Qué sabemos de Tomás? ¿Qué sabemos de Eduardo? ¿De qué no tenemos información? ¿A cuál de ellos le asignamos la variable?

Las respuestas deben conducir, por ejemplo, a las siguientes ecuaciones: Si Eduardo tiene x: Tomás $x + 2$ y Susana tendrá $(x + 2) + 5 = x + 7$.

Segunda etapa. Diseño de un plan.

En esta etapa se recomienda pensar en problemas conocidos que tengan una estructura analógica a la del que se quiere resolver y así establecer un plan de solución. En psicología, la capacidad de establecer relaciones se identifica como un indicador de inteligencia. Es importante que, como métodos de resolución, se diferencien propiedades estructurales de características superficiales. Algunas estrategias que pueden ayudar a construir un plan de solución incluyen:

- Pensar en problemas conocidos que involucren la misma clase de incógnita pero que sea más simple.

- Simplificar el problema por medio de una transformación a casos especiales.

Para el caso de nuestro problema, parece indicado transformar el problema a un caso especial. Esto se logra dándole un valor determinado a la variable. Supongamos que Eduardo tiene \$20, Tomás tendrá \$22 y Susana \$27. Se ve claro que:

$$\frac{20+22+27}{3} = \frac{69}{3} = 23 \qquad \text{Cada uno debe tener 23.}$$

Esto es: a Eduardo se deben dar 3; a Tomás 1. ¿De donde? De los 7 de Susana.

Tercera Etapa. Ejecución del Plan.

Aquí se contemplan aspectos que ayudan a monitorear el proceso de resolución. Una idea fundamental es tratar de resolver el problema en una forma diferente y analizar o evaluar la solución obtenida. De hecho, esta etapa tiene conexión con todo lo que Polya denomina una visión retrospectiva del proceso de solución.

También es importante establecer conexiones y extensiones del problema original en otros contextos.

En el caso de nuestro problema, ya hemos ejecutado el plan. No obstante, para ejecutar el plan pudimos haber procedido así:

$$\frac{x+(x+2)+(x+7)}{3}=\frac{3x+9}{3}=x+3$$

¿Qué significa esto? Que a Eduardo le debemos dar tres, a Tomás 1 y a Susana quitarle cuatro. Esta es la respuesta.

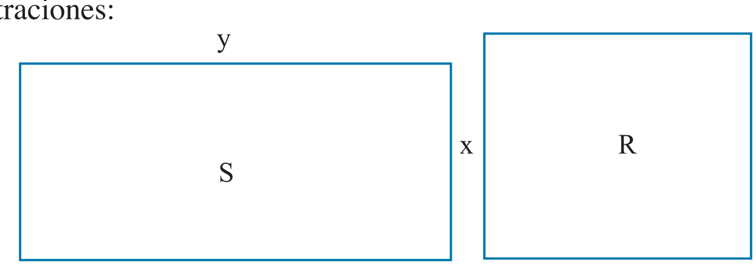
En la enseñanza de la matemática, las ideas de Polya empezaron a cobrar importancia alrededor de 1980. Las estrategias heurísticas como dibujar diagramas, considerar casos particulares y resolver problemas más simples, se consideraba como parte esencial en la instrucción matemática.

A continuación ejemplificamos la teoría de Polya en la solución de los siguientes problemas:

Problema: El largo del rectángulo S es 20% más que el largo del rectángulo R, y el ancho del rectángulo S es 20% menos que el ancho del rectángulo R. ¿Qué rectángulo tiene mayor área? ¿Qué porcentaje es mayor? ¿Tienen igual área?

Primera etapa. Entendimiento del problema.

En esta situación conviene orientar al alumno para que construya una ilustración del problema. Preguntas como las siguientes ayudan: ¿Cuántos rectángulos tenemos? ¿Qué rectángulo tiene mayor longitud? ¿Qué rectángulo es más ancho? ¿Cuánto? ¿Qué necesitamos conocer de cada rectángulo? ¿Para qué? ¿Cómo calculamos el área del rectángulo? Las respuestas deben conducir a las siguientes ilustraciones:



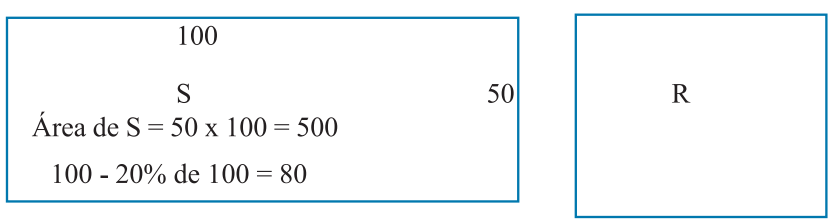
x + 20% de x = 120% de x = $\frac{120x}{100}$

y - 20% de y = 80% y = $\frac{80y}{100}$

Segunda etapa. Diseño de un plan.

Lo más indicado, en el caso, es motivar al alumno (a) para que resuelva el problema para valores particulares de x, y de tal forma que los porcentajes sean fáciles de calcular. Por ejemplo:

X = 50, Y = 100



50 + 20% de 50 = 60

100 - 20% de 100 = 80

Área de R = 60 x 80 = 480

Al repetir la experiencia con otros datos, por ejemplo: X = 20, Y = 30; X = 40, Y = 60 se descubre que el área del rectángulo S es mayor que el área del rectángulo R en un 4%.

Tercera Etapa. Ejecución del plan.

Simplemente calculamos ambas áreas.

Área de S = xy Área de R = $\frac{120x}{100} \bullet \frac{80y}{100} = \frac{96xy}{100} = 96\%$ de xy

Respuesta. El rectángulo S es 4% mayor que el área del rectángulo R.

Dos inquietudes emergen de la solución. primero: ¿Qué ocurre si en lugar del 20% trabajamos con el 10%, el 20%, el 30% ...? y segundo: ¿Podemos encontrar un patrón de comportamiento? Si profundizamos en el análisis y en los cálculos, podemos llegar a la siguiente proposición: "Si un número A lo aumentamos en un n% y un número B lo disminuimos en un n% el producto de los nuevos números es $\left(\frac{n}{10}\right)^2\%$ menos que el producto de los números originales". En esto radica el poder de la heurística.

Ahora, el alumno (a) puede resolver fácilmente la siguiente situación. "El dueño de una librería compra cierta cantidad de copias de AZUL (obra de Rubén Darío) por $300. Si el distribuidor le rebaja el 5% y él decide comprar 5% más de copias, ¿cuánto debe pagar por la nueva compra?

Problema:
Un equipo de basketball tenía una razón de juegos ganados y perdidos de 3 y 1. Después ganó 6 juegos consecutivos y la razón de ganados y perdidos quedó en 5 y 1. ¿Cuántos juegos había ganado antes de la racha de los 6 juegos ganados?

Primera etapa: Entender el problema.

La resolución de este problema exige del alumno el conocimiento de razón geométrica. Una forma de investigar si el alumno (a) domina este concepto es formulando las siguientes preguntas: ¿Cuál es la mínima cantidad de juegos que el equipo había jugado?, ¿qué otras posibilidades existen? Después de ganar 6 juegos ¿cuál es la nueva razón?

Segunda etapa: Diseño de un plan.

Parece ser que lo más indicado es orientar al alumno a que construya una tabla como la siguiente.

Primera alternativa:

Posibilidad	Ganados	Perdidos	Total	Razón entre ganados y perdidos	Conclusión
Primera	3	1	4	3;1	No es posible que haya jugado 4 partidos porque al sumar 6, la nueva razón no es de 5;1
Gana 6	9	1	10	9;1	

Tercera etapa: Ejecución del plan.

En esta etapa el alumno (a) debe construir tantas tablas como sea necesario. Una para cada alternativa.

Segunda Alternativa:

Ganados	Perdidos	Total	Razón	Conclusión
6	2	8	3:1	No es posible que hayan jugado 8 porque al sumar 6 a los ganados la nueva razón no es 5;1
12	2	14	6:1	

Gana 6...

Tercera Alternativa:

Ganados	Perdidos	Total	Razón	Conclusión
9	3	12	3:1	Por cuanto al ganar 6 la razón queda 5:1 el equipo había jugado antes 12 juegos.
15	3	18	5:1	

Gana 6...

Este problema, algebráicamente se resuelve así: Definamos "x" número de partidos ganados, "y" número de partidos perdidos.

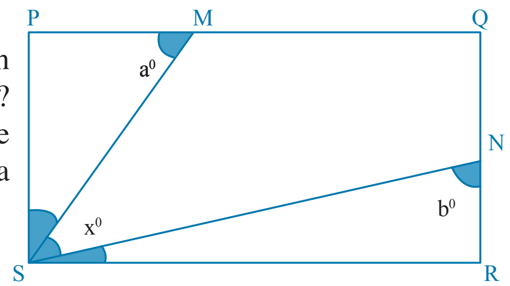
$x = 3\,y$

$x + 6 = 5y$ Resolviendo el sistema tenemos X=9, Y=3

Total: 12 partidos jugados. $\left\{ \frac{x}{y} = \frac{3}{1}; \frac{x+6}{y} = \frac{5}{1} \Rightarrow \right.$

Problema: En el rectángulo PQRS. ¿Cuál es la suma de a + b en términos de x?

Primera Etapa: Entender el problema.



Preguntas como las siguientes orientan la comprensión del problema: ¿Cuánto mide el ángulo <PQR? ¿Por qué? ¿Cuánto mide el ángulo <PSM? ¿Por qué? ¿Cuánto mide el ángulo <RSN? ¿Por qué? Es posible expresar la medida del ángulo PSR como una suma?

Segunda etapa: Diseño de un plan.

En este caso el plan consiste en expresar la medida de los ángulos PSR como la suma de los ángulos PSM + MSN + NSR.

Tercera Etapa: Ejecución del plan.

$M\ (PSR) = M\ (PSM) + M\ (MSN) + M\ (NSR)$

$\Rightarrow 90^0 = (90^0 - a) + x + (90^0 - b) \Rightarrow 90 = 90 - a + x + 90 - b$

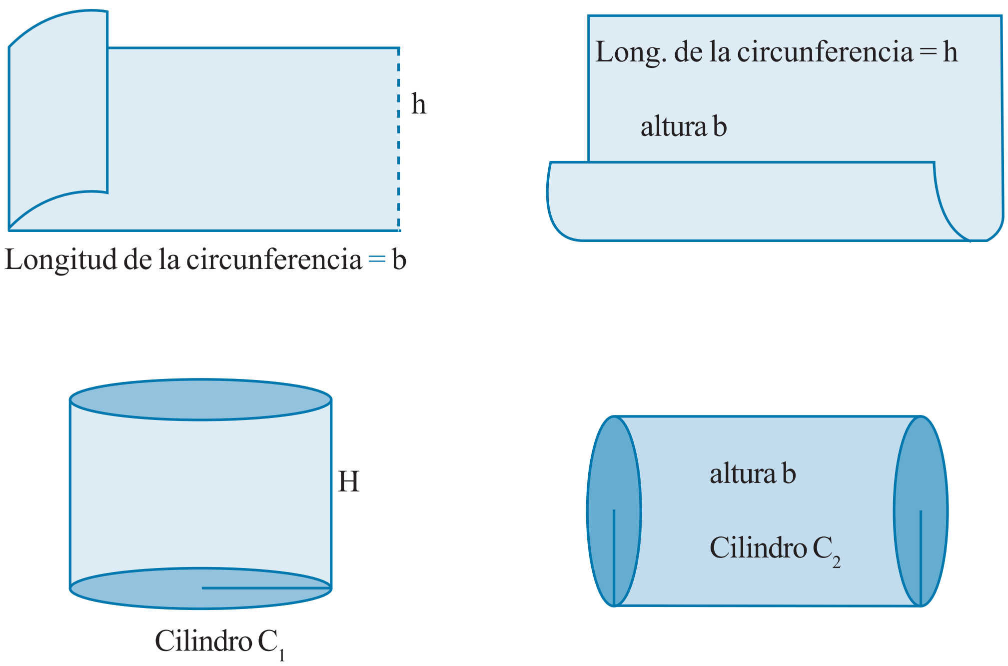
Despejando x nos queda: $x = a + b - 90^0$. Esta es la respuesta.

ESTRATEGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS SEGÚN MASON[5]:

Mason identifica en el proceso de resolver problemas tres fases: abordar el problema, resolverlo y evaluar el proceso. En la primera fase sugiere discutir tres preguntas: ¿Qué es lo que sé? ¿Qué es lo que quiero? y ¿Qué es lo que puedo usar? La segunda fase corresponde a conjetura, convencer, justificar y cómo reaccionar ante posibles dificultades. Para la parte de la revisión Mason sugiere analizar la solución, revisar las operaciones, reflexionar acerca de las ideas y momentos importantes del proceso y extender el problema a contextos más amplios. He aquí un ejemplo.

Problema: Se tiene una lámina rectangular de vértices ABCD como se muestra en la figura. Existen dos posibilidades de construir un tubo circular; doblando la lámina tomando BC como altura o doblándola tomando AB como altura. ¿Qué alternativa ofrece mayor volumen?

Primera fase: ¿Qué quiero? Calcular el volumen de dos cilindros. Uno que tenga como base la circunferencia de longitud b y altura h. Otro que tenga como base la circunferencia de longitud h y altura b.



¿Qué es lo que puedo usar?

[5] Tomado del libro Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las metemáticas. Grupo Editorial Latinoamericano. Pag 32

Segunda Fase: Proceder.

Para el círculo C_1 tenemos:

Longitud de la circunferencia = b

$2\pi\, r = b \qquad r = \dfrac{b}{2\pi} \quad \text{altura} = h$

Para el círculo C_2 tenemos:

Longitud de la circunferencia = h

$2\pi\, r = h \qquad r = \dfrac{h}{2\pi} \quad \text{altura} = b$

Tercera fase: Analizamos los resultados y reflexionamos acerca de ellos.

Ensayemos con un par de valores; supongamos b=4 h=8; (b<h)

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{4\pi}(4)^2 \,.\, 8 = \frac{32}{\pi} \\ V_2 &= \frac{1}{4\pi}(8)^2 \,.\, 4 = \frac{64}{\pi} \end{aligned}\right\} \quad \text{Tiene mayor volumen el que tiene mayor radio.}$$

Supongamos que $V_1 > V_2 \Rightarrow V_1 - V_2 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{4\pi} b^2 h - \dfrac{1}{4\pi} h^2 b > 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4\pi} b\, h\, (b - h) > 0 \Rightarrow b > h$

CONCLUSIÓN:

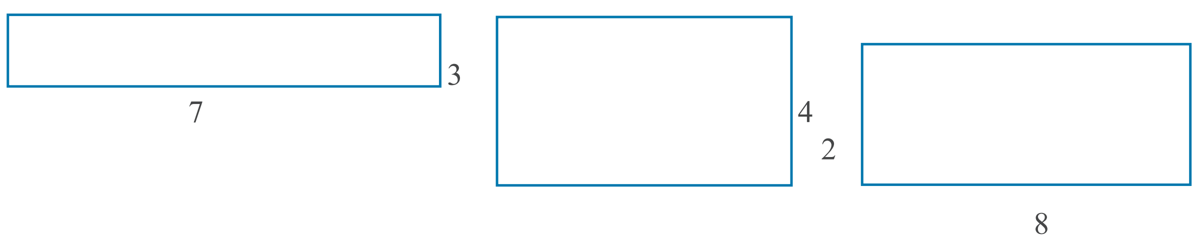
Si b > h entonces V_1 (el doblado horizontalmente) es mayor que V2, (el doblado verticalmente)

Generalizando el resultado podemos resolver problemas como los siguientes:

Si el radio y la base de un cilindro se aumentan en la misma cantidad. El volumen del nuevo cilindro es ¿mayor, menor o igual?

Un ejemplo más...

Problema ... De todos los rectángulos de perímetro 20. ¿Cuál es el que tiene mayor área? Orientar al alumno para que identifique y construya algunos como éstos.



¿Qué quiero? El rectángulo que tenga mayor área... Se puede inducir al alumno (a) que calcule el área de los rectángulos interiores y decida cual de ellos cumple con el problema.

Segunda fase: Proceder.

Una estrategia que da excelentes resultados es construir una tabla como la siguiente.

			Perímetro = 2b + 2h				A= b x h		
Base	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Altura	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Área	9	16	21	24	25	24	21	16	9

↑
Área mayor

En la tabla observamos que el rectángulo de perímetro 20 y mayor área es el cuadrado.

Tercera Etapa: Analicemos los resultados y reflexionemos a cerca de ellos.

¿Es un caso aislado u ocurre en todos los rectángulos que el rectángulo de mayor área es el cuadrado?

Invitamos al alumno a ensayar con otros rectángulos de perímetros conocidos como por ejemplo; perímetro P = 40, P = 16, P = 24, etc. El análisis de las distintas soluciones nos conducen a la siguiente proposición; “De todos los rectángulos de perímetro conocidos P, el que tiene mayor área es el cuadrado”.

El área A se calcula mediante la fórmula A = $\left(\frac{P}{4}\right)^2$

CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS:

Es casi imposible hacer una clasificación de los problemas a partir de un criterio dado. No obstante, a manera de ejemplo, presentaremos una serie de problemas mediante los cuales es posible inferir la variedad y la riqueza de los mismos. He aquí algunos problemas representativos.

Problema 1: Las medidas.
Se tiene dos cintas no graduadas, una mide 7m y la otra 5m.

¿Cómo medir 27 metros? ¿Cómo medir 31 metros? ¿Cómo medir 73m?

Este es un problema que no contiene contexto ni palabras claves y cada pregunta admite varias respuestas, además hay diferentes maneras de resolverlo.

El aspecto más importante de este problema es que la redacción no evidencia ningún algoritmo para resolverlo. Es necesario un trabajo de búsqueda para resolverlo.

Problema 2: ¿Cuántos granos de maíz hay en una arroba?
En este problema el contexto es real, no hay palabras claves y su respuesta sólo se logra por aproximación. La resolución da lugar a una variedad de estrategias de solución que implican proporcionalidad.

Problema 3: la figura geométrica.

El problema consiste en dibujar en una cartulina una figura geométrica (rectángulo, rombo, trapecio, etc). Lo más indicado es organizar a los alumnos (as) en grupos de trabajo, uno de ellos, en cada grupo, tiene escondida una figura geométrica. El resto del grupo debe construir una figura igual a la que está escondida, para la cual deben formular preguntas sobre las características geométricas de la figura y las medidas de ésta. El alumno que tiene escondida la figura sólo puede responder "si" o "no" o datos numéricos.

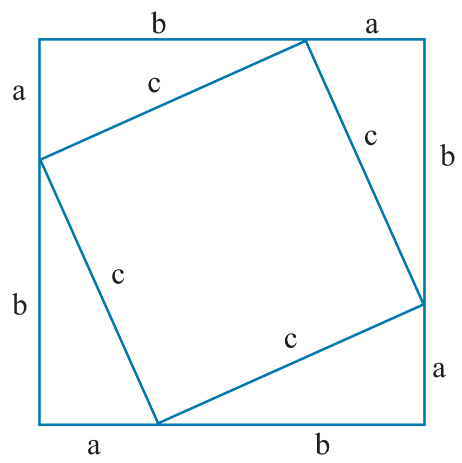
Lo más importante de este problema es que la información no está dada. Se debe conseguir mediante preguntas usando los conceptos geométricos que se conocen. Además, el problema permite constatar empíricamente si la interpretación que se hace de la información es correcta, al comparar la figura construida con la figura escondida.

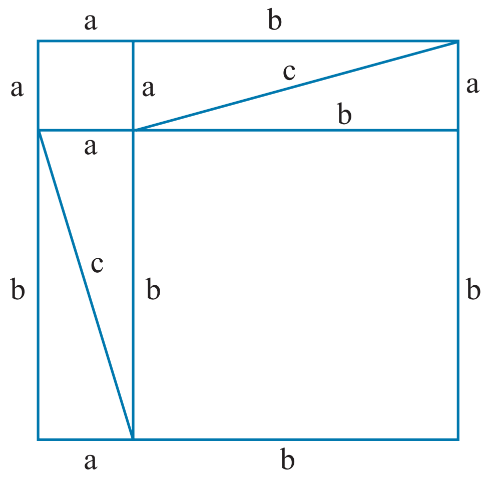
Problema 4: Datos del ambiente.

Se trata de inventar problemas a partir de información recopilada por los propios alumnos. Por ejemplo, invente un problema donde la única información es 8:15 a.m. y 2:20 p.m.

Problema 5: Interpretación de ilustraciones.

Demostrar el teorema de Pitágoras a partir de la siguiente ilustración.





Muchos de los problemas clásicos de máximo y mínimo que se estudian en el cálculo diferencial se pueden resolver en la escuela primaria o en educación media, con el auxilio de tablas o una estrategia pertinente. Veamos algunos ejemplos.

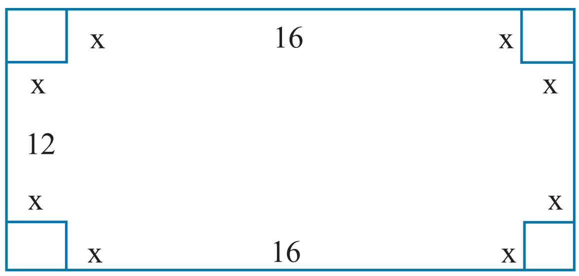
Un cultivador de frutas estima que si planta 60 naranjas, la producción media por árbol será de 400 naranjas. Por cada árbol adicional que planta, en la misma área, la producción disminuirá 4 naranjas por árbol (en promedio). ¿Cuántos árboles deberá plantar para maximizar la producción?

La relación fundamental en este problema la establece la siguiente proposición: "Por cada árbol adicional la producción disminuye 4 naranjas por árbol". Mediante una tabla como la siguiente, es posible aproximar la respuesta.

Número de árboles:	65	70	——	80
Producción por árbol:	400 - 5 x 4 = 380	400 - 10 x 4 = 360	——	400 - 4 x 20 = 320
Producción Total:	65 x 380 = 24700	70 x 360 = 25200	——	80 x 320 = 25600

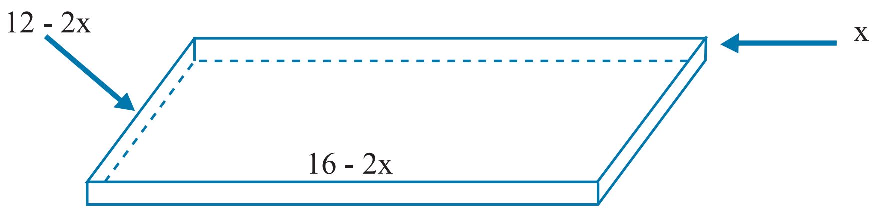
Se ve claro que la máxima producción ocurre cuando se siembran 80 árboles, en este caso, la producción asciende a 25600 naranjas.

Otro ejemplo. Se va a construir una caja sin tapa con una lámina de cartón de forma rectangular de 16 pulgadas de largo por 12 pulgadas de ancho. Para construir la caja se debe cortar de cada esquina un cuadrado y doblar las caras laterales. Encuentre la longitud del lado del cuadrado que debe cortarse para que el volumen sea máximo (ver figura).



SOLUCIÓN:

x es la longitud del lado del cuadrado que debemos cortar. Doblando cada lado la caja queda así:



Cuyo volumen es: $V = x\,(16 - 2x)\,(12 - 2x)$

Ahora construiremos una tabla dándole valores a X.

X	V = x (16 - 2x) (12 - 2x)
1	V = 1 (16 - 2) (12 - 2) = 140
2	V = 2 (16 - 4) (12 - 4) = 192
3	V = 3 (16 - 6) (12 - 6) = 180
4	V = 4 (16 - 8) (12 - 8) = 128

En la tabla se ve que el volumen máximo ocurre cuando se corta en cada esquina un cuadrado de 2cm de longitud.

RESUMEN DEL CAPÍTULO:

1. Desde la perspectiva constructivista los problemas matemáticos juegan un papel importante en el aprendizaje de la matemática.

2. El concepto actual de “aprender matemática” como la actividad central donde el alumno desarrolla y construye las ideas matemáticas, ubica la resolución de problemas como la columna vertebral de este proceso mental.

3. Para la matemática estática, un problema es la situación que requiere de la aplicación de determinados algoritmos, procedimientos y formas de trabajo que se adquieren mediante la solución de un “problema modelo”, y resolver un problema es aplicar operaciones siguiendo una secuencia de pasos.

4. Para la matemática dinámica un problema es la situación que pone a prueba la capacidad creativa del alumno, y resolver un problema es ensayar diferentes conjeturas en las cuales aplica creativamente recursos conocidos.

5. En el proceso de resolver problemas Polya identifica tres etapas fundamentales: Entendimiento del problema, diseño de un plan y ejecución del plan.

6. Mason, por su parte identifica tres fases: abordar el problema, resolver el problema, y evaluar el proceso.

CUESTIONARIO EVALUATIVO:

1. Diseñe una estrategia para resolver problemas propuestos en la unidad siguiendo las tres etapas de Polya.

2. ¿Por qué es importante resolver problemas en la escuela?

3. Elabore un plan de clase donde el tema a estudiar se realice mediante la formulación de un problema. Indique el tema y formule el problema.

4. ¿Cuál es la diferencia entre la concepción estática y la concepción dinámica de la matemática?

5. ¿Cuáles fueron los principales problemas que se presentaron en el regreso a lo básico?

CAPÍTULO VII

PRINCIPIOS PEDAGÓGICOS FUNDAMENTALES EN EL ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA

OBJETIVOS GENERALES:

Que los participantes en el curso de Didáctica de las Matemática:

1. Identifiquen los enfoques didácticos propio de la enseñanza de la geometría, para su correcta aplicación en la escuela.

2. Apliquen con éxito los enfoques didácticos de la enseñanza de la Geometría mediante el análisis de las situaciones concretas que estimulen la fantasía matemática y el pensamiento espacial.

3. Vinculen la enseñanza de la geometría, siempre que sea posible, con las formas y tamaños de los objetos de su medio.

PRESENTACIÓN:

Uno de los aspectos más notorios de nuestro sistema educativo es la deficiente preparación de nuestros egresados, tanto en primaria como en secundaria, en lo que a Geometría se refiere.

Algunas reflexiones sobre el problema nos conduce, entre muchas, a las siguientes causas.

1. Existe escasa bibliografía en el nivel de primaria y secundaria en lo que respecta a Geometría.

2. En términos generales se desconoce la metodología de la enseñanza de la Geometría.

3. Los enfoques de la enseñanza de esta disciplina han sufrido importantes variantes en los últimos años.

Particularmente creemos que la enseñanza de la geometría en el nivel primario y medio es de mucha importancia por las siguientes razones:

1. Estimula el pensamiento espacial y la fantasía matemática. En efecto, los conceptos de formas y tamaño de los objetos contribuyen a dar un ordenamiento lógico al pensamiento del estudiante.

2. La Geometría es un instrumento valioso para analizar las relaciones aritméticas y algebráicas. El ejemplo, más sencillo y conocido lo tenemos en la recta numérica. La correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales, establece un puente de valor pedagógico inmenso para la visualización y análisis de cuestiones como la solución de inecuaciones; sin contar con el

uso que se puede hacer de los rectángulos y los cuadrados para demostrar el trinomio cuadrado perfecto, la diferencia de cuadrados, etc.

3. Las construcciones geométricas contribuyen al desarrollo de las habilidades manuales en su respectiva incidencia en el desarrollo intelectual.

4. Dado que la geometría constituye un cuerpo axiomático bien estructurado, su estudio permite desarrollar los niveles de abstracción en el alumno.

Dada la importancia del estudio de la disciplina, nos pareció pertinente dedicar un capítulo completo al análisis de las diferentes teorías que se han formulado respecto a cómo debe conceptualizarse y cómo debe presentarse la geometría en la escuela, y para dotar al docente de los instrumentos metodológicos necesarios y suficientes para convertir la clase de geometría en algo fácil, interesante y sencillo.

DESARROLLO DEL CAPÍTULO:

CUESTIONARIO INICIAL:

Analiza con tus compañeros y compañeras las siguientes preguntas:

1. Etimológicamente el término "geometría" significa "medida de la tierra" este concepto ha sido ampliamente superado ¿Conoce usted la actual definición de Geometría? Escríbala.
2. ¿Qué relación tiene la Geometría con las ciencias naturales, la industria y otra áreas de la vida?
3. Sin consultar ningún documento haz una lista de conceptos y fórmulas geométricas que conoces. ¿Crees estar científicamente preparado para dar clase de Geometría? ¿En qué nivel?
4. Selecciona un tema de geometría y elabora un plan de clase para este tema.

CONSIDERACIONES GENERALES EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA:

Alicia Estela Collel[1] hace la siguiente reflexión que consideramos pertinente consignar.

"Si tenemos en cuenta que el conocimiento humano comienza con la percepción; para evitar las dificultades del alumno frente a la abstracción que suponen los conocimientos matemáticos, debemos plantear la enseñanza de la matemática al menos hasta los 14 - 15 años teniendo como punto de partida la realidad sensible. La enseñanza de los entes fundamentales de la geometría en nuestras aulas debe partir de lo concreto y, mediante operaciones del pensamiento, llegar a la gestión de un proceso indefinido que permita captar el proceso abstracto de punto, recta, plano.

Por ejemplo, el punto geométrico no tiene existencia material sino que es un ente de razón. Partir de la realidad para obtener, mediante operaciones del pensamiento el concepto teórico de punto,

[1] Educación Matemática. Volumen 7, página 62. Grupo Editorial Iberoamericano; 1965

supone una acción que se prolonga en las operaciones intelectuales. Este proceso es complejo, y a veces el niño no alcanza el "salto de abstracción" necesario para al concepto teórico. Por ello, no acepta que el "punto" que percibe con la vista es el "punto matemático" y, para lograr la comprensión del concepto debemos -en este caso- hacer referencia al hecho de que nuestros sentidos son limitados, por lo que no es posible la percepción del producto de esa partición infinita realizada a nivel intelectual. Esto sólo es posible cuando la persona ha alcanzado el dinamismo intelectual. Pero, ¿qué es el dinamismo intelectual? "Entendemos por DINAMISMO INTELECTUAL a la capacidad de la inteligencia para continuar un proceso que materialmente ha concluido".

¿En que etapa alcanza el niño (a) este dinamismo intelectual? En la evolución mental del niño. Piaget[2] distingue etapas que van desde la acción y la representación imaginada y estática del niño de 2 a 7 años, el espacio de las operaciones concretas (7 a 12 años), en el cual, la reversibilidad de las operaciones se da solo con objetos manipulables y finalmente después de los 12 años con el espacio de las operaciones formales en el cual el niño hace abstracción de un concepto y puede elaborar mentalmente deducciones y relaciones sin necesidad del objeto material concreto.

¿Qué ocurre con la Geometría?

Un objeto cualquiera -digamos un libro, una mesa, el aire, el agua- son ejemplos de cuerpos físicos y cuerpos materiales. Todos los cuerpos materiales gozan de dos propiedades generales que son de nuestro interés: su extensión y su impenetrabilidad.

La extensión es la propiedad que tienen los cuerpos de ocupar un lugar en el espacio y la impenetrabilidad se enuncia diciendo que dos cuerpos no pueden ocupar el mismo lugar en el espacio.

Por otra parte, los cuerpos físicos o materiales poseen un sinnúmero de características como: forma, tamaño, color, textura, etc. De todas estas características sólo le interesa la FORMA. Desde esta perspectiva, una bola de billar, una pelota de goma, o una bola para jugar voleibol son, geométricamente, el mismo objeto; todos ellos son "objetos esféricos".

Pero el concepto "esfera" es solo un reflejo mental de la forma del objeto y por lo tanto no existe en la realidad. Las esferas no existen, lo que existen son objetos de forma esférica. En general, los cuerpos geométricos no existen son entes imaginarios de nuestra mente. Sin embargo, los cuerpos geométricos está representados en la realidad por los cuerpos físicos que los originan.

La transformación de un cuerpo natural a un cuerpo geométrico es una operación mental llamada ABSTRACCIÓN cuya realización requiere de la aplicación de determinadas leyes, las cuales están íntimamente relacionadas con el desarrollo intelectual del niño.

De lo anterior es fácil concluir que, aunque la geometría como ciencia es un cuerpo abstracto de axiomas, postulados, definiciones y teoremas, la Geometría como asignatura, especialmente en primaria, es un conjunto de modelos matemáticos que el estudiante deberá construir a partir de las observaciones y el análisis de las formas de los objetos de un medio, respetando las leyes

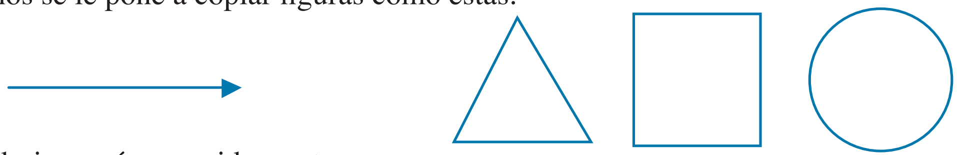
[2] Jean Piaget. La representación del espacio en el infante. 1948

psicológicas del desarrollo intelectual en el proceso de abstracción. Cada figura geométrica, cada cuerpo geométrico es un reflejo mental, conciente, producto de la abstracción.

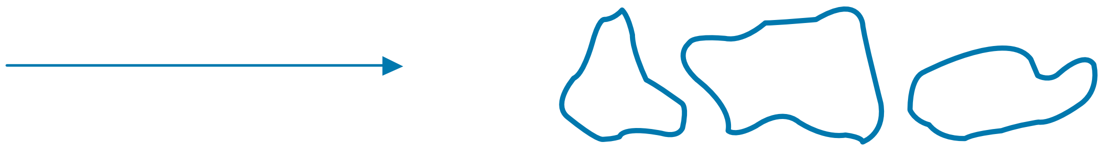
Pero analicemos la cuestión desde el principio.

De acuerdo con las investigaciones realizadas, las primeras nociones geométricas del niño son de carácter topológico. Explicaremos esta idea.

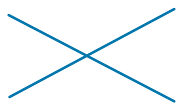
Si un niño de 5-6 años se le pone a copiar figuras como estas:



Posiblemente sus dibujos serán parecido a esto:

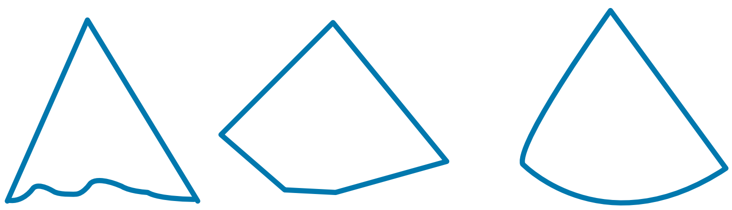


Podría pensarse que el problema es de carácter motriz, pero cuando se le pide que copie un objeto como este.



Entonces copia segmentos más o menos rectos. Lo anterior indica que el problema no es motriz sino conceptual. En realidad, a esa edad, la estructura mental del niño solo concibe figuras abiertas y cerradas, sin importar la forma.

Adela Jaime[1], al trabajar con niños de 1^{0} y 2^{0} grado, ha verificado que figuras como estas:



Son identificadas como triángulos.

Sin embargo, verdaderos triángulos como estos,
no son identificados como tales.
Nuevamente está predominado la visión topológica.

[1] Adela Jaime. - Geometría y algunos aspectos generales de la Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamericano. 1995

¿En qué momento la visión topológica da lugar a la abstracción? Una respuesta a esta pregunta lo constituye lo que se conoce como EL MODELO DE VAN-HIELE.

EL MODELO DE VAN-HIELE:

En 1957 los esposos Pierre y DINA Van Hiele[4] -ambos profesores de matemática- presentaron como tesis doctoral lo que se conoce como "Modelo de Van-Hiele" y que, comprende los niveles de razonamiento por los que pasa una persona en el proceso de aprendizaje de la geometría.

De acuerdo con el modelo de Van-Hiele el razonamiento de la elaboración de los conceptos geométricos pasa por cinco niveles. Los niveles constituyen el aporte fundamental del modelo. Se establece que la forma como se conciben los conceptos geométricos no es siempre la misma y varía cuando se va progresando en la comprensión de la geometría. He aquí los niveles.

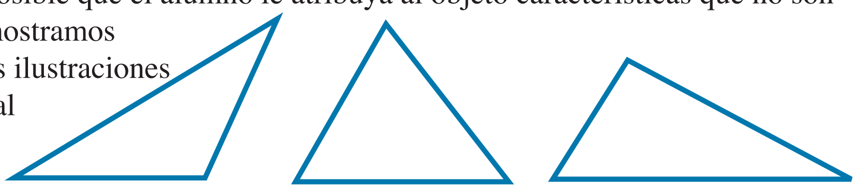
PRIMER NIVEL:

En el primer nivel la consideración de los conceptos es global. No se tiene en cuenta ni elementos ni propiedades. Para el caso de los cuerpos geométricos, posiblemente pueda diferenciar un cuerpo redondo (una bola) de uno no redondo (un dado) pero, no diferencia una caja de un dado.

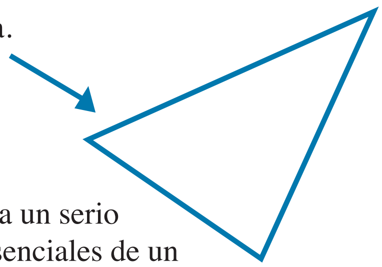
En el caso de los polígonos, y en contacto directo con objetos concretos, la primera apreciación que se lleva a cabo por identificación tiene lugar mediante una visión de conjunto. Ello permite diferenciar triángulos de cuadrados o rectángulos, pero sin hacer diferencias o igualdad de lados, paralelismo, etc.

Esta es la forma de razonar en los primeros grados.

En la percepción global es posible que el alumno le atribuya al objeto características que no son del objeto. Por ejemplo: si mostramos como triángulos, en todas las ilustraciones figuras con un lado horizontal como estas:



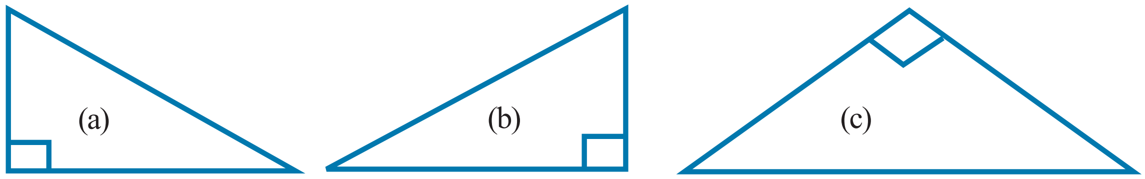
Posiblemente el alumno no identificará como triángulo esta figura.

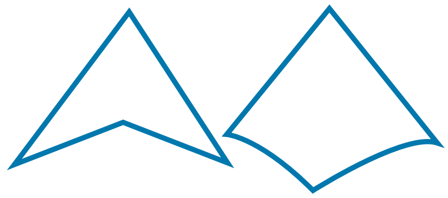


Ello se debe a que la horizontalidad de una de los lados, el alumno (a) la considera condición esencial del triángulo.

Esta característica podría proyectarse a otros niveles, y eso sí sería un serio problema. Por ejemplo: puede ser que conocidos los elementos esenciales de un triángulo, el alumno solo puede identificar la hipotenusa del triángulo rectángulo ubicado en las posiciones (a) y (b) y que tenga problemas con la hipotenusa en la posición (c).

[4] Van Hiele Geldof. La didáctica de la geomatría en la clase de la escuela secundaria. –Utrecht - 1955





Otra característica de este nivel, es la percepción individual de las figuras, lo que se observa en la figura no se generaliza a otra figura de la misma clase. Por ejemplo, en este nivel es muy difícil que el alumno (a) idenfique un cuadrado como rectángulo. Para él estos dos conceptos no tienen nada en común. Una última característica de este nivel es la no inclusión de propiedades fundamentales y apoyar el razonamiento de la percepción visual o en objetos.

Por ejemplo: el alumno de este nivel identifica como triángulos figuras como la de la derecha y explica la identificación razonando con expresiones como “se parece a”, “tiene forma de” “es como un pico”. De igual forma, los estudiantes que identifican rectángulos suelen decir que “se parece a una puerta”; “es como una ventana”.

SEGUNDO NIVEL:

El razonamiento propio de este nivel incluye el descubrimiento y la generalización de propiedades a partir de las observaciones. Tales observaciones se realizan con pocos objetos.

Esta forma de trabajo consiste en la comprobación con pocos ejemplos, es lo que en este nivel se llama “demostración”.

Por ejemplo: si se quiere “demostrar” que “las diagonales de un rectángulo son congruentes”, el alumno medirá las diagonales de tres o cuatro rectángulos y concluirá la proposición verdadera.

En este nivel, los conceptos se definen mediante un listado de propiedades. Al hacer el listado puede ser que se omitan algunas necesarias o que se incluya alguna innecesaria.

Por ejemplo, al definir cuadrado como: “Una figura con cuatro lados iguales”, se omite la congruencia de los ángulos,; pero al definir “rectángulo como una figura con cuatro ángulos congruentes, lados opuestos congruentes u diagonales congruentes”, se está incluyendo una propiedad innecesaria (diagonales congruentes).

La razón por la cual el alumno incluye o excluye propiedades se debe a que los estudiantes de este nivel no perciben todavía las relaciones entre las propiedades.

Para el alumno de este nivel, un triángulo equilátero es aquel que tiene sus tres lados congruentes y un triángulo isósceles es el que tiene dos lados congruentes. Ambos conceptos los ve por separado. En este nivel no es posible que el alumno (a) integre ambos conceptos y deduzca que todo triángulo equilátero es isósceles.

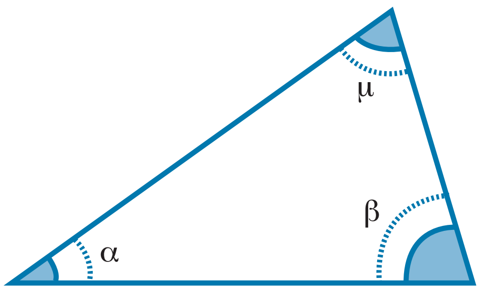
TERCER NIVEL:

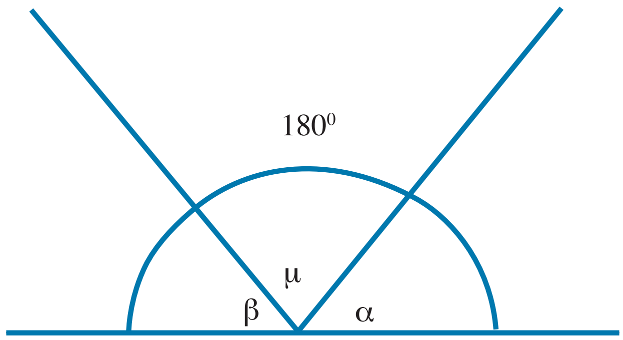
La característica básica de este nivel consiste en el establecimiento de propiedades y las relaciones entre ellas.
La comprensión y posibilidad de establecer relaciones tiene, entre muchas, las siguientes consecuencias:

- En las demostraciones, el punto de partida es la experimentación. No obstante, se siente la necesidad de recurrir a alguna justificación general, basada en propiedades conocidas. Es en este momento que se establecen y se buscan implicaciones simples. He aquí un ejemplo:

Supongamos que queremos que el alumno descubra que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180^0.

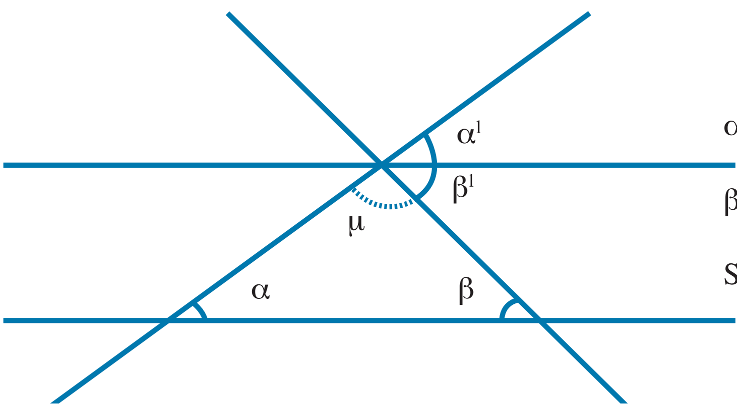
El primer paso, en este nivel, consiste en construir algunos triángulos, medir con un transportador sus ángulos interiores y sumarlos. También puede recortar los ángulos y pegarlos sobre una recta como se muestra en la figura.





Se ve claro, que juntos los tres triángulos cubren el ángulo llano que mide 180^0.
Las actividades anteriores son simple experimentación.

Ahora nos preguntamos si esta proposición es válida para todo triángulo, la respuesta exige una justificación general, basada en algunas propiedades conocidas. En este caso, la propiedad conocida que usaremos es aquella que afirma que: “Una transversal sobre paralela determina ángulos correspondientes congruentes y ángulos alternos internos congruentes”.



$\alpha = \alpha^1$ por ser correspondiente.

$\beta = \beta^1$ por ser alternos internos.

Se ve claro que: $\alpha^1 + \beta^1 + \mu = 180^o$gd.

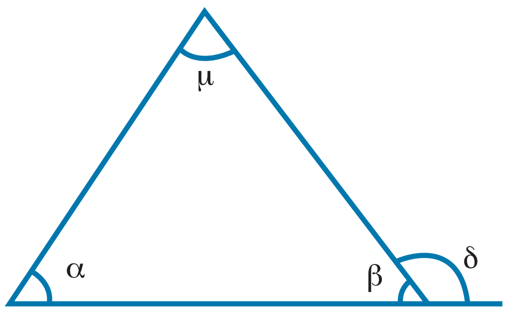
La implicación que se ha establecido en la siguiente:

Si $\alpha^{I} + \beta^{I} + \mu = 180^{o}$ y $\alpha = \alpha^{I}$ y $\beta = \beta^{I}$ entonces $\alpha + \beta + \mu = 180^{o}$

La última expresión es la justificación general.

REGRESEMOS AL TERCER NIVEL:

La situación presentada en el ejemplo anterior, muestra que en este nivel es posible entender y reproducir demostraciones formales y entender la conexión o implicación directa entre una situación y la siguiente. Así por ejemplo, de la proposición anterior, se puede deducir que “la medida del ángulo exterior de un triángulo es la suma de las medidas de sus ángulos internos no adyacentes”. Observa como se produciría.



$\alpha + \beta + \mu = \beta + \delta$

– Queremos demostrar que $\delta = \mu + \alpha$

Sabemos que:

$\alpha + \beta + \mu = 180^{o}$ por ser ángulos interiores
$\beta + \delta = 180^{o}$ por ser par lineal.

Cancelando β a ambos lados queda: $\mu + \alpha = \delta$.

En este nivel, las definiciones se comprenden y se utilizan como un conjunto mínimo, necesario y suficiente de propiedades. Por ejemplo, un triángulo equilátero es un triángulo que tiene sus lados y todos sus ángulos congruentes. También se aceptan nuevas definiciones, aunque impliquen variaciones sobre característica previas. Por ejemplo; de la definición de ángulo como la unión de dos rayos con un origen común (definición dada en primaria) surge la variación del ángulo de rotación.

Es en este nivel que el estudiante concibe el cuadrado como una clase particular de rectángulo. Se utilizan clasificaciones no exclusivas como por ejemplo: que el rectángulo es un paralelogramo con características especiales (ángulos rectos).

CUARTO NIVEL:

Este nivel está caracterizado por la comprensión y el empleo del razonamiento formal. Esto es, el alumno comprende que existen unas primeras propiedades llamadas axiomas a partir de las cuales se puede construir el edificio matemático, en el cual las reglas del juego consisten en la aplicación estricta y correcta, según las leyes de la lógica, de propiedades ya verificadas para obtener nuevas propiedades.

Por ejemplo, de los siguientes axiomas:

– Una recta contiene al menos dos puntos.
– Tres puntos no coolineales determinan un plano.

Podemos demostrar la siguiente proposición: "Una recta y un punto que no están en la recta determinan un plano". Esta última proposición conduce a ésta: "Si dos puntos de una recta están contenidas en un plano, toda la recta está contenida en el plano". De esta última se deduce otra más y así sucesivamente.

QUINTO NIVEL:

En este nivel, es posible manejar diferentes geometrías procedentes de diferentes sistemas axiomáticos.

Un aspecto importante del modelo de Van-Hiele es que los niveles no están asignados a una edad particular del alumno; por otra parte, los métodos de enseñanza y la experiencia personal son factores importantes en el proceso de razonamiento.

El modelo que acabamos de resumir goza de las siguientes propiedades:

1. Secuencialidad: No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles de razonamiento.

2. Especialidad del lenguaje: Cada nivel tiene su propio lenguaje. Por ejemplo: "demostrar" tiene un significado en el tercer nivel y otro en el cuarto.

3. Paso de un nivel al siguiente: ¿Cómo se produce el paso de nivel al siguiente? Las últimas investigaciones han puesto de manifiesto que hay un período en el cual aparece razonamiento de dos niveles consecutivos.

4. Razonamiento local: Una persona no tiene el mismo nivel en todos los conceptos geométricos, sino que razona a cierto nivel en un concepto y a otro nivel en otro concepto.

¿Cómo orientar la clase siguiendo el modelo de Van-Hiele?

Desde la perspectiva constructivista, didácticamente se proponen las siguientes fases:

Fase de Información: Esta fase tiene como objetivo que tanto el alumno como el docente obtenga información. El docente se informa de los conocimientos que posee el alumno y el alumno se informa de los objetivos que el profesor se propone alcanzar.

Fase de Orientación Dirigida: El profesor dirige a los alumnos para que estos vayan descubriendo lo que va a constituir la esencia de este nivel.

Fase de Explicación: Su objetivo es que los estudiantes sean conscientes de las características y

Orientación Libre: Orientada a consolidar los aspectos básicos del nivel. Los ejercicios y actividades deben permitir resolver situaciones nuevas con los conocimientos adquiridos previamente.

Integración: Tiene como objeto establecer y completar la red de relaciones objeto del nivel. El profesor debe proponer resúmenes de lo aprendido y exigir la memorización de los resultados fundamentales.

NUESTRA PROPUESTA:

Tomando como referencia los elementos teóricos del epígrafe anterior, proponemos las siguientes estrategias pedagógicas para la enseñanza de la Geometría.

Actividades Propias del Primer Nivel: Ubicación y Contenidos.

Desde la perspectiva académica y de acuerdo con la experiencia escolar, en nuestra región el primer nivel correspondería al primero y segundo grado. Los contenidos por estudiar son los conceptos de formas redondas, formas no redondas, triangulares, rectangulares y circulares y el concepto de ángulo. De acuerdo con el modelo de Van-Hiele, en este nivel, las consideraciones de los conceptos son globales y no se tiene en cuenta ni elementos ni propiedades.

Por todas las consideraciones anteriores, proponemos las siguientes actividades docentes para este nivel:

1. Usando cuerpos de madera, cartulina, plástico o cualquier otro material; que el estudiante separe cuerpos de formas redondas como esferas, cilindros, conos, etc, de cuerpos de forma no redonda como cajas, cubos, etc.

2. Que los alumnos asocien cuerpos físicos con sus respectivas formas geométricas.

3. Presentar objetos físicos de diferentes formas para que los alumnos las modelen en plastilina, barro, arcilla, mezcla de cemento y arena, etc.

4. Con el fin de que los alumnos (as) identifiquen la diferencia fundamental entre un objeto redondo y no redondo se sugiere:

   4.1. Presentar un cubo, una caja o cualquier cuerpo no redondo e indicándole qué es una cara, preguntar cuantas caras tiene; presentar después una pelota y hacer la misma pregunta.

   4.2. Repetimos la pregunta para una caja, un cilindro, un lápiz, un lapicero, etc.

   4.3. Preguntar... En cuanto a forma: ¿cuál es la diferencia entre una caja y una pelota? El alumno (a) debe concluir que los cuerpos redondos no tienen cara y los cuerpos no redondos tienen cara.

5. Con respecto a la figura geométrica se sugiere:

5.1. Que los alumnos (as) idenfiquen, en su medio, formas cuadradas, circulares, rectangulares tales como la forma de una puerta, una ventana, una pared, una rueda, un ladrillo, el pizarrón, el piso del aula, etc.

5.2. Que pinten de un color las formas cuadradas, de otro color las formas circulares, etc.

5.3. Que construyan con materiales como cartulina, alambre, etc. figuras de forma rectangulares, cuadrangulares y circulares, etc.

5.4. Con los propios alumnos, jugar a construir figuras circulares, rectangulares.

5.5. Finalmente, en la etapa semiastracta, presentar láminas ilustradas con cuerpos redondos, cuerpos no redondos así como figuras rectangulares, circulares, para que los alumnos (as) pinten dichas ilustraciones en colores indicados por el docente. Con el auxilio de dichas ilustraciones formular preguntas que nos aseguren que el alumno (a) ha asimilado las formas y los conceptos estudiados. Por ejemplo: ¿cuántos cuerpos redondos hay?, ¿cuántos cuerpos no redondos hay?, ¿cuántas caras tiene este cuerpo?, ¿qué forma tiene esta cara?, ¿cuántos lados tiene una figura triangular?, ¿cuántos lados tiene una figura rectangular?, ¿cuántos lados tiene una figura circular?

En este nivel conviene familiarizar al alumno (a) con el concepto de ángulo. Para ello se sugiere actividades como las siguientes:

1. Indicar la existencia de ángulos en situaciones propias del medio como la esquina del salón, la esquina del pizarrón, de una mesa, etc. Más tarde la familiarización debe hacerse mediante ilustraciones como las que aquí insertamos:

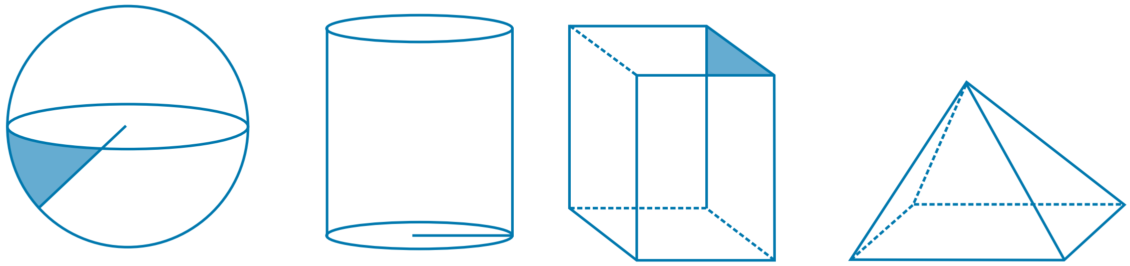
2. Indicar a los niños que identifiquen ángulos en figuras triangulares; primero, del medio y después en dibujos; igualmente, que identifiquen ángulos en figuras rectangulares del medio. El objetivo de esta actividad es que el niño descubra que una figura triangular tiene tres lados y que una figura rectangular tiene cuatro ángulos y cuatro lados.

3. Indicar al niño que construya figuras triangulares y rectangulares.

Actividades Propias del Segundo Nivel. Ubicación y Contenido.

Tal como se dijo en su momento, el razonamiento propio de este nivel incluye el descubrimiento y la generalización de propiedades a partir de observaciones y mediciones. Académicamente este nivel podría ubicarse desde tercero hasta quinto grado. En nuestra región, en este nivel se desarrollan, en términos generales, los siguientes contenidos:

1. Clasificación de los cuerpos redondos en cuerpos de forma esférica, forma cilíndrica y forma de cono así como cuerpos no redondos en cubo, prisma, y pirámides, y la identificación de los elementos de éstos. Para ello, se parte de objetos del medio para más tarde presentar ilustraciones como las siguientes:



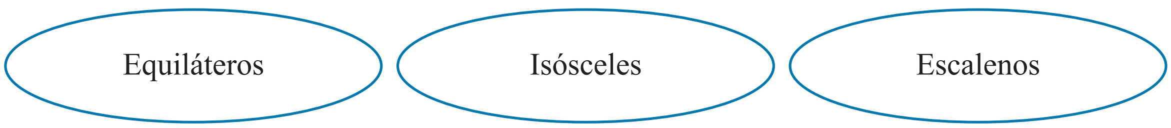
2. Identificación de los elementos de estos cuerpos como: radio, altura, arista, etc.

3. Un estudio completo del triángulo desde su definición, pasando por la clasificación según sus lados y ángulos, así como la identificación de la base y la altura. Todos estos mediante mediciones y comparaciones. A este nivel corresponden las construcciones geométricas elementales como la construcción de la altura de un triángulo, la construcción de un ángulo congruente con otro dado.

4. Reconocer e identificar una figura geométrica por sus propiedades y clasificación de los mismos. Por los contenidos (3) y (4) se sugieren actividades como las siguientes:

   4.1. Indicar a los alumnos que construyan figuras y cuerpos geométricos con cartulina u otro material.

   4.2. A partir de mediciones en figuras triangulares debidamente diseñadas por el docente, el alumno (a) debe descubrir la existencia del triángulo equilátero, isósceles y escaleno.

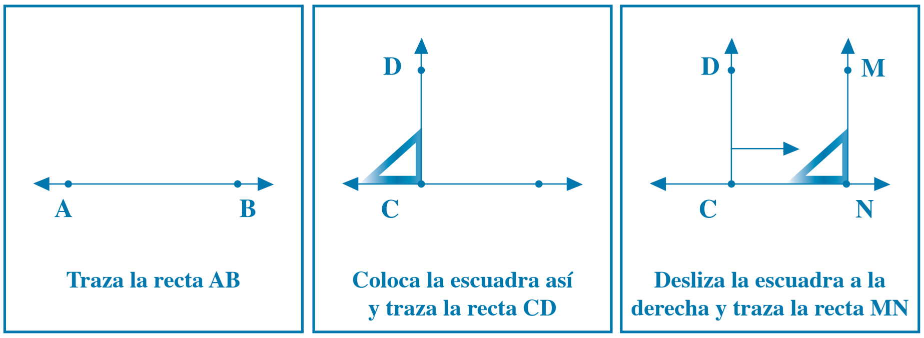


En este nivel, esta clasificación se le presentará al alumno como una partición.

   4.3. A partir de mediciones en figuras rectangulares debidamente diseñadas por el docente, el alumno debe descubrir la existencia de rectángulos con cuatro lados congruentes. Tales rectángulos se llaman cuadrados.

   4.4. Indicar que los lados opuestos de una figura rectangular están en su posición paralela y explicar cómo se construyen rectas paralelas. (Esta es la etapa de la familiarización con el paralelismo por acción sensorial: la vista).

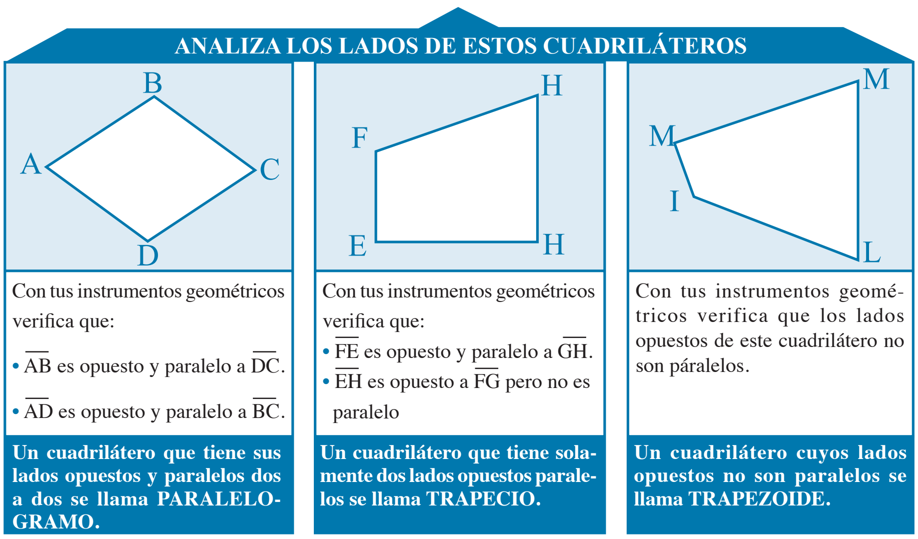
Una forma de construir rectas paralelas es la siguiente:



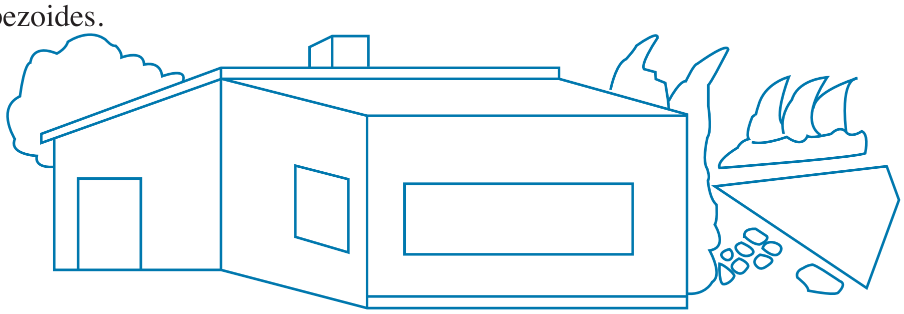
Las rectas CD y MN son PARALELAS

4.5. Indicar que una figura geométrica que tiene cuatro lados se llama cuadrilátero.

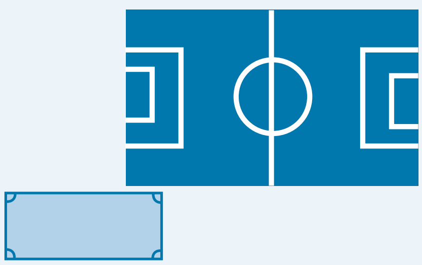
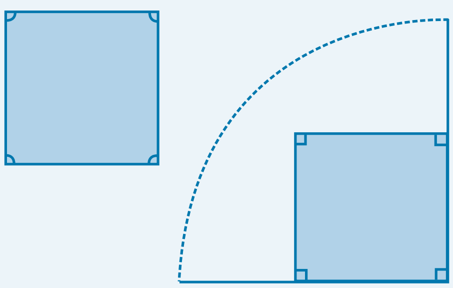
4.6. Usando ilustraciones como las siguientes y mediante observaciones y mediciones, el alumno se familiariza con los conceptos de paralelogramo, trapecio y trapezoide.



Observa la casa:
- Pinta de verde los paralelogramos.
- Colorea de azul los trapecios.
- Colorea de rojo los trapezoides.

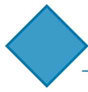
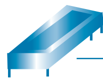
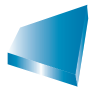


4.7. Usando ilustraciones como las siguientes, el alumno descubrirá, por medición y observación las propiedades del romboide, el rombo, el rectángulo, y el cuadrado:

	Este gofio o dulce de la Purísima tiene la forma de un ROMBOIDE. Verifica que: • Sus lados opuestos son paralelos y tienen la misma medida dos a dos. • Ninguno de sus cuatro ángulos es recto. • Sus ángulos opuestos son iguales.
	Este barrilete tiene la forma de un rombo. Verifica que el rombo: • Tiene sus cuatro lados iguales. • Sus ángulos opuestos son iguales. • Sus lados opuestos son paralelos. **Analiza con tus compañeros las diferencias y semejanzas entre el rombo y el romboide**
	El cuadro de foot-ball tiene forma de rectángulo. Verifica que el rectángulo: • Tiene lados opuestos iguales y paralelos. • Sus cuatro ángulos son iguales y miden 90º. Son ángulos rectos.
	El campo de base-ball tiene la forma de un cuadrado. Verifica que el cuadrado: • Tiene sus cuatro ángulos iguales y cada uno es un ángulo recto, es decir, que mide 90º. • Tiene sus cuatro lados iguales y sus lados opuestos son paralelos.

4.8. Ejercicios como los siguientes contribuirán a identificar los distintos paralelogramos.

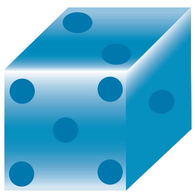
En el siguiente listado indica la forma del cuadrilátero que posee:

- Una cancha de basket-ball ____
- Una señal de tránsito como esta:  ______________________________
- La base de una canaleta como esta:  ___________________________
- La tapa de una caja como esta:  ______________________________
- Un pedazo de madera cortado en esta forma  __________________

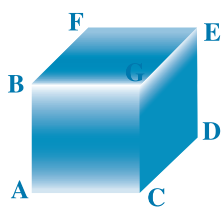
Dibuja: un cuadrado, un rombo un romboide, un trapecio y un trapezoide

4.9. Mediante ilustraciones como las siguientes, estudiar y analizar los principales elementos del cubo, la esfera, el cilindro, el cono, etc.

Observa este dado



El sólido geométrico asociado a un DADO es el sólido llamado:



CUBO

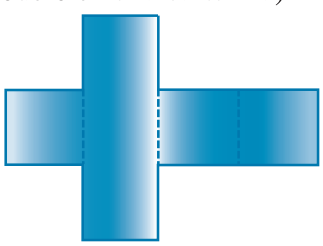
Los segmentos como AB, CD se llaman ARISTAS

¿Cuántas aristas tiene un dado?

El cubo tiene todas sus aristas iguales

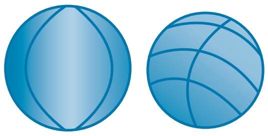
Recorta, dobla, pega y construye un cubo.

(Copia el modelo en una cartulina)



Dibuja en tu cuaderno un cubo de 3 cms. de arista:

Observa estas pelotas:



El sólido geométrico asociado a
una pelota es este sólido llamado:

ESFERA

El punto O se llama CENTRO DE LA ESFERA.

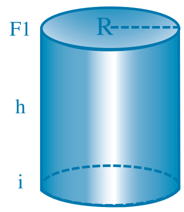
El segmento R se llama RADIO DE LA ESFERA.

Indica cuáles de los nombres de los siguientes objetos
tienen forma de esfera y los subrayas:

- Una naranja
- Un libro
- Una pelota de basketball
- Un trompo

Observa el barril:

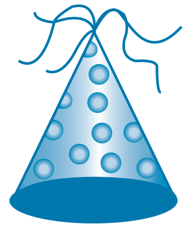
El sólido geométrico asociado al barril
es este sólido llamado:



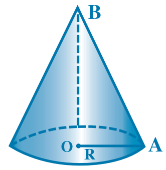
CILINDRO

El segmento F1 se llama RADIO DEL CILINDRO.
La distancia "i" se llama ALTURA DEL CILINDRO.
Dobla recorta, pega y construye un cilindro.
(Copie el modelo en una cartulina).

Observa este gorro:



El sólido geométrico asociado al gorro es este sólido llamado:



CONO

El segmento $\overline{BO}$ es la ALTURA DEL CONO.

R es el RADIO DEL CONO.

El segmento $\overline{BA}$ se llama GENERATRIZ DEL CONO.

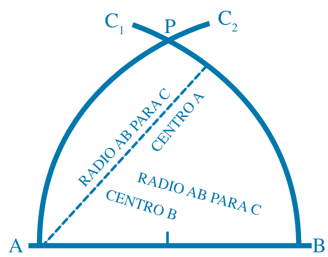
Menciona cinco objetos que tengan forma de cono.

3. <u>La relación entre la longitud del lado de un triángulo y la medida de sus ángulos opuestos.</u> A mayor lado corresponde mayor ángulo. Esto explica el hecho de que un triángulo equilátero tenga sus tres ángulos congruentes. Para que el alumno descubra esta relación sugerimos las siguientes actividades:

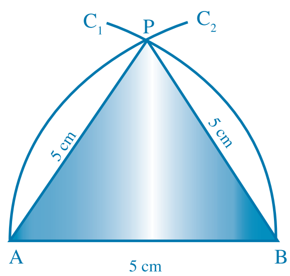
   3.1 Que los alumnos identifiquen los elementos de un ángulo y denoten correctamente el ángulo y midan su amplitud usando un transportador.

a) Traza en tu cuaderno un segmento $\overline{AB}$ de 5 cm como éste

b) Haciendo un centro en A traza con el compás el arco C_1 de radio AB, y haciendo centro en B y el mismo radio, traza el arco C_2



Observa que C1 y C2 se cortan en P
Dibuja los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$. El triángulo ABP tiene sus tres lados iguales. Verifícalo midiendo los lados.



Un triángulo que tiene sus tres lados iguales se llama TRIÁNGULO EQUILÁTERO

3.2 Que los alumnos construyan un triángulo equilátero y que midan sus ángulos y sus lados. Para construir un triángulo equilátero se sugiere lo siguiente:

3.3 Que los alumnos construyan triángulos isósceles y escalenos; midan sus lados y sus ángulos y saquen conclusiones.

Para construir un triángulo isósceles se aplica el mismo procedimiento con el radio mayor que la mitad de AB pero menor que AB. (Ver figura de la derecha).

3.4 Que los alumnos intenten construir un triángulo escaleno con regla y compás.

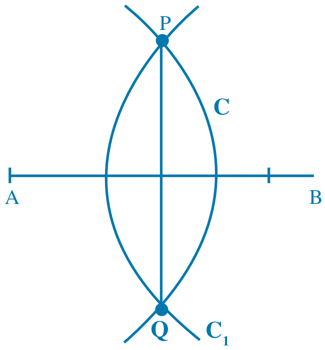
4. La relación entre el triángulo equilátero y el triángulo isósceles. Se trata de que el alumno descubra que todo triángulo equilátero es isósceles.

5. Midiendo los ángulos interiores en muchas triángulos y sumando sus medidas, el alumno debe descubrir que: "la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º".

Construye un triángulo isósceles:

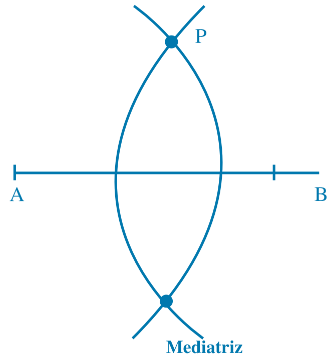
a) Dibuja en su cuaderno el segmento $\overline{AB}$ de 8 cm de longitud.

b) Con un compás traza el arco C_1 de radio o abertura de 4 cm haciendo centro en A y con la misma abertura traza el arco C_2 haciendo centro en B.

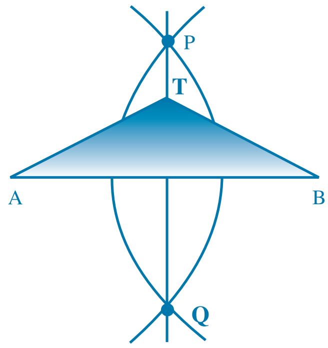


Observa que C_1 y C_2 se cortan en los puntos P.Q.

c) Traza la recta que pasa por $\overline{PQ}$. La recta $\overleftrightarrow{PQ}$ pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y además es perpendicular. La recta $\overleftrightarrow{PQ}$ se llama MEDIATRIZ.



d) Tomando un punto T cualquiera de la mediatriz, construye el triángulo de lados AT y BT. El triángulo ABT tiene los lados iguales. ¡Verifícalo!



Un triángulo que tiene dos lados iguales se llama TRIÁNGULO ISÓSCELES

6. La relación entre el rombo, el cuadrado y el rectángulo.

Nuestra propuesta en lo que respecta a la Geometría Métrica

La geometría métrica en primaria comprende el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes. El cálculo de perímetros es una tarea que se inicia en tercer grado y que no ofrece mayores dificultades. En efecto, se trata de sumar la medida de los lados de un polígono. Lo único que el docente debe cuidar es que las longitudes estén expresadas en las mismas unidades.

Centraremos nuestro trabajo en la elaboración del concepto de área como la medida de una superficie, el concepto de volumen y la construcción de la distintas fórmulas para el cálculo del área y del volumen. ¡Empecemos!

Área de una superficie. (A partir del cuarto grado)

¿Cómo construir el concepto de área de una superficie? Un procedimiento que nos da buenos resultados es el siguiente:

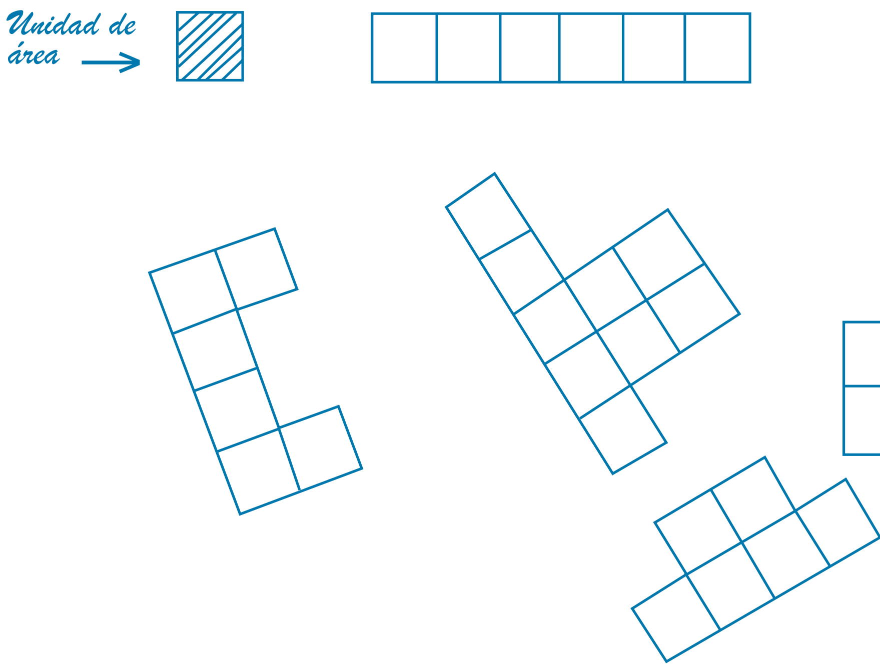
1. Con objetos como el pizarrón, el piso del salón de clases, las paredes del mismo, etc el alumno se familiariza con el concepto de superficie.

2. Indicar que la medida de una superficie se llama AREA. El área es un número que indica la medida de una superficie. ¿Cómo se calcula el área? He aquí un procedimiento:

   2.1 Seleccione una unidad de medida, por ejemplo: un ladrillo del piso de la clase.
   2.2 Usando dicha unidad de medida, contar los ladrillos del salón y aproximar su área.
   2.3 Que los alumnos seleccionen una unida arbitraria de medida (vale cualquier rectángulo de cartulina); a esta unidad se le llamará "Unidad Cuadrada de Medida: U^2" y con ella mida la superficie de una hoja de papel, del pizarrón, de la pared del salón y aproxime su área en U^2.

3. La independencia entre el área de una superficie y la forma de la misma es un conocimiento importante. Para construir este conocimiento se sugieren actividades como las siguientes:

   3.1 Indique al alumno que la región sombreada representa una unida de área y pídale que pinte de verde la superficie que tiene igual área.



4. Una vez que el alumno se apropie del concepto de área de una superficie y la independencia entre el área y la forma de una superficie, se procede a definir las unidades internacionales de área: cm^2, m^2, pul^2, pie^2, etc, dependiendo de las unidades lineales que se conozcan.

5. Definidas las unidades fundamentales de área se procede a construir las fórmulas para calcular el área de las figuras geométricas más comunes, en este orden: área del rectángulo, área del cuadrado, área del triángulo, área del trapecio, área del rombo, área del romboide y área del círculo. Finalmente, se puede incursionar por la fórmula de Heron y aplicarla en el cálculo de áreas de superficies poligonales irregulares mediante triangulación.

Cálculo de Volúmenes

El cálculo de volúmenes se inicia en quinto grado. En principio, el alumno debe familiarizarse con el concepto de volumen. Una estrategia recomendada es la siguiente:

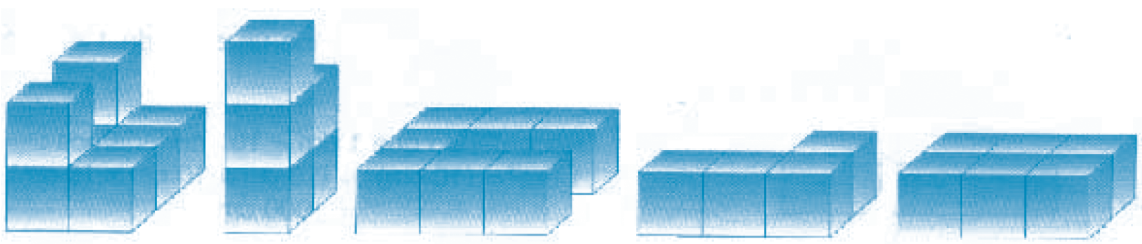
1. Presentar a los alumnos recipientes como cajas, botellas, baldes, etc, y mediante un diálogo, conducir al alumno a que descubra que “dentro de los recipientes, existe una porción de espacio limitada por superficie planas y/o curvas”. A este espacio se le llama volumen o capacidad del recipiente.

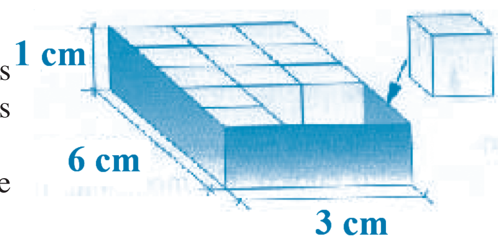
2. Proponer una lista de objetos para que los alumnos indiquen cuales tienen volúmenes y cuales, no. Esta lista de objetos puede ser:

-Una caja de cartón	-Una chimbomba inflada	-La superficie de una mesa
-Un segmento de recta	-Un barril	-La cancha del colegio
-El aula de clases	-La hoja de un árbol	

3. Que los alumnos construyan un cubo de 1cm de arista e indicar que dicho cubo es una unidad de volumen llamada centímetro cúbico que se denota así: cm^3.

4. Construir doce o más cubos de 1cm de arista, para que los alumnos construyan cuerpos como estos: ¿Cuál es el volumen de cada cuerpo?





5. Construir una caja como la del lado con las dimensiones ahí señaladas, para que los alumnos ubiquen los cubos e indiquen cuantos cms^3 tiene el volumen de la caja.
6. Que el alumno descubra la relación que existe entre el dm^3 y el litro.

RESUMEN DEL CAPÍTULO:

1. De acuerdo con los contenidos y logros de aprendizaje de los actuales programas de educación primaria en primero y segundo grados, el desarrollo del pensamiento geométrico corresponde al primer nivel del modelo de Van-Hiele; el tercer grado corresponde al segundo nivel y cuarto, quinto y sexto grados al tercer nivel. El cuarto nivel, correspondiente al razonamiento formal, debe dejarse para el nivel secundario.

2. Observar, medir y comparar deben ser las acciones básicas para el estudio de la geometría en la Escuela Primaria.

3. Es conveniente enfatizar en el correcto uso de los instrumentos geométricos para el trazo de paralelas, perpendiculares, así como en la construcción de figuras y cuerpos geométricos.

4. La formación de cualquier concepto geométrico debe iniciarse con la observación y análisis del medio.

5. Las definiciones de los objetos geométricos y sus relaciones deben formularse a partir de las propiedades que el alumno descubra en su trabajo con la geometría.

CUESTIONARIO EVALUATIVO:

1. Menciona tres situaciones en las cuales se detecte, la relación de la geometría con:
   1.1. La naturaleza 1.2. La Industria 1.3. La Biología

2. Si uno de los alumnos se preguntara "para que sirve la geometría" ¿Cuál sería su respuesta?

3. De todos los conceptos geométricos que se estudian en primaria ¿Cuáles abordaría?

4. En los actuales programas de matemática, el marco conceptual de la geometría aparece en la unidad llamada "GEMETRIA" y la parte correspondiente a la geometría métrica aparece en otra unidad llamada "MEDICION". ¿Está usted de acuerdo con este planteamiento? ¿Qué comentarios le merece? Si tuviera que cambiar esta estructura… ¿Qué haría? ¿Qué ventajas y desventajas tiene esta estructura de los actuales programas?

5. Diseñe un experimento mediante el cual usted conozca el nivel de razonamiento geométrico en el que se encuentran los alumnos de tercer grado al iniciar el año escolar.

6. Redacte un plan de clase para el tema: "Clasificación de los Triángulos por la Medida de sus Lados", aplicando nuestra propuesta pedagógica.

7. Redacte un plan de clase para el tema: "Concepto de Paralelogramo" en tercer grado, aplicando nuestra propuesta pedagógica.

CAPÍTULO VIII

ESTRATEGIAS BÁSICAS A TOMAR EN CUENTA EN LA CONSTRUCCIÓN Y APLICACIÓN DE ALGORITMOS

OBJETIVOS GENERALES:

Que los participantes en el curso de la asignatura de Didáctica de las Matemática:

1. Valoren la importancia pedagógica de la construcción de los algoritmos en el proceso mental de la construcción del conocimiento matemático.

2. Conozcan y apliquen exitosamente las estrategias que se aplican en la construcción de los algoritmos.

3. Apliquen correctamente los algoritmos en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática.

PRESENTACIÓN:

La Didáctica de la Matemática no sólo se ocupa de la elaboración de conceptos, demostraciones de proposiciones y resolución de problemas sino, y fundamentalmente de procesos algorítmicos. Ejemplos clásicos son: en primaria los algoritmos de las operaciones fundamentales y en secundaria, los procedimientos para la resolución de sistemas de ecuaciones (el algoritmo de Gauss).

A partir de conocimientos psicológicos amplios acerca de la asignatura, surge en el curso escolar de Matemática, la necesidad de concederle un lugar importante, en la enseñanza de la matemática, al pensamiento y al proceder algorítmico.

La enseñanza de la matemática ofrece numerosas posibilidades para describir algorítmicamente procedimientos y reglas, así como para aplicarlos; en efecto, en la mayoría de los programas de la región son objetivos comunes los siguientes:

- El trabajo seguro con las operaciones básicas de cálculo en el dominio de los números naturales, fraccionario, racionales y reales.

- Habilidades en la solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

- Habilidades en el campo de perímetros, áreas, volúmenes.

Lo anterior pone de manifiesto el gran valor que los programas le dan a la formación de capacidades en la aplicación se sucesiones de indicaciones con carácter algorítmico. Por esa razón, debemos ocuparnos de su tratamiento metodológico en la enseñanza de la matemática.

Los algoritmos, como toda acción mental, tienen una base lógica y en esto radica la importancia de su construcción en el aula. Cuando el alumno construye un algoritmo, no solamente se apropia de la lógica que lo sustenta, sino que descubre los alcances y limitaciones del mismo.

La constricción de un algoritmo obedece a ciertas etapas, que si se observan ordenadamente, van creando en el alumno (a) una estructura mental que más tarde se convierte en un método de trabajo. Conocer la justificación de cada uno de los "pasos" del algoritmo, no solo proporciona confianza al estudiante, sino que evita los errores en que a menudo cae el alumno (a) cuando lo aplica mecánicamente.

Es nuestro interés, en este capítulo, analizar las razones matemáticas que sustentan determinado algoritmo, a fin de que la construcción del mismo resulte una actividad interesante y atractiva.

DESARROLLO DEL CAPÍTULO:

Piensa, razona y contesta...

1. Un alumno (a), siguiendo la lógica de la adición de números naturales, efectúa la adicción así: $\frac{3}{4}+\frac{5}{7}=\frac{3+5}{4+7}=\frac{8}{11}$ ¿Qué argumentos matemáticos le daría usted para que él descubra su error?

2. Algunos alumnos (as) transfieren el algoritmo de la simplificación a expresiones como $\frac{x+y}{x+2}$ Al simplificar hacen esto $\frac{\cancel{x}+y}{\cancel{x}+2}$ para concluir que $\frac{x+y}{x+2}=\frac{y}{2}$. ¿Cuál es, a su juicio, la razón de este error?

3. Es común entre algunos estudiantes hacer esto $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ ¿Cómo saca usted del error a estos alumnos?

4. Suponga que usted plantea a sus alumnos la siguiente división para que la realicen: $\frac{14}{5}\div\frac{7}{3}$

   Un alumno la realiza así: $\frac{14}{5}\div\frac{7}{3}=\frac{14\div 7}{15\div 3}=\frac{2}{5}$ ¿Está el alumno en lo correcto?

5. Para calcular el m.c.m. de un conjunto de números se factoriza cada uno de los números en factores primos. El m.c.m se calcula multiplicando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente. ¿Qué argumento matemático justifica este algoritmo?

6. ¿Qué es un algoritmo?

DEFINICIÓN DE ALGORITMO:

El concepto "algoritmo" es un concepto estrictamente matemático. Según Landa[1] "un algoritmo es una sucesión de indicaciones, exacta y determinada unívocamente para la realización de una

[1] Mencionado por Warner Gungk en su libro Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática, pag49

serie de operaciones elementales (o sistemas de tales operaciones) para resolver ejercicios de una determinada clase o de un determinado tipo".

CUATRO ASPECTOS QUE DESTACAN EN LA DEFINICIÓN:

1. Un algoritmo es una sucesión de indicaciones. Esto es, conjunto de indicaciones que siguen un orden determinado e inalterable.

   Así, el algoritmo para dividir 14314 ÷ 9 está integrado por las siguientes órdenes:

   a) Dividir 14 entre 9
   b) El posible cociente 1 se multiplica por el divisor 9
   c) El producto se resta de 14
   d) Al resto o residuo se le agrega la siguiente cifra y se repiten las cuatro órdenes anteriores en la secuencia dada. Observa el esquema.

$$\begin{array}{r|l} 14314 & 9 \\ \cline{2-2} -9 & 1 \\ \cline{1-1} 53 & \end{array}$$

a) 14 ÷ 9 = 1
b) 1 x 9 = 9
c) 14 - 9 = 5

2. Las indicaciones son exactas y determinadas unívocamente. Esto es, son órdenes que solamente producen un único resultado (reste, multiplique, divida, etc).

3. Cada orden es una operación elemental. Es decir, si se necesitan dos operaciones, entonces deben darse dos órdenes.

4. Los algoritmos se usan para resolver EJERCICIOS (no problemas) de una clase o de un tipo determinado.

   Una aclaración importante en relación con la definición anterior es la siguiente: No toda indicación es de carácter algorítmico; indicaciones como:

   – Analice las premisas del teorema.
   – Compare la premisa con la conclusión.
   – Aplique tal teorema.
   – Saque conclusiones, etc.

No son de carácter algorítmico, porque son indicaciones indeterminadas. Diferentes alumnos deben realizar la misma indicación en forma distinta y llegar a distintos resultados.

Una indicación es algorítmica solamente cuando determina completamente un cierto proceso, una actividad y cuando conduce siempre, en presencia de determinados datos iniciales del mismo tipo, a los mismos resultados finales.

Otro aspecto importante de la definición es el siguiente: El concepto de "operación elemental". Una operación es simple o elemental cuando puede transmitirla sin descomponerla en otras operaciones. Por ejemplo: analizar la divisilidad de un número compuesto no es una operación elemental, porque se deben aplicar distintas reglas de divisibilidad.

La determinación de una operación elemental es un proceso muy complicado y la búsqueda de tales operaciones exigen a menudo investigaciones experimentales. Al determinar una operación como elemental debemos cuidar no caer en los siguientes errores: primero, que la operación se vuelva muy complicada para el alumno (a) y que no pueda realizarla sin errores; segundo, que la operación se vuelva tan simple que no agote las capacidades mentales de los alumnos y la sucesión de indicaciones se vuelva voluminoso.

Un último aspecto al considerar el trabajo algorítmico es el siguiente: la elaboración y el trabajo son indicaciones algorítmicas están íntimamente relacionados con la demostración de proposiciones y la elaboración de conceptos, por cuanto el algoritmo en sí se basa en definiciones y teoremas.

ASPECTOS A TOMAR EN CUENTA EN EL PROCESO DE LA ELABORACIÓN DE UN ALGORITMO:

1. Decidir sobre la conveniencia de elaborar el algoritmo. Esto significa, entre otros aspectos a considerar, si el algoritmo es general para determinada clase de ejercicios. Por ejemplo, en los primeros grados, el alumno (a) multiplica mediante adiciones sucesivas así:

   3 x 14 = 14 + 14 + 14 + = 42.

   ¿En qué momento conviene elaborar el algoritmo de la multiplicación?

2. Decisión sobre la forma de elaborar el algoritmo. Una metodología recomendable es la siguiente:

   Partir de ....Teoremas y definiciones
   Esto se presenta en forma de ....Reglas
   Estas reglas son trabajadas....................Descomponiéndolas en operaciones elementales
   Estas operaciones ....Son llevadas a forma unificada en forma estructurada.
   Se anota la sucesión de indicaciones, formulando la sucesión total de indicaciones

   Reforcemos este aspecto con un ejemplo. La construcción del algoritmo de la multiplicación.

   Partimos de las siguientes reglas:

   – La propiedad distributiva de la multiplicación por la adición. Esto es, si a, b, c, son números naturales, entonces a • (b + c) - a • b + a • c.
   – La propiedad conmutativa de la multiplicación y como operaciones elementales las siguientes:

1. La descomposición de un número natural como la suma de múltiplos de potencia de 10.
   Ejemplo: 143 = 100 + 40 + 3.

2. El cálculo del producto de un dígito por un múltiplo de una potencia de 10.
   Ejemplo: 3 x 100 = 300; 4 x 300 = (4 x 3) x 100...

3. La adición de números naturales.

El docente debe asegurarse que el alumno (a) domine tanto las reglas como las operaciones elementales antes descritas.

A continuación, estructuramos las operaciones elementales con ejercicios como el siguiente: Calcular el producto 26 x 3.

Esta es la sucesión de indicaciones, en ese orden:

1. Escribamos el producto así ....$26 \bullet 3 = (20 + 6) \bullet 3$

2. Usando la propiedad distributiva ....$(20 +6) \bullet 3 = 20 \bullet 3 + 6 \bullet 3$

3. Mediante las operaciones elementales
   (2), (3) , y (4), en este orden, tenemos ....
   $$\begin{aligned}(20 + 6) \bullet 3 &= 20 \bullet 3 + 6 \bullet 3\\ &= 60 + 18\\ &= 18 + 60 = 78\end{aligned}$$
   El producto 26 x 3 = 78

Repetimos los ejemplos hasta cuando el alumno (a) asimile la secuencia de las operaciones elementales.

Otro ejercicio puede ser el siguiente: Calcular el producto de 146•x 4.

$$\begin{aligned}146 \bullet 4 &= (100 + 40 + 6) \bullet 4\\ &= 100 \bullet 4 + 10 \bullet 4 + 6 \bullet 4\\ &= 400 + 40 + 24\\ &= 580\end{aligned}$$

El producto 146 • 4 = 584.

Una vez asimiladas las operaciones elementales y su estructura planteamos el producto así:

```
  26
x  3
  18 ..................... (3 x 6 = 18)
  60 .....................(20 x 3 = 60):
  78 .....................Producto
```

El punto esencial de este paso es que el alumno (a) se dé cuenta que cuando multiplica el 3 por el 2, en realidad está multiplicando 3 por 20 de ahí que escriba 60.

Igual con el otro ejercicio.

146		
x 4		
24	4 • 6 = 24	
160	4 • 40 = 160.	Al multiplicar por 4 realmente multiplica por 40.
400	4 • 100 = 400.	Al multiplicar por 1 realmente multiplica por 100.
584	Producto.	

Ahora procedemos a construir el algoritmo propiamente dicho. La esencia del algoritmo consiste en escribir para cada producto únicamente el dígito correspondiente al orden posicional; el otro dígito, si existe, pertenece al siguiente orden y por esa razón se le suma al dígito del siguiente producto. He aquí la estrategia.

Multipliquemos 2 6
x 3
6 • 3 = 18, como el 6 corresponde a las unidades, solamente escribimos 8..... 8
la decena del 18, o sea 1 si lo sumamos al producto de 3 por las 2 decenas.

2 6
3 • 2 decenas = 6 decenas + 1 centena = 7 decenas, que ponemos en el lugar x 3
de las decenas... 7 8

Igualmente procedemos con este producto. 1 4 6
x 4
6 • 4 = 24; como el 6 corresponde a las unidades, en el producto escribimos. 4
las 2 decenas, o sea 2 se lo sumamos al primer dígito del producto
de 4 centenas por 4.

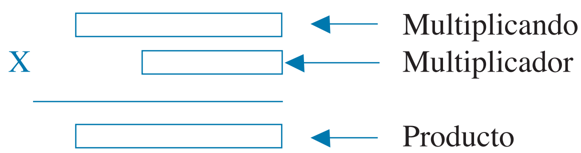
1 4 6
4 decenas • 4 = 16 decenas + 2 decenas = 18 decenas. Es decir, 1 centena x 4
con 8 decenas, en el lugar de las centenas, sólo escribimos 8. .... 8 4
a la centena se la sumamos al producto de 1 decena por 4.

1 4 6
1 centena • 4 = 4 centenas + 1 centena = 5 centenas. x 4
En lugar de las centenas, escribimos. 5 8 4

Finalmente, formulamos la sucesión total de indicaciones. Esto es, formulamos el algoritmo.

Para el caso del producto de un número natural mayor que 10 por un número dígito, el algoritmo es el siguiente:

1. Escribimos los factores en forma vertical:



2. Multiplique el multiplicador por el primer dígito del multiplicando. El resultado es un número de una o dos cifras.

   2.1 Si es de una cifra escriba esta cifra en el producto.

   2.2 Si es de dos cifras escriba en el producto solamente la cifra de la derecha, la cifra de la izquierda súmesela al producto del multiplicador por la segunda cifra del multiplicando.

3. Repita la operación (2) para las siguientes cifras del multiplicando.
4. Al efectuar el producto de la última cifra del multiplicando, escriba el resultado en el producto.

Continuamos ahora con los aspectos a tomar en cuenta en el proceso de la elaboración de un algoritmo. El tercer aspecto es el siguiente:

Comprobación de la completitud de la sucesión de indicaciones. Esto significa preguntarse si existen todos los pasos necesarios para el desarrollo de la solución. Por ejemplo: el algoritmo construido anteriormente... ¿Es realmente el algoritmo de la multiplicación de números naturales? Obviamente, no. Al algoritmo anterior le faltan indicaciones para calcular productos como 25 x 28; 143 x 131, etc; por lo tanto no está completo.

Cuarto Aspecto. Garantía de la elementabilidad de los pasos de la sesión de indicaciones. Sobre este aspecto, nos debemos preguntar cuál es el nivel de partida de los alumnos.

Quinto aspecto. Creación de posibilidad de control. Para el caso de los algoritmos de las operaciones básicas, la calculadora electrónica es un buen instrumento de control. En otros casos, conviene concluir un paso para la realización de la prueba.

Sexto Aspecto. Dirección de la asimilación por etapas de la sucesión de indicaciones. En este aspecto se debe tomar en cuenta las siguientes etapas.

Primera Etapa. La presentación en forma escrita de la sucesión de indicaciones. Los alumnos realizan cada paso siguiendo su escrito.

Segunda Etapa. Ninguna muestra escrita. Los pasos y resultados parciales son reproducidos oralmente por el alumno.

Tercera etapa. La sucesión de indicaciones se convierte en una regla de trabajo, la que a su vez se convierte en una acción básica.

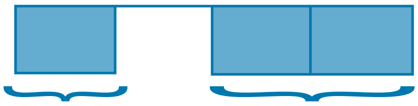
A continuación presentamos a manera de ejemplo, la elaboración de algunos algoritmos en la escuela primaria primero y en la escuela secundaria después.

Iniciemos nuestro trabajo con el algoritmo de la adición de números fraccionarios. He aquí una respuesta.

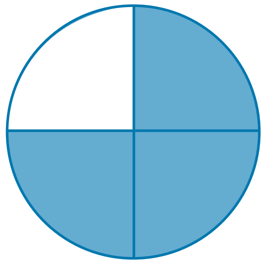
Primero: ¿Cuáles son las definiciones y proposiciones que un alumno (a) debe dominar para que asimile el proceso de construcción de este algoritmo?

1. El concepto de adición. En este aspecto preguntamos a los alumnos. ¿Qué acción realizamos cuando sumamos tres caramelos con dos caramelos? ¿Juntamos? ¿Separamos? ¿Es posible sumar tres caramelos con dos lapiceros? Sí __ No __? ¿Por qué? La intención de este tipo de preguntas es que el alumno (a) concluya que: Sumar es juntar magnitudes de la misma naturaleza.

1.2 Para verificar la asimilación del concepto de adición, pedir a los alumnos que indiquen en cuales de los siguientes casos es posible efectuar la adición.

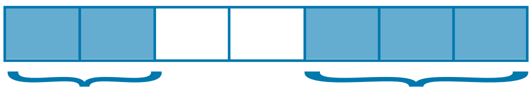


$\frac{1}{4} \quad + \quad \frac{2}{4}$



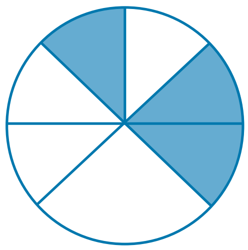
$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} =$

1.3 Indicar a los alumnos que efectúen las siguientes adiciones, usando como referencia las ilustraciones.

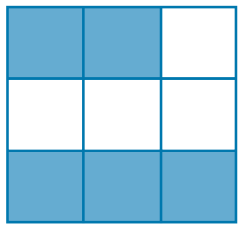


$\frac{2}{7} \qquad \frac{3}{7}$

$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} =$



$\frac{1}{8} + \frac{2}{8} =$



$\frac{2}{9} + \frac{3}{9} =$

1.4 Preguntar. ¿Cómo se calcula el numerador de la suma? ¿Qué escribimos en el denominador de la suma? ¿Qué se hace para sumar dos números fraccionarios que tienen el mismo denominador?

Las respuestas deben de conducir al algoritmo para sumar números fraccionarios con el mismo denominador. Este algoritmo es:

a) Para calcular el numerador de la suma, sumamos los numeradores de los sumandos.

b) El denominador de la suma es el mismo denominador de los sumandos.

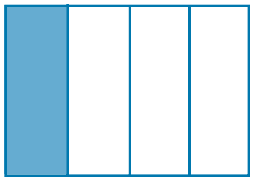
c) Simplificar el resultado si es posible.

1.5 Indicar a los alumnos que apliquen el algoritmo anterior, en el cálculo de las siguiente sumas:

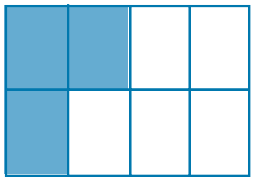
$\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \boxed{}$ $\qquad$ $\frac{2}{21} + \frac{5}{21} + \frac{4}{21} = \boxed{}$ $\qquad$ $\frac{12}{250} + \frac{19}{250} + \frac{23}{250} = \boxed{}$

Ahora procedemos a construir el algoritmo para la adición de números fraccionarios que tienen distinto denominador. Para ello sugerimos el siguiente procedimiento:

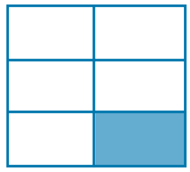
1. Indicar a los alumnos que calculen la suma de los números fraccionarios representados por las regiones sombreadas a las ilustraciones.



1/4



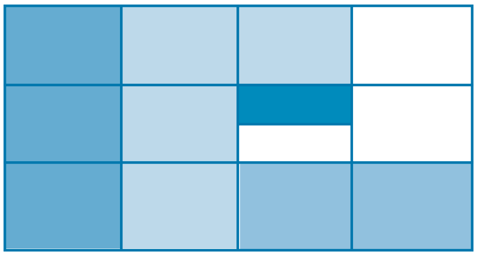
3/8



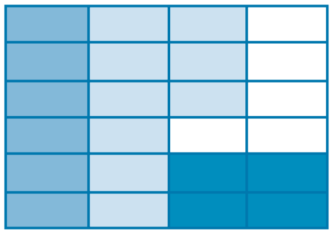
1/6

Esto es calcular la suma de: $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{6}$

Una alternativa es juntar las tres ilustraciones en una sola ilustración.



Para saber cuántos tenemos en la región sombreada, procedemos así:



Observa que:

$\frac{1}{4}=\frac{6}{24}$ $\frac{1}{6}=\frac{4}{24}$

$\frac{3}{8}=\frac{9}{24}$

Observa que según la ilustración:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\boxed{}$$

De acuerdo con la ilustración:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}$$

Observa que de acuerdo con las ilustraciones:

$$\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{6}}_{A}=\underbrace{\frac{6}{24}+\frac{9}{24}+\frac{4}{24}}_{B}$$

Preguntar:

¿Cuál es la diferencia entre la expresión A y la expresión B?

¿Es posible sumar en A usando el algoritmo anterior? ¿Es posible sumar en B usando el algoritmo anterior? ¿Cómo se transforma A en B?

Observa:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=(A) \qquad \frac{1 \text{ x } 6}{4 \text{ x } 6}+\frac{3 \text{ x } 3}{8 \text{ x } 8}+\frac{1 \text{ x } 4}{6 \text{ x } 4}=\frac{6}{24}+\frac{9}{24}+\frac{4}{24} \quad (B)$$

¿Cómo se transforma A en B? Amplificando cada fracción de tal forma que todas tengan el mimo denominador.

¿Por cuánto debemos amplificar cada fracción? ¿Cuál es el número que nos va a servir de denominador común?

El 24 es el menor número que contiene al 4, al 8 y al 6 como factor común; es decir, el 24 es el m.c.m. de 4, 8, y 6.

Efectuemos la suma $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=$ mediante el siguiente procedimiento.

a. Escribamos cada sumando con los denominadores factorizados: $\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{1}{2 \times 3}$

b. Calculemos el m.c.m. de los denominadores: $\left.\begin{array}{l} 4 = 2^2 \\ 8 = 2^3 \\ 6 = 2 \times 3 \end{array}\right\}$ m.c.m. $= 2^3 \times 3$

c. Escribamos cada sumando poniendo como denominador el m.c.m. de los denominadores y multiplicando el numerador por el factor que le falta al denominador para ser m.c.m.

$$\frac{1 \bullet 2 \bullet 3}{2^2 \bullet 2 \bullet 3}+\frac{3 \bullet 3}{2^3 \bullet 3}+\frac{1 \bullet 2^2}{2 \bullet 2^2 \bullet 3}$$

d. Efectuar los productos indicados: $\frac{6}{24}+\frac{9}{24}+\frac{4}{24}$

e. Efectuar la suma aplicando el algoritmo descrito anteriormente: $\frac{6}{24}+\frac{9}{24}+\frac{4}{24}=\frac{19}{24}$

Los pasos (a), (b), (c), (d), (e), son los correspondientes al algoritmo de la adición de números fraccionarios.

¿Por qué este algoritmo es de mucha importancia?

Primero: Es transferible a sustracción; segundo, se aplica sin ninguna modificación a la adición y sustracción de números racionales y tercero, es fácilmente transferible a adición y sustracción de expresiones algebráicas racionales.

Veamos, en el siguiente ejemplo, la transferencia del algoritmo de números racionales a expresiones algebraicas racionales.

Sumar: $\frac{3}{14}+\frac{4}{21}+\frac{5}{6}$	**Sumar:** $\frac{x}{x^2+4x+3}+\frac{3}{x^2+3x+2}+\frac{x-1}{x^2+5x+6}$
Escribimos cada sumando con los denominadores factorizados	
$\frac{3}{7 \times 2}+\frac{4}{7 \times 3}+\frac{5}{3 \times 2}$	$\frac{x}{(x+3)(x+1)}+\frac{3}{(x+1)(x+2)}+\frac{x-1}{(x+2)(x+3)}$

Calculamos el m.c.m. de los denominadores	
$14 = 7 \times 2$ $21 = 7 \times 3$ $6 = 3 \times 2$ m.c.m. $= 7 \times 3 \times 2$	$x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$ $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ m.c.m. $= (x+3)(x+1)(x+2)$
Escribimos cada sumando poniendo como denominador el m.c.m. de los denominadores y multiplicando el numerador por el ipso que le falta al denominador para ser m.c.m.	
$\frac{3 \times 3}{7 \times 3 \times 2} + \frac{4 \times 2}{7 \times 3 \times 2} + \frac{5 \times 7}{7 \times 3 \times 2}$	$\frac{x(x+2)}{(x+3)(x+1)(x+2)} + \frac{3(x+3)}{(x+3)(x+1)(x+2)} + \frac{(x-1)(x+1)}{(x+3)(x+2)(x+1)}$
Efectuar los productos indicados en el numerador	
Efectuar la suma	
$\frac{9}{42} + \frac{8}{42} + \frac{35}{42} = \frac{52}{42} = \frac{26}{21}$	$\frac{2x^2 + 5x + 8}{(x + 3)(x + 2)(x+1)}$

Como un segundo ejemplo de elaboración de algoritmos, elaboraremos el algoritmo para multiplicar números fraccionarios.

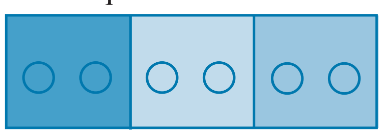
Primero: Revisemos con los alumnos (as) el concepto de multiplicación de números naturales.

¿Qué significa multiplicar? ¿Qué papel juegan los factores y el producto? En una multiplicación, uno de los factores indica cuantas veces está contenido el otro factor en el producto.

Por ejemplo: en el producto 3 x 5 = 15 sabemos que el 15 contiene al 3, 5 veces y el 15 contiene al 5, 3 veces.

Segundo. Preguntar: ¿Qué indica el producto de $\frac{1}{3} \bullet 6$?

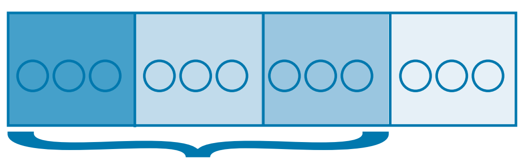
$\frac{1}{3} \bullet 6$ indica que de 6 sólo tomaremos $\frac{1}{3}$



De acuerdo con el diagrama, es verdadero que $\frac{1}{3} \bullet 6 = 2$.

– Indicar a los alumnos que, mediante un diagrama, calculen. $\frac{1}{4} \bullet 12, \frac{1}{6} \bullet 21$

– Usando un diagrama se puede calcular $\frac{3}{4} \bullet 12$

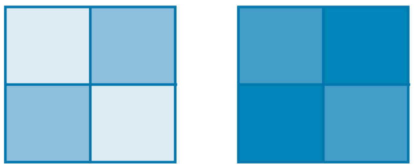


$\frac{3}{4} \bullet 12 = 9$

$\frac{3}{5} \bullet 10, \frac{4}{9} \bullet 18, \frac{7}{12} \bullet 36, \frac{11}{20} \bullet 40...$

Tercero. Preguntar: ¿Qué significa el producto $8 \text{ x } \frac{1}{4}$?

El producto $8 \bullet \frac{1}{4}$ significa tomar $\frac{1}{4}$, 8 veces. El siguiente diagrama nos da el producto.



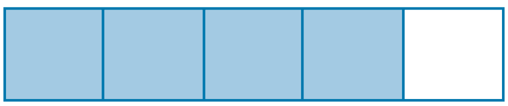
$8 \bullet 1/4 =$
8 veces $1/4 = 2$

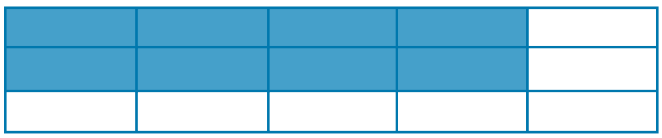
Indicar a los alumnos que mediante diagramas como el anterior, calcular los siguientes productos:

$10 \bullet \frac{1}{5}$, $9 \bullet \frac{1}{3}$, $9 \bullet \frac{2}{3}$ ...

Cuarto. Preguntar... ¿Qué significa el producto $\frac{2}{3} \bullet \frac{4}{5}$?

El producto $\frac{2}{3} \bullet \frac{4}{5}$ indica que de $\frac{4}{5}$ tomaremos solamente $\frac{2}{3}$ El siguiente diagrama nos permite calcular el producto.





De a cuerdo con la ilustración... $\frac{2}{3} \bullet \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

Estos son $\frac{4}{5}$ de los cuales tomaremos $\frac{2}{3}$

Indicar a los alumnos (as) que, mediante un diagrama como el siguiente calcule los siguientes productos: $\frac{1}{3} \bullet \frac{2}{5}; \frac{3}{4} \bullet \frac{5}{8}; \frac{2}{3} \bullet \frac{3}{8}$.

Quinto. Hacer un resumen de los productos anteriores con fin de inferir el algoritmo.

$\frac{1}{3} \bullet 6 = 2$ esto es lo mismo que : $\frac{1}{3} \bullet \frac{6}{1} = \frac{6}{3} = 2$

$\frac{3}{4} \bullet 12 = 9$ esto es lo mismo que : $\frac{3}{4} \bullet \frac{3 \bullet 4}{1} = \frac{3 \bullet 3 \bullet 4}{4 \bullet 1} = 9$

$8 \bullet \frac{1}{4} = 2$ esto es lo mismo que : $\frac{8}{1} \bullet \frac{1}{4} = \frac{2 \bullet 4}{1} \bullet \frac{1}{4} = 2$

$$\frac{2}{3}\bullet\frac{4}{5}=\frac{8}{15} \qquad \text{esto es lo mismo que:} \qquad \frac{2\bullet 4}{3\bullet 5}=\frac{8}{15}$$

Al observar los resultados, se deduce fácilmente el algoritmo. Este es:

1. Factorice los numeradores y denominadores a los factores.

2. Cancelemos los factores que estando en el numerador también están en el denominador.

3. El numerador del producto es el producto de los numeradores de los factores.

4. El denominador del producto es el producto de los denominadores de los factores.

Al igual que el algoritmo anterior, este también es transferible a las expresiones algebraicas racionales. El siguiente ejemplo así lo muestra.

Multiplica $\frac{15}{14}\bullet\frac{21}{10}$ Multiplicar: $\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-8}\bullet\frac{x^2+2x}{x^3-5x}$

– Factorizamos los numeradores y denominadores de los factores.

$$\frac{3\ x\ 5}{7\ x\ 2}\bullet\frac{7\,x\,3}{5\,x\,2} \qquad \frac{(x+3)(x-5)}{(x+2)(x-4)}\bullet\frac{x(x+2)}{x^2(x-5)}.$$

– Cancelamos los factores que estando en el numerador también están en el denominador.

$$\frac{3}{2}\bullet\frac{3}{2} \qquad \frac{(x+3)}{x-4}\bullet\frac{x}{x^2}$$

– El numerador del producto es el producto de los numeradores de los factores y el denominador del producto es el producto de los denominadores de los factores.

$$\frac{3}{14}\bullet\frac{21}{10}=\frac{3}{7x\,2}\bullet\frac{7x3}{5\,x2}=\frac{3\,x3}{2\,x2}=\frac{9}{4} \qquad \frac{(x+3)(x-5)}{(x+2)(x-4)}\bullet\frac{x(x+2)}{x^2(x-5)}=\frac{x(x+3)}{x^x(x-4)^x}=\frac{x^2+3x}{x^3-4x^2}$$

Finalizamos este capítulo con el proceso pedagógico de la construcción del algoritmo de la división de números fraccionarios. Generalmente, este algoritmo no se construye sino que únicamente se enuncia como una regla a aplicar. Vea la siguiente propuesta para su construcción.

Construcción del algoritmo de la división de números fraccionarios

La construcción de este algoritmo parte del concepto de división que el alumno aprendió en el trabajo de los números naturales. Este concepto es el siguiente:

"Dividir es repartir una cantidad D llamada dividendo, en tantas partes iguales como lo indica otra cantidad d llamada divisor. El resultado de la división es un número llamado cociente".

Identifica el D, el divisor d y el cociente q en la siguiente situación:

15 lápices se reparten, en partes iguales, entre 3 niños; de esta forma a cada niño le corresponden 5 lápices. En este caso:

El dividendo D = ____ el divisor d = _____ el cociente q = ______

Lo fundamental de este concepto es que el alumno (a) asimile el significado del conciente en una división. Para ello proponemos la siguiente actividad:

Primero: Preguntar, el cociente de 30 ÷ 6 ¿Qué significa?

Las respuestas deben conducir a la siguiente conclusión: El cociente de 30 ÷ 6 se interpreta como las veces que el 30 contiene al 6. Puesto que 30 ÷ 6 = 5 entonces concluimos que el 30 contiene al 6, 5 veces.

Segundo.

Indicar a los alumnos que completen:

– El cociente de 50 ÷ 10 se interpreta como: ____
– El cociente de 9 ÷ 4 se interpreta como: ____
– El conciente de 1/2 ÷ 4 se interpreta como: ____

– El cociente de $4 \div \frac{1}{2}$ se interpreta como: ____

– El cociente de $\frac{4}{3} \div \frac{2}{5}$ se interpreta como: ____

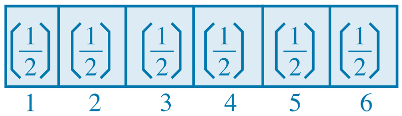
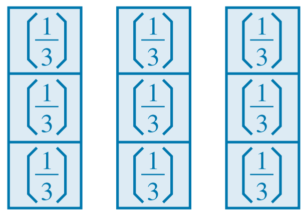
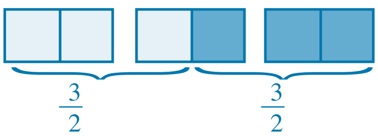
Tercero: Analizar el conciente de un entero entre un número fraccionario.

Para ello partimos de la siguiente proposición: El cociente de 3 ÷ 1/2 se interpreta como las veces que 3 contiene a $\frac{1}{2}$.

¿Cuántas veces 3 contiene a $\frac{1}{2}$? ¿Cuántas veces 3 contiene a $\frac{1}{3}$?

¿Cuántas veces 3 contiene a $\frac{2}{3}$? ¿Cuántas veces 3 contiene a $\frac{3}{5}$?

Las repuestas nos las dan los siguientes diagramas, observa y analiza la tabla.

Preposición	Resultado	Equivalente a...
¿Cuántas veces contiene 3 a $\frac{1}{2}$?	El 3 contiene a $\frac{1}{2}$ 6 veces	$3 \div \frac{1}{2} = \frac{3}{1} \bullet \frac{2}{1} = \frac{6}{1} = 6$
	$3 \div \frac{1}{2} = 6$	
¿Cuántas veces contiene 3 a $\frac{1}{3}$?	El 3 contiene a $\frac{1}{3}$ 9 veces	$3 \div \frac{1}{3} = \frac{3}{1} \bullet \frac{3}{1} = \frac{9}{1} = 9$
	$3 \div \frac{1}{3} = 9$	
¿Cuántas veces 3 contiene $\frac{3}{2}$?	El 3 contiene a $\frac{3}{2}$ 2 veces	$3 \div \frac{3}{2} = \frac{3}{1} \bullet \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$
	$3 \div \frac{3}{2} = 2$	

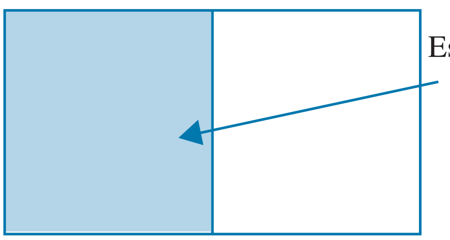
Indicar a los alumnos (as) que, sin usar diagramas, calculen los siguientes cocientes:

$$5 \div \frac{1}{10};\ 9 \div \frac{3}{2};\ 145 \div \frac{5}{9}$$

Preguntar: ¿Cómo se calcula el cociente de un número natural entre un número fraccionario?

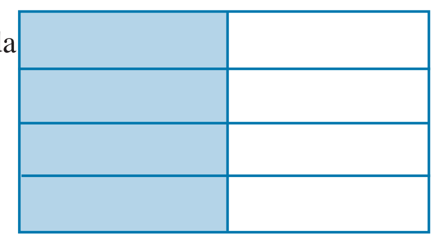
Cuarto. Analiza el cociente de un número fraccionario entre un número natural. Pero ello sugiere:

- Mediante un diagrama ilustra el cociente de $\frac{1}{2} \div 4$.



Esta región sombreada

Es $\frac{1}{2}$.



La figura muestra que $\frac{1}{2} \div 4 = 1/8$.

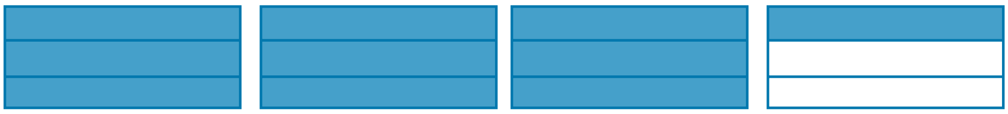
Esto es $\frac{1}{2} \div 4$ representa la cuarta parte de $\frac{1}{2}$ y la cuarta parte de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{8}$, por tanto, $\frac{1}{2} \div 4 = \frac{1}{8}$

Ahora que el alumno observe que: $\frac{1}{2} \div 4 = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

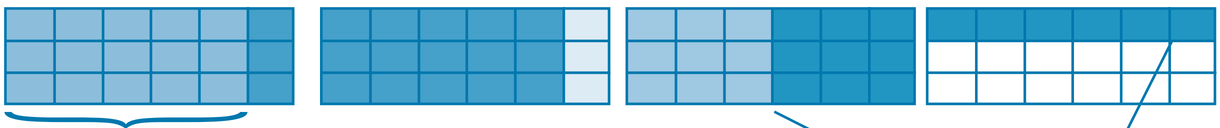
Quinto... Generalizar, mediante el cálculo del cociente de un número fraccionario entre otro número fraccionario. Para ello sugerimos, entre la infinidad de ejemplos, calcular el cociente de .

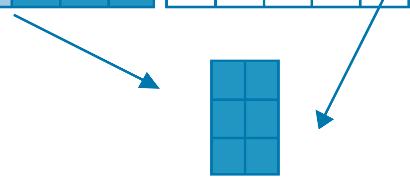
$\frac{10}{3} \div \frac{5}{6}$ Esto es: ¿cuántas veces $\frac{10}{3}$ contiene $\frac{5}{6}$?

– Ilustremos primero $\frac{10}{3}$ (región sombreada).



Ahora, dividimos $\frac{10}{3}$ en 6 partes iguales y tomamos 5 cada vez. ¿Cuántos $\frac{5}{6}$ podemos tomar de $\frac{10}{3}$? Observa la ilustración.





Una vez $\frac{6}{5}$ de $\frac{10}{3}$

De la ilustración concluimos que: $\frac{10}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{10}{3} \text{ x } \frac{6}{5} = \frac{60}{15} = 4$

Con ejercicios como los anteriores se concluye que: para dividir dos números fraccionarios se multiplica el fraccionario dividendo por el inverso del fraccionario divisor. Este es el algoritmo propiamente dicho.

RESUMEN DEL CAPÍTULO:

1. Un algoritmo es una sucesión de indicaciones, exactas y determinadas unívocamente para la realización de una serie de operaciones elementales.
2. Los algoritmos tienen su aplicación en la resolución de ejercicios.
3. La elaboración de un algoritmo conduce a la asimilación de las proposiciones, definiciones y conceptos que forman el marco teórico del contenido.
4. Los algoritmos hacen el trabajo más racional y ahorran tiempo en la resolución de ejercicios.
5. Los algoritmos deben ser tratados tomando en cuenta la relación entre objetivo, contenido y método.

CUESTIONARIO EVALUATIVO:

1. Haz una lista de algoritmos que pueden elaborarse en el aula primaria y elabora dos de ellos.

2. Enuncia las secuencias de operaciones correspondientes al algoritmo del mínimo común múltiplo de un conjunto finito de números naturales.

3. Indica tres razones que respondan a por qué es necesario elaborar algoritmos en la enseñanza de la matemática.

4. Explica las diferencias que existen entre las combinaciones básicas y los algoritmos correspondientes de las cuatro operaciones fundamentales.

5. Explica y ejemplifica los nexos que existen entre los algoritmos estudiados en la escuela primaria y los algoritmos estudiados en la escuela secundaria.

CAPÍTULO IX

PLANIFICACIÓN DEL TRABAJO DOCENTE Y USO CORRECTO DE LOS MEDIOS DE ENSEÑANZA

OBJETIVOS GENERALES:

Que los participantes en el curso de didáctica de las matemática:

1. Conozcan los elementos básicos a tomar en cuenta en la planificación del trabajo escolar.

2. Planifiquen científicamente la clase de matemática.

3. Conozcan los medios de enseñanza más usados en el trabajo escolar y los apliquen correctamente en el aula de clase.

PRESENTACIÓN:

En los capítulos anteriores hemos tratado de presentar el marco teórico en el cual se desarrolla actualmente la Didáctica de la Matemática. En esta ruta, empezamos por proponer, a nuestro criterio, cuál debe ser la función de la asignatura matemática en nuestro contexto de la formación integral del educando y las líneas directrices como elemento organizador de la asignatura. En un segundo momento, abordamos fundamentos científicos y metodológicos a tomar en cuenta en el desarrollo de las distintas acciones mentales de los alumnos (as), centrando nuestra atención en los siguientes aspectos: elaboración de conceptos, demostración de proposiciones, resolución de problemas, construcción de algoritmos y una propuesta pedagógica para el estudio de la geometría.

Nuestro trabajo no estaría completo si no abordáramos los aspectos relacionados con la planificación. En realidad, todos los aspectos teóricos analizados anteriormente tienen su expresión concreta en el plan de clase. Es el plan de clase o de lecciones como otros lo llaman, el instrumento que refleja la conceptualización de los distintos aspectos tratados en el texto. Por esa razón, estimamos pertinente presentar los aspectos fundamentales de un plan de clase a la luz del marco teórico estudiado en los ocho capítulos anteriores.

Otro aspecto que consideramos de particular interés en este capítulo, lo constituye el análisis de los distintos tipos de clase. En él presentaremos, por consiguiente, a manera de ejemplo, los tipos de clase más comunes en la asignatura de matemática.

Obviamente, incursionaremos además en el análisis del plan anual y el plan de unidad o plan temático.

DESARROLLO DEL CAPÍTULO:

CUESTIONARIO INICIAL

Analiza con tus compañeros y compañeras las respuestas a las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la importancia de planificación en el trabajo docente?

2. ¿Cuáles son los principales aspectos que debe contener: el plan anual, el plan de unidad y el plan de clase?

3. ¿Cuántos tipos de clases conoces? Menciónalos.

4. Además del período de duración. ¿Qué otras diferencias fundamentales encuentras en el plan anual con respecto al plan de unidad y al plan de clase?

5. ¿Cuál es la importancia de los medios de enseñanza en una clase?

6. ¿Cuántos medios de enseñanza conoces? Menciónalos.

7. ¿Por qué es necesario el libro de texto?

8. Describe brevemente como usarías los siguientes medios de enseñanza y para qué tipo de clase: el libro de texto, el papelógrafo, el retroproyector, el video casete, el pizarrón y el marcador o tiza.

ASPECTOS DE LA PLANIFICACIÓN:

La planificación del trabajo docente comprende básicamente tres etapas: la planificación del curso escolar, la planificación de las unidades temáticas y la planificación de la clase.

Planificación del curso escolar: plan anual.

El plan anual es un documento que debe reflejar tres aspectos importantes:

1. Toda la información relacionada con la ubicación del curso. A este aspecto se le llama DATOS GENERALES.

2. Las principales actividades en las que el centro participa y las fechas correspondientes. A esta sección se le llama Actividades Importantes.

3. Una tabla que resume los objetivos, los contenidos y la distribución de estos en el tiempo. He aquí un ejemplo del plan anual.

Plan Anual

I. Datos generales:

1. Nombre de la Escuela ___________ 2. Municipio. ___________3. Departamento. __________

4. Grado. _______________ 5. Profesor ________________ 6. N⁰ de alumnos. _____________

7. Libro de texto. ____

II. Actividades y fechas importantes:

1. Inicio de Clase _____________ último día de clase ________ N⁰ de días de clase. __________

2. Fechas probables para pruebas.

Tipo de prueba	Contenido a examinar	Fecha probable
Primera prueba	Operaciones y relaciones en el conjunto	Entre el 15 y 19 de abril
Parcial	de los números naturales	

3. Actividades Propias de la Escuela

Actividades ....Fecha

Olimpiadas Matemáticas: Primera Eliminatoria...15 de Julio

Fiestas Patrias..14 y 15 de Septiembre.

Fiesta de la Escuela...20 de Agosto.

III. Tabla resumen sobre contenidos y objetivos. (Fragmento)

Número de Unidad	Nombre de Unidad	Objetivos Generales	Tiempo Asignado
1	Los números reales: sus relaciones y operaciones	Utilice las operaciones fundamentales de números naturales y fraccionarios para resolver ejercicios y problemas vinculados con la vida diaria	20 Horas
2	Continuemos trabajando con números fraccionarios	Demuestre razonamiento lógico, capacidad de análisis e interpretación, al resolver situaciones cotidianas relacionada con las operaciones de números naturales y fraccionarios	40 Horas

PLAN DE UNIDAD O PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA

Este plan contiene, como lo vemos en el ejemplo, la formulación de los objetivos específicos a partir de los objetivos generales formulados en el programa oficial, la organización de los contenidos y su distribución en el tiempo, las acciones generales y los medios de enseñanza.

PRIMERA UNIDAD: LOS NÚMEROS NATURALES, SUS RELACIONES Y OPERACIONES

Objetivo General	*Objetivos Específico*	*Contenidos*	*Tiempo*	*Acciones: Generales*	*Medios de Enseñanza*
1.. Utilice las operaciones fundamentales de números naturales para resolver ejercicios y problemas 2.. Demuestre el ordenamiento lógico, capacidad de análisis e interpretación, al resolver situaciones cotidianas relacionadas con las operaciones de números naturales.	1.. Asimile los conceptos de orden, clase y período en la estructura de números naturales	1.. El conjunto de los números naturales estructurado en orden, clase y período.	5 Horas	1.. Dado un número natural, identificar orden, clase, y período.	-Papelógrafo. En papelógramo presentar una tabla donde se ubique órdenes, clase período de un número natural
	2.. Comparten correctamente dos números naturales cualquiera	2.. Relación de orden en el conjunto de los números naturales	5 Horas	2.. Dados los números naturales compararlos usando el criterio correspondiente.	
	3.. Apliquen correctamente los algoritmos y las propiedades de operaciones fundamentales definidas en N en la resolución de ejercicios y problemas	3.. Algoritmo y propiedades de la adición, la multiplicación, la potenciación y la radicación de números naturales.	8 Horas	3.. Construir los algoritmos de las operaciones fundamentales definidas en el conjunto de los números naturales.	-Libro de texto pizarrón, tiza marcador.
	4.. Asimilen la potenciación y la radicación como operaciones inversas	4.. Relación entre la potenciación y la radicación	4 Horas	4.. Calcular el cuadrado y el cubo de un número natural.	
	5.. Asimilen el concepto de ecuación	5.. Ecuaciones Lineales. Concepto definición y resolución.	6 Horas	5.. Dada una ecuación lineal resolverla correctamente.	Guías de laboratorio para construir algoritmos correspondientes
	6.. Resuelvan correctamente ecuaciones lineales.				

Finalmente abordaremos el plan de clase. En el plan de clase se consideran, además del tema, las principales acciones pedagógicas que conducirán al logro del objetivo y al tipo de clase. Uno de los muchos esquemas recomendados es el siguiente:

Unidad: Los números naturales; sus relaciones y operaciones.

Tema: Adición de números naturales (sexto grado)

Objetivo: Asimilar el algoritmo de la adición.

Tipo de clase: Expositiva. (Clase de consolidación)

Este tipo de clase se caracteriza porque el expositor expone en forma ordenada el contenido. En este caso el algoritmo de la adición y los alumnos van siguiendo las instrucciones, ya sea en su libro de texto o en la pizarra y van ejecutando las órdenes o instrucciones del docente.

La clase expositiva es recomendable para aquellos temas con los cuales ya los alumnos y las alumnas están familiarizados y se trata por lo tanto de una clase de consolidación. Se supone que el alumno (a) ya tiene algún dominio del tema y por lo tanto la exposición del profesor le es comprensible.

Medios de Enseñanza: El medio de enseñanza ideal, es el libro de texto, si dicho libro contiene el algoritmo. Si carecemos de texto nos limitaremos a la tiza o marcador y el pizarrón.

Actividades.

1. Escribir en la pizarra el algoritmo de la adición.

Para sumar dos números naturales; sumamos:

- ❑ Unidades con unidades
- ❑ Decenas con decenas
- ❑ Centenas con centenas
- ❑ Miles con miles

En general, para sumar dos números naturales, sigue las reglas siguientes:

a) Suma únicamente cifras o dígitos del mismo orden

b) Cuando la suma de estos dígitos es mayor o igual que 10, escribe únicamente el dígito que corresponde al orden que se suma y el otro los sumas con los dígitos del orden inmediato superior.

2. Proponer y resolver con los alumnos un ejemplo, enfatizando en el algoritmo.

Observa el ejemplo:

Escribe los sumandos en forma vertical e inicia la suma así:

Sumar: **3 429 658 + 3 965 141**

a)

3 429 658 +
3 965 141
799

Hasta aquí la suma de los dígitos es menor que 10

b)

Observa ahora lo que ocurre:

3 429 658
3 965 141
799

14: *Como la suma es mauyor que diez escribe 4 en el lugar de los miles y el 1 lo sumas a los dígitos del siguiente orden.*

c)

1
3 429 658 +
3 965 141 =
94 799

13: *Aquí ocurre lo mismo, por lo tanto, escribe el 3 y el 1 lo sumas con las siguientes cifras de orden inmediato superior.*

d)

1
3 429 658
3 965 141
7 394 799

Por lo tanto:

3 429 658 +
3 965 141 =
Suma o Total **7 394 799**

3. Proponer ejercicios como los siguientes para que los alumnos (as) los resuelvan.

1. Revisa cada una de las siguientes sumas, detecta el error, si existe, corrígelo, escribiendo debajo en el espacio en blanco, la respuesta correcta.

a.
213 181 629 +
193 142 215 +
231 614 219
638 188 063

La respuesta correcta es: ____________

b.
531 421 +
829 132 +
3 140 215
4 100 768

La respuesta correcta es: ____________

c.
243 145 +
8 131 294 +
5 219 321
14 593 760

La respuesta correcta es: ____________

d.
9 412 351 +
6 291 538 +
1 140 201
16 844 090

La respuesta correcta es: ____________

e.
51 321 401 +
22 103 295 +
33 142 321
106 567 017

La respuesta correcta es: ____________

g.
14 315 296 +
73 142 135 +
28 131 423
215 588 854

La respuesta correcta es: ____________

2. El sumando que hace falta en cada una de las siguientes sumas indicadas, es uno de los sumandos de la columna de la derecha; escríbelo en el espacio en blanco y píntalo del color de la suma o total correspondiente.	**Sumandos:** **932 864 156** **754 219 431** **641 328 196**

a.
532 143 100
☐
132 018 102

b.
☐
121 312 012
211 130 003

c.
214 321 100
103 214 310
☐
1 250 499 566

En la clase anterior pudimos haber utilizado como medio de enseñanza el libro de texto, por esta razón diremos algunas palabras al respecto. Evidentemente ningún libro de texto contiene todos los contenidos programáticos ni mucho menos en el orden que aparecen en el programa oficial, salvo textos diseñados especialmente para tal fin en un país determinado. (Caso de la colección NACHO NICARAGÜENSE en Nicaragua).

Por la razón anterior se sugiere lo siguiente:

1. Hacer un análisis del texto antes de adoptarlo. El análisis se debe hacer en las siguientes direcciones:

    1.1 ¿Qué porcentaje del contenido del texto se ajusta a los contenidos programáticos? ¿En que orden aparecen? ¿Hay secuencia?

    1.2 La metodología del texto. ¿Es congruente con la metodología de la didáctica de las matemática?

2. Los ejercicios propuestos por el texto, ¿ayudan a consolidar el marco conceptual?

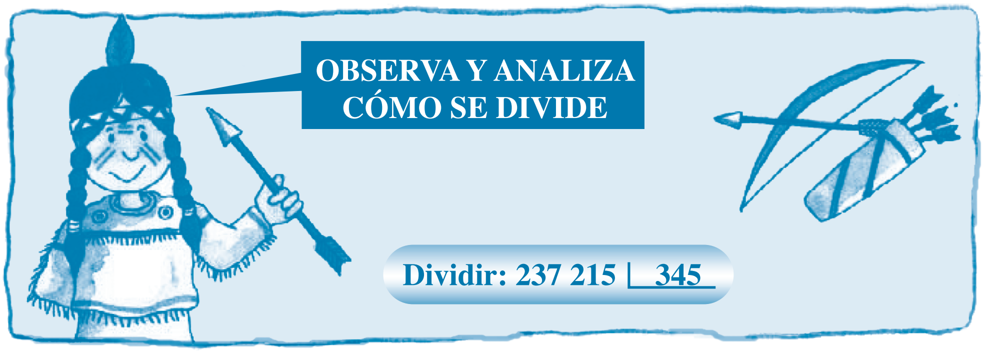
3. En el texto ¿se elaboran conceptos?, ¿se construyen algoritmos?, ¿se demuestran proposiciones?

¿Cómo se usa un libro de texto?

Cuando al grupo de estudiantes cuenta con un texto, su labor docente se hace más fácil por cuanto éste se centra en orientar su correcto uso. El objetivo fundamental de una clase con el libro de texto es que el alumno (a) aprenda a leer el texto; esto es, que el alumno (a) aprenda a aprender en su libro. Es decir, además de estudiar el contenido de una clase propiamente dicho, el profesor debe centrar su interés en el desarrollo de algunas habilidades por parte del alumno (a) como que lea e interprete correctamente el texto.

En el libro Matemática Actualizada, quinto grado, colección Nacho Nicaragüense, pagina 35, aparece el algoritmo para dividir un número natural entre otro número natural de tres cifras. Tomaremos esta página para explicar cómo se usa un libro de texto.

Primer paso: Indicar a los alumnos (as) que abran su texto en la pagina número 35. La siguiente es la página.



Observa y analiza el esquema en cada paso, la dirección y el sentido de la flecha te indicará que hacer primero:

Primer paso:

23 ÷ 3 = → 7 x 345 = 2415
→ 6 x 345 = 2070

23 72 15 | 3 45
20 70 ← 6
03 02

Observa que no tomas el 7 como cociente porque al multiplicarse por 345 el resultado no se puede restar.

Segundo paso:

Baja la siguiente cifra

2 3 7 2 1 5 | 3 45
2 0 7 0 6
3 0 2 1

Puesto que 3021 > 345 procede a dividir 3021 ÷ 345

Tercer paso: equivale a repetir el primer paso:

30 ÷ 3 = → 9 x 345 = 3105
→ 8 x 345 = 2760

23 72 15 | 3 45
20 70 68
30 21
27 60

Resta

¿Por qué no elegiste el 9 como cociente?

Cuarto paso: Baja la siguiente cifra y repite el paso 1:

237215 | 345
- 2070 687
3021
2760
2615
- 2415
200 → (División concluye)

Dividendo : 2372 15
Divisor : 345
Cociente : 687 Residuo: 200

¿Cómo saber si la división está correcta?
Toda división correctamente realizada debe cumplir la siguiente proposición:

(cociente) x (divisor) + residuo = dividendo

Para nuestra división tenemos:

$$\underbrace{687 \times 345}_{237015} + 200 = 237215$$

$$237015 + 200 = 237215$$

Segundo Paso:

Preguntar: ¿De que trata esta página? ¿Qué vamos a hacer en esta página? ¿Qué vamos a estudiar en ella?

Las respuestas deben concluir en la siguiente conclusión: en ésta pagina estudiamos la división de un número natural entre un número de tres cifras.

Tercero: Indicar a los alumnos que lean la introducción dada en el parte indicada por la manita. Explicar: Cada vez que en el texto aparece una manita, eso indica una instrucción que debemos realizar.

Cuarto: Indicar a los alumnos (as) que lean el primer paso. Preguntar: ¿Por qué dividimos 23 entre 3? ¿Qué indica cada flecha? ¿Qué operación estamos realizando? ¿Por qué no tomamos el 7 como consciente? ¿Qué hacemos con el 2070? ¿De donde lo obtuvimos?. Se trata de que el estudiante ponga todas sus capacidades mentales a disposición del contenido del texto. Al final se le pide al estudiante que haga un resumen oral de lo estudiado en el primer paso.

Quinto: Proceder con cuestionamientos similares en los siguientes tres pasos, con el objetivo que el alumno (a) descubra en el texto el algoritmo. Al finalizar el análisis de los cuatro pasos, se le pide a los estudiantes un resumen completo del procedimiento explicado en el texto. Si tal resumen no está completo se debe hacer tantas preguntas como sean necesarias, todo con el objetivo que asimile el contenido del texto. En ningún momento es recomendable usar pizarra y marcador para ampliar, sugerir o inducir una respuesta. El alumno debe encontrarlo todo en el texto.

Sexto: Orientar el cuestionamiento en el sentido de que el alumno (a) descubra la relación entre la multiplicación y la división.

En la mayoría de los centros educativos, el docente usa el contenido del texto para preparar su clase y deja para el estudiante solamente los ejercicios. Con esta actitud, se echa a perder lo más importante de un texto, como es, que el estudiante aprenda a estudiar en su libro, objetivo este último valiosísimo en la formación de la cultura matemática de la que hablamos en el primer capítulo.

LOS LABORATORIOS EN MATEMÁTICA:

¿Qué es un laboratorio? ¿Cómo preparar un laboratorio en matemática?

En general, pedagógicamente hablando, un laboratorio es un conjunto de actividades estructurados de tal forma que conduzcan a un nuevo conocimiento.

La preparación de un laboratorio comprende los siguientes aspectos:

1. El objetivo, nuevo conocimiento o nueva habilidad que el alumno debe descubrir o adquirir.

2. El conjunto de reactivos mediante los cuales el alumno debe llegar al nuevo conocimiento. Tales reactivos son, en esencia, un conjunto de preguntas u orientaciones que se presentan al alumno, por escrito, en lo que se llama “Guía de Laboratorio”. Al alumno (a) sólo se le da la guía, el objetivo queda consignado en el plan de clase del docente.

A continuación presentamos un ejemplo de un plan de clase cuyo tipo de clase es “laboratorio”.

PLAN DE CLASE

Unidad: Geometría

Tema: Clasificación de triángulos por la longitud de sus lados y por la medida de sus ángulos internos.

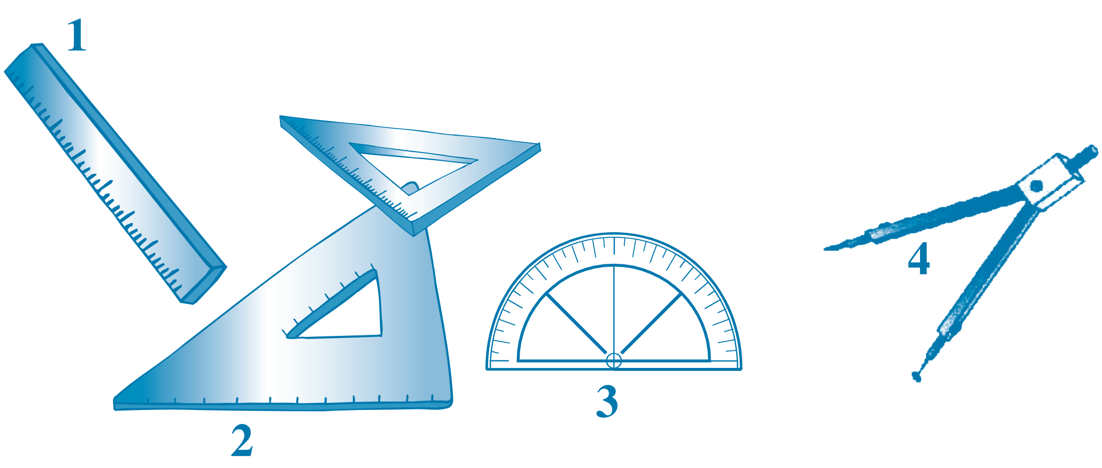
Objetivos: Que los alumnos adquieran habilidades para usar correctamente la regla del compás y el transportador.

Tipo de clase: Laboratorio

Medio de Enseñanza: Guía de laboratorio

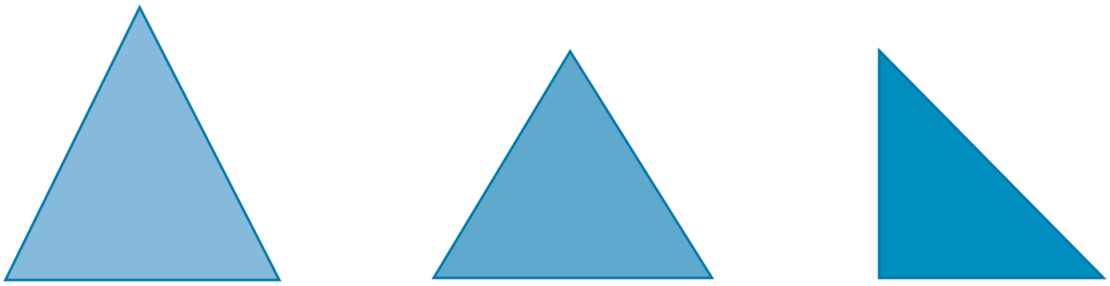
HE AQUÍ LA GUÍA

1. Para esta clase necesitaremos estos instrumentos.



1. **La regla:** Sirve para trazar líneas y medir segmentos.
2. **La escuadra:** Se utiliza para medir ángulos, en el trazado de rectas paralelas y para medir perpendiculares. Las hay de 45 grados y de 60 y 30 grados.
3. **El transportador:** Sirve para medir ángulos.
4. **El compás:** Se usa para trazar circunferencias y arcos y para construir figuras geométricas.

3. Usando el compás solamente, compara los lados de cada triángulo y usando el trasportador, mide los ángulos interiores y clasifica cada triángulo según los criterios dados

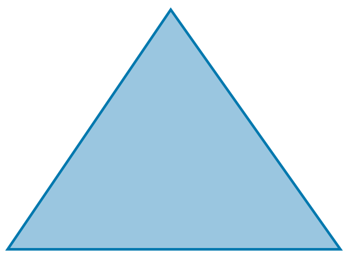


Recuerda: ***Los triángulos se clasifican según la medida de sus lados y de sus ángulos.***

De acuerdo con la **medida de los ángulos,** los triángulos se clasifican en:

- **Triángulo acutángulo** : Tiene tres ángulos agudos.
- **Triángulo obtusángulo** : Tiene un ángulo obtuso.
- **Triángulo rectángulo** : Tiene un ángulo recto.

4. Verifica, usando un compás y un trasordador, que el siguiente triángulo es equilátero.



5. Usando regla y compás, construye un triángulo equilátero. (Las instrucciones para esta construcción están en el capítulo de geometría).

Es importante señalar que un laboratorio, en matemática, no es un conjunto de ejercicios ni un conjunto de problemas que el alumno tenga que resolver en clase o un conjunto de problemas. A esto se le llama clase práctica.

Una de las razones por las cuales una clase de matemática resulta poco motivante es porque todo nuestro trabajo lo realizamos dentro de las cuatro paredes del aula de clase. Esto no tiene porque ser así. Un recurso útil para contrarrestar esto es lo que se llama Trabajo de Campo. Veamos un ejemplo del trabajo de campo.

Los alumnos acaban de estudiar todo lo relacionado con los decimales.

Indíqueles que los alumnos se vayan al mercado, después de clase, pregunten y anoten los precios de productos como una libra de queso, una libra de arroz, la docena de naranjas, etc. Y además:

1. Comparen estos precios en los diferentes puestos. ¿Quién vende más caro o más barato tal producto?

2. Formulen ejercicios con estos precios. Por ejemplo; ¿Cuánto cuesta en el puesto tal dos libras de arroz, 3 de frijoles, y 5 plátanos?

3. Simulen en el aula puestos de venta con vendedores y compradores, etc.

Este tipo de clase también se puede hacer en geometría calculando áreas y perímetros de paredes, pizarras, canchas, etc.

Cuando se estudia el porcentaje, analiza las cuentas de ahorro de un banco, etc.

Otro medio de enseñanza muy útil es el videocasete. A menudo se usa para ampliar la cultura matemática del alumno. Biografías de matemáticos ilustres, estudio de temas específicos como el teorema de Pitágoras, etc. son temas que pueden estudiarse en videocasete. Este tipo de actividad conviene programarlas antes o después de cada unidad programática.

El papelógrafo es un medio de enseñanza bueno y barato. El papelógrafo se puede usar cuando la clase contiene la presentación de ilustraciones que al hacerlas en clase se perdería mucho tiempo. Es el caso del estudio de los sólidos en geometría. También es aconsejable usarlo cuando se trata de que los alumnos interpreten un concepto del cual se pueden desprender otros conceptos subordinados o colaterales. Este es el caso del concepto de cuadrilátero.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Artigue Michele y otros (1998). **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.** Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Blocks, David y Otros (1995). **Educación Matemática.** Grupo Editorial Iberoamericana, México.

Brousseau, G. (1994). **Los diferentes roles del maestro.** Editorial Paidós, México.

Carraher, Teresina (1991) **En la vida diez en la escuela cero.** Siglo XXI. Editores, México.

Castells, Manuel (1997). **Nuevas Perspectivas Críticas en Educación.** Editorial Paidós, México.

Castelnuovo, Emma (1980). **Didáctica de la Matemática Moderna.** Editorial Trillas, México.

Collel Alicia Estela (1995). **Educación Matemática.** Revista editada por Grupo Editorial Iberoamericano. México.

Chevallard, Yves. (1998). **La Transposición Didáctica.** Editorial Aique, Buenos Aires, Argentina.

Colega José y de Guzmán, Miguel. (1989). **Matemática II (C.O.U.).** Editorial Anaya, Madrid, España.

D'Amore, Bruno (1998) **Sobre la Preparación Teórica de los Maestros de Matemática.** Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.

Doudy, Regina (1991). **El niño, la matemática y la realidad.** Editorial Trillas, México.

Gibbons, Michael (1997). **La Nueva Producción del Conocimiento.** Ediciones Pomares Corredor, S. A.

Gómez, Pedro y otros (1995). **Situaciones Problemáticas de Precálculo.** Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Gómez, Pedro y Gómez, Cristina. (1995). **Sistemas Formales e Informales.** Grupo Editorial Iberoamericano, México.

Gutiérrez, Ángela y Jaime Adela (1995). **Geometría y Algunos Aspectos Generales de la Educación Matemática.** Grupo Editorial Iberoamericano, México.

Van Hiele, Geldof (1957). **La didáctica de la geometría en la clase de la escuela secundaria.** Ultrecht-Holanda.

Jungk, Werner (1981) **Conferencia sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 1 y 2.** Editorial de Libros para la Educación. Managua, Nicaragua.

Kil Patric, Jeremy (2000). **Investigación en educación matemática.** Grupo Editorial Iberoamericano. Mex.

Perero, Mariano (1994). **Historia e Historias De Matemática.** Grupo Editorial Iberoamericana.

Jean Piaget, Jean. (1972). **El juicio y el razonamiento en el niño.** Editorial Guadalupe, Buenos Aires, Argentina.

Polya, George (1978). **Cómo Plantear y Resolver Problemas.** Editorial Trillas, México.

Porlan, Rafael (1993). **Constructivismo y Escuela.** Diada Editorial S.L. Sevilla, España.

Rico, Luis y otros (1998). **Educación Matemática.** Grupo Editorial Iberoamericano, México.

Santos, Trigo Luz Manuel (1997). **Didáctica-Lecturas.** Grupo Editorial Iberoamericano, México.

Schoenfeld (1985). **Resolviendo Problemas de Matemática.** Academia Pross, New York.

Sastre, Genoveve y Moreno, Montserrat ( ). **Descubrimiento y Construcción del Conocimiento.** Editorial Paidós, Barcelona, España.

Este libro se terminó de imprimir
en el mes de agosto del 2009
en los talleres gráficos de
EDITORAMA S.A.
Tel.: (506) 2255-0202
San José, Costa Rica

Nº 19.998

Luis Alberto Gutiérrez Cruz. Es nicaragüense. Graduado de Maestro de Educación Primaria en la Escuela Normal Franklin Delano Roosevelt. Obtuvo igualmente su título de Licenciatura en Matemática en la Universidad Autónoma de Nicaragua.
Estudió también Evaluación Educativa en la Universidad del Valle de la ciudad de Guatemala y ha realizado cursos de posgrado en México, Argentina y Chile.
Autor de la serie: **"Matemática Actualizada"**, Colección NACHO para la República de Nicaragua, editada por SUSAETA-España y de la Serie SGS, editada por Editorial Norma. Autor del Libro **Matemática Preuniversitaria,** editado en Nicaragua por Editorial Troqueles.

Tiene más de 20 años de docencia en primaria y secundaria. Catedrático de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, en la década del 70 y catedrático de la Universidad Centroamericana.
Ha dictado conferencias sobre Didáctica de la Matemática en la Universidad de San Carlos, Guatemala. Además, ha participado como expositor en distintos congresos organizados por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Actualmente, es catedrático de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica Redemptoris Mater.

"El desarrollo de una disposición hacia el estudio de la matemática en los estudiantes ha sido una preocupación constante en la educación matemática. Esta es, en gran medida, la razón de ser de la Didáctica de la Matemática... Sin obviar la importancia que tiene el docente y el aumento en el sistema didáctico, el presente texto centra su atención en el determinismo del sistema. Básicamente todo el texto está orientado a dar respuestas a las siguientes preguntas: ¿Cómo desarrollar en el estudiante una disposición hacia el estudio de la matemática? ¿Qué hacer para que el alumno utilice eficientemente el conocimiento aprendido en un contexto o en una situación nueva no analizada en el aula de clase? En nuestro interés, por encontrar respuestas a estas preguntas, partimos del hecho de que el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática es una continua acción mental, donde el estudiante desarrolla diversas habilidades y utiliza diferentes estrategias, con el fin de descubrir el conocimiento matemático. A estas acciones mentales es lo que llamamos "proceso de construcción del conocimiento". Desde esta perspectiva el o la alumna elabora conceptos, realiza demostraciones, construye algoritmos, resuelve problemas, etc. La columna vertebral del texto se refiere a los enfoques didácticos de estas acciones mentales...
El primer capítulo, de los nueve que integran el libro, comprende un análisis de qué es y para qué debemos estudiar matemática y cuál es la función de la asignatura sobre la misma...
Los capítulos II y III están dedicados al análisis de las líneas directrices, con el propósito de que el o la docente tenga elementos de juicio consistentes para analizar un programa de matemática e incluso, estructurar un programa, si el caso lo requiere.
Los capítulos IV al VI están dedicados a las estrategias para la elaboración de conceptos, la demostración de proporciones y la regulación de problemas...
El capítulo VII está dedicado exclusivamente a la didáctica de la enseñanza de la Geometría; el capítulo VIII a la planificación de algoritmos y el último, a la planificación y uso de los medios de enseñanza.
Una característica del texto, que nos parece importante, es la independencia entre capítulos. Puesto que un capítulo no depende del otro, el docente puede enseñar los contenidos a su conveniencia u omitir aquel o aquellos que no necesite.
Desde ya le deseamos éxito a los y las docentes en el uso del texto, que lo hemos escrito pensado en contribuir, aunque sea modestamente, a mejorar su noble y loable labor en el aula."