Ejercicios resueltos *y* propuestos

Ingeniería económica práctica

Complemento virtual

SIL

Darío García Montoya

ECOE EDICIONES

ContabilidadParaTodos.com

www.ContabilidadParaTodos.com es un blog dedicado a **fortalecer la enseñanza-aprendizaje de la contabilidad** dirigido a estudiantes, profesionales, emprendedores, y público en general que desee ampliar sus conocimientos.

Encontrarás una amplia variedad de libros, apuntes, manuales, tesis, ejercicios prácticos y mucho más, para descargar en forma sencilla, de tal forma que pueda entenderse cómo funciona la Contabilidad.

ContabilidadParaTodos.Com

Ejercicios resueltos *y* propuestos
Manejo de la calculadora financiera y tutorial en Excel

Ingeniería económica práctica

Darío García Montoya

ContabilidadParaTodos.Com

García Montoya, Darío
Ingeniería económica : talleres y práctica. -- 1ª. ed. -- Bogotá: Ecoe Ediciones, Universidad Tecnológica de Pereira, 2011.
250 p. ; 24 cm. – (Ingeniería y arquitectura. Ingeniería)

ISBN 978-958-648-696-5

1. Economía industrial 2. Matemáticas financieras I. Título II. Serie

CDD: 658.15 ed. 20
CO-BoBN– a746933

Catalogación en la publicación – Biblioteca Nacional de Colombia

Colección: Ingeniería y arquitectura
Área: Ingeniería

Primera edición: Bogotá, D.C., 2011

ISBN 978-958-648-696-5

© Darío García Montoya
E-mail: dagarmon@hotmail.com

© Ecoe Ediciones
E-mail: correo@ecoeediciones.com
www.ecoeediciones.com
Carrera 19 No. 63C-32, Pbx. 2481449, fax. 3461741

Coordinación editorial: Alexander Acosta Quintero
Diseño y diagramación: Emilse Londoño
Diseño de carátula: Edwin Nelson Penagos Palacio
Correcció de estilo: Alejandro Molina
Impresión: Litoperla Impresores
Carrera 25 No. 8-84, Tel. 3711916

Impreso y hecho en Colombia

ContabilidadParaTodos.Com

CONTENIDO

Capítulo 1
GENERALIDADES Y CONCEPTOS 1
Ingeniería Económica 3
El interés y su clasificación 3
Interés simple 4
Tasa de interés 4
La igualdad y la equivalencia 8
Flujos de caja 9
Ejemplos de flujos de caja 9
Pagos únicos 9
Valor presente (P) 9
Valor futuro (F) 10
Pagos seriados uniformes (A) 10
Seriados crecientes o decrecientes aritméticamente 10
Seriados crecientes o decrecientes geométricamente 10
Nomenclatura 11
Períodos 11
Diagramas de flujos de caja 11
Cuadros o tableros de flujos de caja 15

Capítulo 2
INTERÉS COMPUESTO 17
Definiciones 21
Período de pago (PP) 21
Período de capitalización (PC) 21
Las tasas de interés 21
Interés nominal (i) 21
Interés efectivo (ie) 22
Interés anticipado (ia) 22
Manejo y equivalencias de las tasas de Interés 22

ContabilidadParaTodos.Com

Transformación de un interés nominal a un interés efectivo 23
Primer caso: Período de Pago = Período de Capitalización (PP = PC) .. 23
Segundo caso: Período de Pago < Período de Capitalización (PP < PC) 23
Tercer caso: Período de Pago > Período de Capitalización (PP > PC).... 24
Uso de las calculadoras 24
Interés anticipado..... 25
Transformación de interés anticipado a interés efectivo 25
Primer caso: PP = PC Período de pago = Período de capitalización 26
Segundo caso: PP > PC Período de pago > Período de capitalización .. 27
Tercer caso: cuando PP < PC Primero se reduce la ia
a igual período del PP 28
Método práctico 28
Tasas combinadas (ic) 31
Fórmula para calcular la tasa combinada 32
Tasa combinada en descuentos..... 33
Problemas sobre tasas de interés 34

Capítulo 3
FÓRMULAS Y FACTORES DE RECUPERACIÓN DE CAPITAL 39
Fórmulas y factores con pagos únicos 41
Cantidad futura compuesta pago único (F) 41
Uso de los factores 45
Configuración de la calculadora 45
Valor presente pago único 48

Capítulo 4
LA AMORTIZACION Y LA CAPITALIZACIÓN 57
Fórmulas y factores para flujos de caja con series uniformes..... 59
Uso del factor 61
Configuración de la calculadora..... 61
Cuadro de pagos o cuadro de amortización 62
Valor presente de una serie uniforme 69
Vida infinita o perenne..... 74
Costo capitalizado y recuperación de capital cuando la vida es infinita .. 74
Problemas generales sobre series 77
Fondo de capitalización (cuotas capitalizables) 81
Cantidad futura compuesta serie uniforme 85
Cantidad acumulada (capital más intereses) con una serie
de depósitos iguales 85

ContabilidadParaTodos.Com

Problemas que involucran series uniformes y pagos únicos en
períodos diferentes 90
Problemas propuestos 94

Capítulo 5
GASTOS RECURRENTES 101

Capítulo 6
PERÍODOS DESCONOCIDOS Y DE LA TIR 109
Cálculo de n períodos desconocidos..... 111
Tasa Interna de Retorno (TIR) 116
Procedimiento para calcular la TIR..... 117
Problemas con series y con períodos diferentes 124
Problemas propuestos..... 125

Capítulo 7
FÓRMULAS QUE INVOLUCRAN SERIES ARITMÉTICAS. GRADIENTES ARITMÉTICOS CRECIENTES Y DECRECIENTES131
Seriados crecientes o decrecientes aritméticamente 133
Valor presente del gradiente aritmético creciente 134
Manejo del gradiente creciente 135
Programación de la calculadora financiera 139
Poblemas propuestos 146
Transformación de una serie gradiente creciente en una serie uniforme 147
Gradiente aritmético creciente infinito 151
Gradiente aritmético decreciente. Equivalencia en valor presente..... 152
Manejo del signo del gradiente 157
Taller de gradientes aritméticos. Cálculo de i % y de n 158
Gradiente aritmético decreciente infinito 162
Transformación del gradiente decreciente a una serie uniforme 163
Caso especial de los gradientes aritméticos decrecientes 166
Problemas propuestos 167
Problemas con gradientes aritméticos y períodos diferentes 168
Gradiente Aritmético Escalonado 171
Manejo matemático de los gradientes aritméticos escalonados 172

Capítulo 8
GRADIENTES GEOMÉTRICOS (ESCALERA, PORCENTUALES) 179
Diagrama del gradiente porcentual creciente 182

ContabilidadParaTodos.Com

Fórmula para calcular el P de una serie creciente porcentual 182
Fórmula para calcular la primera cuota de una serie creciente porcentual..... 183
Gradiente porcentual decreciente 190
Problemas propuestos gradientes aritméticos y porcentuales 201
Problemas con gradientes aritméticos, geométricos y con períodos diferentes 206
Gradientes geométricos escalonados: crecientes o decrecientes 208
Presentación general del gradiente geométrico escalonado 211
Fórmula para calcular el valor presente de un gradiente geométrico o porcentual escalonado 212
Problemas propuestos 231

Capítulo 9
LA UVR 233
Unidad de Valor Real (UVR) 235
Manejo financiero de la UVR 236
Problemas propuestos 239
Crédito Hipotecario en UVR 241
Problemas propuestos 252

Capítulo 10
EVALUACIÓN ECONÓMICA DE ALTERNATIVAS 257
Comparación en valor presente de alternativas con vidas útiles iguales 259
Comparación en valor presente de alternativas con vidas útiles diferentes ... 264
Comparación de alternativas con el método del CAUE (Costo Anual Uniforme Equivalente) 269
Problemas propuestos 276

Capítulo 11
BONOS 281
Terminología básica 283
Ejemplo de un proyecto de emisión de bonos 284
Manejo Financiero de los bonos 290
Problemas generales de bonos 292

Capítulo 12
INFLACIÓN 297
Causas principales 299
Otras causas laterales 299

ContabilidadParaTodos.Com

Efectos 299
Forma de remover los efectos de la inflación 299
Cálculos de VF considerando la inflación 301
Tasa para convertir los pesos de hoy en pesos del futuro con poder de compra de hoy 301
Cálculo para factores de recuperación de capital 302
Problemas sobre la inflación 303
Problemas sobre devaluación 305

Bibliografía 306

ContabilidadParaTodos.Com

Con mucho cariño y reconocimiento a
mi esposa y familia por su comprensión,
estímulo y sacrificio.
Igualmente a mis alumnos que han
colaborado en la elaboración y
presentación de este material.

PRÓLOGO

Las actividades y operaciones financieras han sido, a través de la historia de la humanidad, el eje principal del desarrollo y progreso que han permitido e impulsado la industrialización.

Para lograr las mejores decisiones económicas cuando se hace el análisis de alternativas de inversión, es necesario conocer los principios básicos de los procedimientos económicos y sus aplicaciones en el proceso del estudio de inversiones que garanticen una rentabilidad adecuada y un desarrollo progresivo en términos económicos.

La decisión de invertir tiene que ver con la estructura operacional de la empresa y con una de las funciones de la Administración Financiera que es definir cómo, cuándo y dónde invertir.

El estudio de la Ingeniería Económica ofrece los conocimientos básicos necesarios para la toma de decisiones, y constituye una herramienta fundamental, actualizada y equilibrada, para manejar el dinero eficientemente a través del tiempo y teniendo como fines primordiales rentabilidad y oportunidades de inversión.

Se pretende en este texto que los estudiosos de esta disciplina encuentren las herramientas, procedimientos matemáticos y, en general, los elementos necesarios y suficientes para el análisis económico y la evaluación de alternativas de inversión.

Para lograr este objetivo, la distribución de los temas se inicia con los conceptos básicos necesarios para entender la terminología en el campo financiero y, progresivamente, se introducirán los métodos matemáticos que se utilizan en el manejo del dinero cuando se tiene la posibilidad de inversión.

Uno de los factores determinantes en estos procesos es el conocimiento y el manejo de las tasas de interés en sus diferentes denominaciones, y sus transformaciones a las equivalencias que se deben utilizar. Este tema será estudiado en el capítulo 2, para poder utilizarlas en los capítulos posteriores, cuando se presenten diferentes períodos de pago que hagan necesario el uso de tasas equivalentes.

Las herramientas que se utilizarán, además de las fórmulas y factores, serán inicialmente las calculadoras financieras de las cuales, además de enseñar el manejo normal de ellas, se explicará la forma de programarlas cuando sea necesario.

La segunda gran herramienta es Excel y sus aplicaciones financieras. A lo largo del texto se muestran soluciones obtenidas en esta hoja electrónica, cuadros de pagos y gráficas explicativas.

Adicionalmente, en el complemento virtual elaborado para el libro se diseñó un tutorial que enseña a resolver cualquier problema de los expuestos como ejemplos o propuestos, y que antes fueron resueltos manualmente o con el uso de la calculadora.

Con el estudio del archivos que componen este complemento virtual subido al Sistema de Información en Línea de ECOE y con el conocimiento de los conceptos teóricos y definiciones básicas, es posible que cualquier persona no experta en temas financieros pueda resolver, sin la utilización de fórmulas ni calculadoras, problemas de Ingeniería Económica.

En general, el libro es un compendio sobre temas fundamentales del campo de las finanzas, necesario para entender el mundo de los negocios. Se utilizó un lenguaje claro, sencillo, práctico, rico en conceptos, con una amplia gama de casos resueltos, utilizando fórmulas y funciones financieras de Excel.

Debo agradecer a mis alumnos de la Universidad Libre de Pereira, quienes con sus inquietudes, preguntas e interés en el tema han apoyado la elaboración de este trabajo.

El autor

Capítulo 1

Generalidades

INGENIERÍA ECONÓMICA

Es una técnica que utiliza procedimientos, métodos y fórmulas matemáticas para analizar, evaluar y comparar alternativas económicas y determinar cuál es la mejor en términos económicos.

En ingeniería económica se utilizan algunos términos de los cuales es necesario conocer su significado. Ellos son:

Analizar: es un estudio sobre cuáles serán los ingresos y egresos que generará la inversión durante su vida útil o tiempo de operación, en una situación financiera o económica tal como una inversión que se pretenda realizar.

Evaluación: una vez conocidos los flujos proyectados de caja (ingresos y egresos) que generará la inversión analizada, se cuantifican los valores económicos a través del tiempo, utilizando fórmulas y procedimientos matemáticos para determinar la rentabilidad y la viabilidad económica del proyecto.

Esta evaluación se hará en términos porcentuales (tasa de retorno de la inversión, rendimiento porcentual) y en términos de dinero.

Alternativa: se refiere a una opción u oportunidad de inversión. Por ejemplo: proyectar el montaje de empresa industrial, comercial, de servicios, comprar acciones, bonos o constituir depósitos (ahorros) en entidades financieras, etcétera. A cada alternativa siempre se le opone la contraria, que consiste en no hacer la inversión o en preferir otra si su rendimiento financiero es mejor.

Los elementos de medida que se utilizan en la evaluación y comparación de alternativas son el dinero y el rendimiento o utilidad porcentual que genere cada alternativa (tasa de interés).

El dinero: es un medio circulante con poder de compra o adquisición de bienes o servicios. Al igual que cualquier bien raíz (vehículos, maquinaria, etcétera) que se puede arrendar para que genere un canon de arrendamiento, el dinero también se puede arrendar (prestar, depositar en una entidad financiera) para que genere un rendimiento, pero en este caso este rendimiento se llama interés.

EL INTERÉS Y SU CLASIFICACIÓN

El interés es el dinero que genera más dinero a través del tiempo, cuando se invierte. Es el valor del dinero en el tiempo, o más precisamente, el cambio en la cantidad de dinero durante un período de tiempo, cuando éste se ha tomado en préstamo o se ha invertido.

Así como se paga, por ejemplo, un arrendamiento de un inmueble por usarlo, de igual manera podríamos asimilar el interés como el dinero que se debe pagar por el uso de un capital tomado en préstamo.

Ahora bien, el interés se clasifica en simple y compuesto (este último se estudiará completamente en el capítulo 2).

Interés simple

Una operación financiera se hace con interés simple cuando durante todo el tiempo de la transacción *sólo el capital* genera intereses, independientemente de si éstos se retiran (se cancelan) o no. Es decir, el interés simple no se le adiciona al capital para generar nuevos intereses.

El interés se representa por la letra I (mayúscula) y se calcula así:

Interés (I) = Cantidad acumulada - Inversión inicial.

Cantidad acumulada: Cf

Cantidad inicial: Ci $\boxed{I = Cf - Ci}$ (a) o $\boxed{Cf = Ci + I}$ (b) Fórmula 1

Ejemplo: para cancelar una deuda de $10.000 dentro de 3 años debo pagar $13.000. ¿Cuál es el interés ganado?

I = 13.000 - 10.000 = $3.000

Observe que la unidad de medida del interés son pesos (dinero).

Tasa de interés

Es el interés expresado en porcentaje y por unidad de tiempo. Se representa con la letra *i* y se calcula así:

$$i\,\% = \frac{\text{Interés acumulado por unidad de tiempo}}{\text{Cantidad inicial}} \times 100\% \qquad i\,\% = \frac{I}{Ci} \times 100\%$$

Cuando se tienen varios períodos unitarios (2, 3, 4… n períodos), la fórmula anterior se divide por el número de períodos.

Simbólicamente la fórmula se expresa así:

$$i\,\% = \frac{I \times 100\%}{n \times \text{Cantidad inicial}} \qquad i\,\% = \frac{I \times 100\%}{n \times Ci}$$ Fórmula 2

Símbolos:

C_F Cantidad acumulada (Capital final, Valor futuro)
C_i Cantidad inicial (Capital inicial, Valor presente)
n Número de períodos (años, semestres, meses, trimestres, días, etc.)
I Interés
i Tasa de interés

La tasa de interés simple se puede multiplicar o dividir para expresarla en unidades de tiempo diferentes. Ejemplo: una tasa del 2% simple mensual es equivalente a una tasa del 24% simple anual, se multiplicó por 12 que son los meses del año. Una tasa del 9% simple semestral es equivalente a una tasa del 1,5% simple mensual, se dividió por 6 que son los meses del semestre.

Con el fin de simplificar la escritura de las fórmulas, omitiremos la escritura del valor "100%" y utilizamos el i% como número índice, es decir, el porcentaje expresado como número decimal, ejemplo: i% = 4%, lo escribimos como i = 0,04.

De acuerdo con la nomenclatura anterior, y aplicando la simplificación antes descrita, las ecuaciones o fórmulas dadas se representan así:

Fórmula 1	**Fórmula 2**	**Fórmula 3**
		Remplazando en (b) la fórmula 2
$I = C_f - C_i$ (a)	$i = \frac{I}{n \cdot Ci}$	$C_f = C_i + i \cdot n \cdot Ci$
		Despejando Cf
$C_f = C_i + I$ (b)	$I = i \cdot n \cdot C_i$	$C_f = C_i (I + i \cdot n)$

Problema 1

Se recibieron $60.000 de interés durante un semestre por un depósito en un banco comercial. Si el banco reconoce una tasa de interés simple del 7% trimestral y liquida a sus clientes sobre saldos trimestrales, ¿cuál fue el capital depositado inicialmente?

Respuesta: $428.571,43

$I = n \cdot i \cdot Ci$

$Ci = \frac{I}{i \cdot n}$

I = $60.000
n = 2 trimestres (un semestre) Ci = 60.000/0.07 x 2 = $428.571,43
i = 7% trimestral

Problema 2

Si las condiciones de un préstamo con interés simple se expresan mediante la ecuación:

$$VF = 500 + 120\ t.$$

Donde VF es el valor futuro y t es el tiempo en años, determine:

a) La tasa de interés simple. R/ 24%
b) El tiempo transcurrido para que el inversionista reciba $600 de interés total. R/ 5 años.
c) ¿Cuál será la deuda inicial del quinto año si el banco prestamista no ha recibido intereses de mora y no cobra interés de mora? R/ 980.00

Solución:

a) $I = C_f - C_i \rightarrow \underbrace{C_f = C_i + I}_{\text{de } (1)} \rightarrow C_f = C_i + C_i \cdot i \cdot n$ de fórmula 4

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$VF = 500 + 120t$ de (3) $i = 24\%$

$120t = 500 \times i \times t$ de (2) porque $t = n$

b) $120t = C_i \cdot i \cdot n$ = Interés (I) = 600 $t = 600/120 = 5$ años

c) $C_{f4} = 500 + 120 \times 4 = \$980$ Porque el final del año 4 es el principio del año 5.

Problema 3

Pedro Ramírez posee una letra de cambio de tres meses de vencimiento a interés simple del 4% mensual. Por necesidades de dinero lleva esta letra a una agencia de cambio (AC) y Ramírez admite recibir un adelanto de $150.000 de la AC. ¿Cuánto dinero debe recibir al final del trámite, si la AC cobra un interés simple del 7% mensual en todas las operaciones y el valor nominal de la letra es de $300.000?

Respuesta: $154.500.

Problema 4

Juan Pérez recibe un préstamo extrabancario de $200.000. Si el interés convenido es del 6% mensual simple y canceló en total intereses por $216.000, ¿por cuánto tiempo mantuvo Pérez el préstamo?

$$I = Ci.i.n \quad 216.000 = 200.000 \times 0{,}06 \times n \quad n = 18 \text{ meses}$$

Problema 5

El contador Morales consigue un préstamo de $3.000.000 a dos años de plazo, con una tasa de interés simple del 3% bimestral. ¿Cuánto pagará al final de los dos años?

Respuesta: $4.080.000

Problema 6

¿En cuánto tiempo se triplica una inversión con un interés simple del 23% anual?

Respuesta: 8,69 años

$$C_f = Ci + Ci.i.n \rightarrow 3Ci = Ci + Ci.\ 0.23.\ n \rightarrow n = 2/0{,}23 = 8{,}69 \text{ años}$$

Conversión a años, meses y días: 0,69 x 12 = 8.28 meses; 0.28 x 30 = 8 días
8 años, 8 meses, 8 días

Problema 7

Una deuda se pactó pagarla en tres cuotas, así: dentro de dos meses $100.000, dentro de cuatro meses $300.000, dentro de cinco meses $500.000. El interés es simple

y del 2,7% mensual. El deudor le ofrece a su acreedor pagarle toda la deuda dentro de un mes con $840.000. ¿Se debe aceptar esta propuesta?

i% = 2,7% mensual (simple)

$C_f = C_i (1 + i \cdot n)$ $C_i = C_f \div (1 + i \cdot n)$

Calculamos la deuda hoy, trasladando los flujos al período cero

Inicial de la cuota de 100.000 en 2	C_i = 100,000 ÷ (1 + 0,027 x 2)	C_i = 94.877
Inicial de la cuota de 100.000 en 4	C_i = 300,000 ÷ (1 + 0,027 x 4)	C_i = 270.758
Inicial de la cuota de 100.000 en 5	C_i = 500,000 ÷ (1 + 0,027 x 5)	C_i = 440.529
		Total hoy 806.163
La deuda hoy llevaba al mes uno	C_f = Ci (1 + i • n)	
	C_f = 806.163 (1 + 0.027 x 1)	C_f = 827.930

Se debe aceptar la propuesta porque le ofrecen una cantidad mayor.

Problema 8

¿Cuál de las siguientes opciones de gratificación conviene más a los intereses de un empleado? a) recibir ahora $700; b) recibir ahora $200 y $600 a los 60 días; c) recibir tres pagos iguales de $250 c/u a 30, 60 y 90 días.

Tasa de interés simple del 42% anual

Respuesta: a) $700, b) $760,64 c) $701,42 mejor b.

Problema 9

Usted tiene 3 cheques posfechados parar cobrar, así: $150.000 para dentro de 6 meses, $135.000 para dentro de ocho meses y $350.000 para dentro de 12 meses. Debido a una urgencia de efectivo se ve en la necesidad de negociar estos cheques en una casa de cambio que le cobra el 2,8% mensual simple. ¿Cuánto dinero espera recibir sí la negociación la realiza en el día de hoy?

Respuesta: $500.694,82

Problema 10

Pedro debe pagar tres deudas así: $1.500.000 dentro de cuatro meses, $2.500.000 para dentro de seis meses y $3.000.000 para dentro de ocho meses. Estas deudas fueron calculadas con un interés simple de 2,5% mensual. Pedro le propone a su acreedor pagarle hoy $6.500.000 para cancelar toda la deuda. ¿Debe aceptar el acreedor esta oferta?

Respuesta: Valor deuda original en pesos de hoy: $6.037.549. Debe aceptar la oferta de Pedro.

Problema 11

Pedro tiene que pagar una letra de cambio de $2.000.000 dentro de ocho meses y otra de $3.000.000 dentro de 18 meses. Su acreedor le acepta cambiar estos pagos por uno de $1.500.000 en el día de hoy y otro pago al final del año. Calcular el valor de este último pago, si la tasa de interés es del 2% mensual simple.

Respuesta: $3.013.225,15

Problema 12

Una empresa tiene que cancelar dentro de dos años una obligación de $5.500.000, y desea liquidarla sustituyéndola por dos pagos iguales en los meses 10 y 22. Si la tasa de interés simple es del 3% mensual, ¿cuál es el valor de las cuotas?

Respuesta: $2.217.742

LA IGUALDAD Y LA EQUIVALENCIA

Estos dos conceptos a menudo se confunden o no se interpretan adecuadamente en términos económicos. Vamos a tratar de establecer la diferencia entre ellos.

Si asumimos una inflación de 10% anual y un artículo hoy vale $10.000, dentro de un año el mismo artículo tendrá un costo de $11.000. Esto quiere decir que hoy $10.000 tendrán el mismo poder de compra que $11.000 dentro de un año. Debemos entender que $10.000 hoy son equivalentes a $11.000 dentro de un año, pero no son iguales en cantidad.

De otra manera, si queremos comprar dentro de un año un artículo que hoy vale $10.000, debemos invertir el dinero hoy a una tasa del 10% anual para conseguir un interés de $1.000 y reunir $11.000 dentro de un año para comprar el mismo artículo.

Si el precio de los artículos se infla a través del tiempo, el dinero también debe inflarse con una tasa financiera para conservar el poder de compra. Si la tasa financiera de la inversión es igual a la inflación, decimos que nuestro dinero conserva el poder compra. Si la tasa financiera es mayor que la inflación por ejemplo 15% anual, al cabo de un año tendríamos $11.500 lo que genera una utilidad real de la inversión por encima de la inflación de $500.

Pero si la tasa financiera es inferior a la inflación, por ejemplo 8% anual, al cabo de un año la inversión logra acumular $10.800, dinero que no alcanza a comprar el mismo artículo. Decimos que nuestro dinero ha perdido poder de compra aunque tengamos $800 más.

En general, cuando invertimos el dinero hoy a una tasa financiera, al cabo de cierto tiempo este dinero se ha inflado con los intereses acumulados. Si esperamos recibir dentro de cierto tiempo una cantidad de dinero y la negociación la hacemos hoy (tiempo presente), para saber a cuánto equivale hoy la negociación, debemos desinflar esa cantidad (quitarle el interés).

En resumen, el dinero de hoy invertido a una tasa i% durante un tiempo se infla (aumenta), pero el dinero del futuro llevado a valor presente se desinfla con la tasa i%.

La igualdad del dinero solo se puede dar cuando los diferentes flujos de dinero son trasladados todos a un mismo período futuro o al presente.

Conclusiones:

1. Los dineros colocados en períodos diferentes pueden ser equivalentes pero nunca iguales.
2. La igualdad del dinero sólo puede darse cuando los diferentes flujos de dinero son trasladados a un mismo período.

Esto nos debe advertir que las fórmulas que utilizaremos, que son igualdades (=), tendrán, como uno de los fines, que trasladar dineros del presente al futuro (inflar) o del futuro al presente (desinflar).

FLUJOS DE CAJA

Son los ingresos y egresos de dinero que ocurren en una empresa por su activad económica en un período determinado. Estos flujos de caja pueden ser pagos únicos (ocurren solo una vez) o seriados. Los seriados pueden ser iguales (constantes en valor, uniformes), crecientes cada vez o decrecientes cada vez.

El crecimiento o decrecimiento puede ser constante aritmética o porcentualmente.

- Flujos de caja
  - Pagos únicos
    - Valor presente (P)
    - Valor futuro (F)
    - Series uniformes (A)
  - Pagos seriados
    - No uniformes
      - Crecientes o decrecientes aritméticamente
      - Crecientes o decrecientes en porcentaje

Gráfico 1. Flujos de caja.

Ejemplos de flujos de caja

Pagos únicos

Cuando se hace referencia a pagos únicos nos referimos tácitamente a los ingresos y egresos. La misma referencia para los seriados. Son únicos porque solo ocurren una vez.

Valor presente (P)

Pagar hoy un equipo, un vehículo, una propiedad, cobrar hoy un dinero, vender hoy un bien, etcétera.

Valor futuro (F)

Vender algo dentro de cierto tiempo, pagar una deuda dentro de cierto tiempo, en general, tener ingresos o egresos por una sola vez en tiempo futuro.

Los conceptos de *presente* y *futuro* son relativos entre ellos. Asumamos un ingreso hoy de $10.000, un ingreso dentro de dos años de $5.000 y un ingreso de $8.000 dentro de cinco.

El ingreso de $10.000 hoy es presente para los para los períodos dos y cinco.

El ingreso de $5.000 dentro de dos años es futuro para el período de hoy y presente para el período cinco.

El ingreso de $8.000 es futuro para los períodos de hoy y para el período dos.

Pagos seriados uniformes (A)

Recordemos que una serie es consecutiva, por lo tanto los pagos deben ser consecutivos, sin interrupciones, y para que sean uniformes deben tener el mismo valor. Ejemplos: los sueldos fijos de un trabajador, el canon de arrendamiento durante los 12 meses, las cuotas iguales para pagar un crédito, las dos primas semestrales, el cargo fijo mensual de los servicios públicos, etcétera.

Seriados crecientes o decrecientes aritméticamente.

Pagos mensuales, trimestrales, semestrales, anuales, etcétera, de cuotas u obligaciones iniciando con un valor determinado y cada pago posterior se aumenta en una cantidad fija de pesos, o disminuye una cantidad fija de pesos.

Pagar o recibir cinco cuotas mensuales empezando con $200 y cada vez aumenta o disminuye en $20:

Creciente	200	220	240	260	280
Decreciente	200	180	160	140	120

El incremento o decrecimiento de $20 se llama Gradiente (G)

Seriados crecientes o decrecientes geométricamente.

Pagos mensuales o anuales de cuotas u obligaciones iniciando con un valor determinado y cada pago se aumenta o disminuye en un porcentaje constante.

Pagar o recibir cinco cuotas mensuales empezando con 200 y cada vez aumenta o disminuye en 10%:

Creciente	200	220	242	266,2	292,82
Decreciente	200	180	162	145,8	131,22

Nomenclatura

Los diferentes flujos de caja se representarán mediante símbolos alfabéticos para simplificar su escritura:

Valor presente	P
Valor futuro	F
Serie uniforme	A
Tasa de interés	i%
Períodos	n

Las series crecientes o decrecientes las estudiaremos más adelante

Períodos

Los períodos son las diferentes unidades de tiempo que usualmente se utilizan en las operaciones financieras: anuales, semestrales o bianuales, cuatrimestrales, trimestrales, bimestrales o cada dos meses, mensuales, quincenales o bimensuales, semanal y diario.

Otras unidades de tiempo menos usadas son: bienio o cada dos años, trienio o cada tres años, cuatrienio o cada cuatro años, quinquenio o lustro o cada cinco años, etcétera.

Diagramas de flujos de caja

Los diferentes flujos de caja se deben representar en diagramas que faciliten la visualización y la interpretación de ellos para determinar la metodología que se debe seguir en la solución del problema económico propuesto.

Para el diagrama se utiliza el plano cartesiano. El eje horizontal de las X se denominará eje del tiempo o de los períodos. En él se dibujarán los diferentes períodos (n). El eje vertical o de la ordenada se denominará eje del dinero o flujo ($). Los ingresos se representan con flecha hacia arriba (flujo positivo) y los egresos con flecha hacia abajo (flujo negativo). El tiempo futuro se representa desde el origen hacia la derecha y el tiempo pasado desde el origen hacia la izquierda. Por simplificación se puede omitir el dibujo del eje vertical.

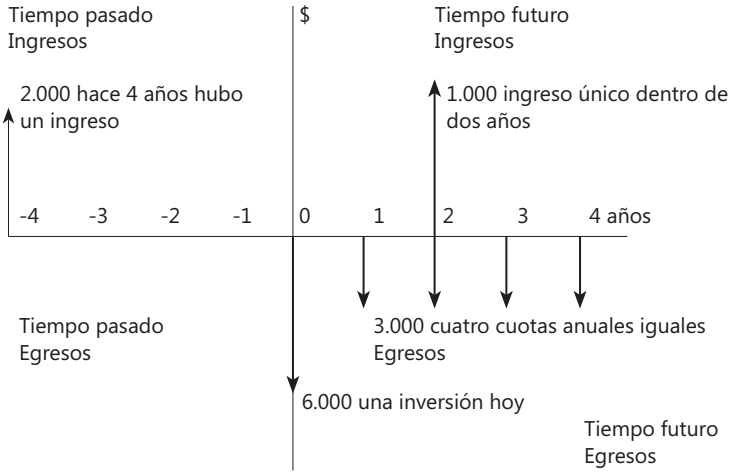
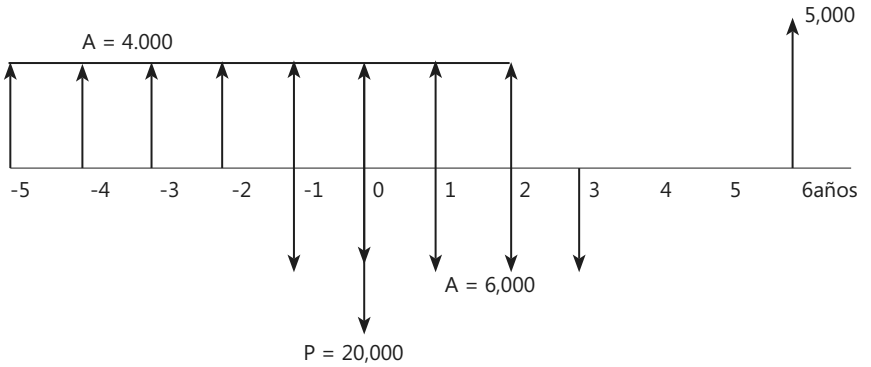


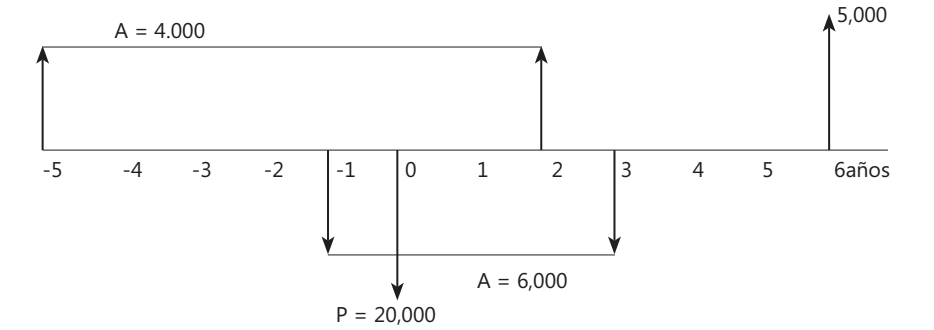
Gráfico 2 Diagrama de flujos de caja.

Problema 13

Graficar los siguientes flujos de caja: una inversión hoy de $20.000; desde hace cinco años y hasta dentro de dos años ingresos de $4.000; un ingreso de $5.000 dentro de seis años; gastos desde hace un año y hasta dentro de tres años de $6.000 anuales.

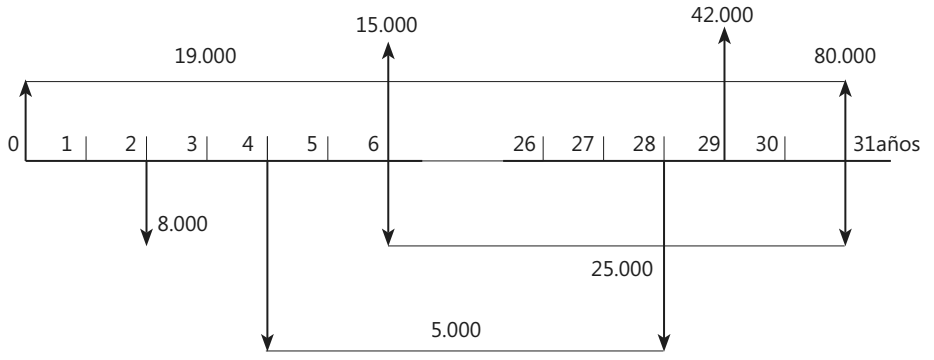


Una forma más simplificada para dibujar el diagrama anterior es omitiendo las flechas intermedias de las series uniformes, y se sustituyen por una línea horizontal que una el primer pago de la serie con el último.



Problema 14

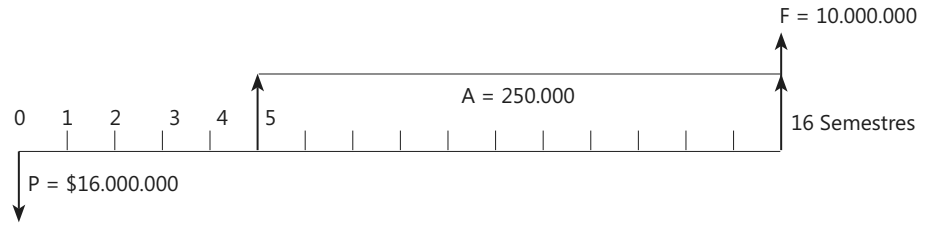
Elaborar el diagrama del siguiente flujo de caja: ingresos anuales e iguales de $19.000 desde hoy hasta el año 27; un ingreso de $12.500 en el sexto año; un ingreso de 80.000 en el año 31, otro ingreso de $42.000 en año 29, un egreso de $8.000 en el año 2, egresos anuales uniformes de $5.000 del año 4 al 28 y otro egreso anual uniforme de $25.000 del año 6 al 31.



Problema 15

Hoy se hace un depósito en una entidad financiera por un valor de $16.000.000. A partir del quinto semestre se empezará a retirar cada vez $250.000 y hasta el semestre 16. Adicionalmente, en el semestre 16 se podrá retirar el resto del dinero que será $10.000.000 y dejar la cuenta en cero. Elaborar el diagrama de flujo de caja.

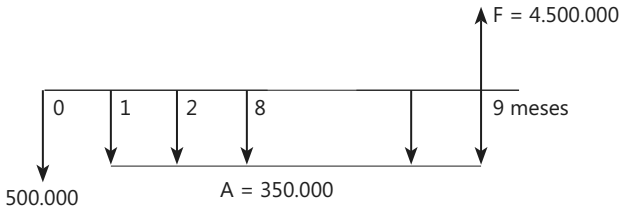
Solución:



Problema 16

Dentro de nueve meses tengo una obligación hipotecaria por un valor de $4.500.000. Para cancelar este valor he decidido abrir hoy una cuenta bancaria. La apertura de esta cuenta la haré con $500.000 y cada mes posterior y hasta el final del noveno mes haré depósitos iguales de $350.000. Elaborar el diagrama de flujo de caja.

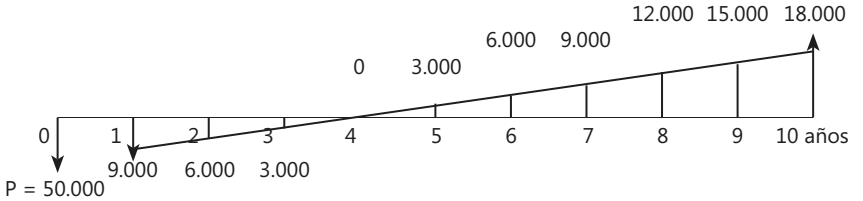
Solución:



Problema 17

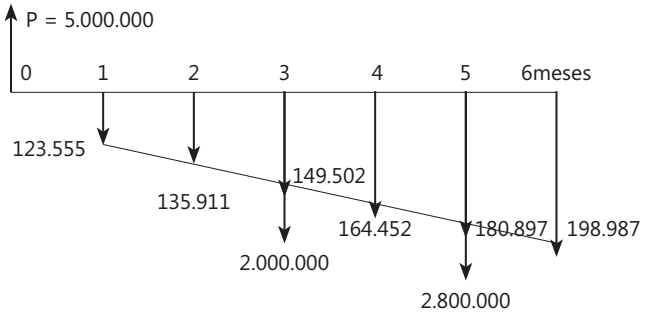
Supongamos que una empresa pronostica que los primeros tres años de funcionamiento producirá pérdidas anuales decrecientes así: el primer año perderá $9.000, el segundo perderá $6.000, el tercero perderá $3.000, el cuarto estará en el punto de equilibrio, es decir, tendrá utilidades de $0.00. Del quinto año en adelante empezará a ganar $3.000, el sexto ganará $6.000 y así sucesivamente hasta el décimo año. El valor inicial de la inversión es de $50.000. Elaborar el diagrama de flujo de caja.

Solución:



Problema 18

Hoy se adquiere una deuda de $5.000.000 para ser pagada en seis cuotas mensuales crecientes en cada mes. La primera cuota será de $123.555. Después de la primera cuota cada una de las posteriores crecerá un 10% con respecto a la anterior. Además se tiene previsto hacer dos abonos extras por valor de $2.000.000 y $2.800.000 en el tercero y quinto mes, respectivamente. Elaborar un flujo de caja utilizando un diagrama.



Cuadros o tableros de flujos de caja

Además de la información que se puede consignar en los diagramas, estos flujos se pueden presentar en forma matricial mediante cuadros que contengan: una columna que identifique el período y otras columnas que identifiquen los ingresos y los egresos. Adicionalmente se puede utilizar si es conveniente otra columna para escribir el flujo neto de cada período. El flujo neto es la suma algebraica de los ingresos y egresos en un mismo período. Tomemos como ejemplo un problema anterior, el diagrama de flujo del Problema 13.

Elaborar un tablero con el flujo de caja del problema.

Solución:

Período	Ingreso	Egreso 1	Egreso 2	Flujo neto
-5	4.000			4.000
-4	4.000			4.000
-3	4.000			4.000
-2	4.000			4.000
-1	4.000	6.000		-2.000
0	4.000	6.000	20.000	-22.000
1	4.000	6.000		-2.000
2	4.000	6.000		-2.000
3		6.000		-6.000
4				0
5				0
6	5.000			5.000

Cuando un mismo valor se repite en varios períodos, se pueden hacer agrupaciones para simplificar la presentación del cuadro y en un futuro disminuir la cantidad de operaciones necesarias en la solución del problema.

Con el mismo cuadro anterior realizando las agrupaciones tendríamos:

Período	Ingreso	Egreso 1	Egreso 2	Flujo neto	No. de veces
-5 a -2	4.000			4.000	4
-1	4.000	6.000		-2.000	1
0	4.000	6.000	20.000	-22.000	1
1 a 2	4.000	6.000		-2.000	2
3	0	6.000		-6.000	1
4 a 5	0	0		0	2
6	5.000			5.000	1

TALLER: Elaborar los cuadros de flujos de caja de los problemas anteriores.

A partir del siguiente cuadro de flujo de caja, elabore el diagrama.

	Ingresos 1	Ingresos 2	Egresos
-5	20.000		
-4			6.000
-3	5.000		6.000
-2	5.000		6.000
-1	5.000		6.000
0	5.000	7.000	6.000
1	5.000	7.080	6.000
2	5.000	7.160	
3	5.000	7.240	
4		7.320	
5		7.400	
6		7.480	
7		7.560	
8		7.640	10.000
9			9.880
10			9.760
11			9.640
12	30.000		9.520
13			9.400

Capítulo 2

Interés compuesto

Al contrario del interés simple, el compuesto ocurre cuando los intereses se capitalizan (se le adicionan al capital inicial) y el interés en los siguientes períodos se liquida con base en el nuevo capital. Es decir, los intereses acumulados ganan también interés.

Básicamente, la diferencia entre el interés simple y el compuesto radica en lo que se haga con los intereses liquidados al final de cada período. Si se pagan o cobran según sea prestamista o prestatario (deudor o acreedor), el interés es simple, porque la deuda permanece constante y los intereses posteriores siempre se liquidan sobre el mismo capital o deuda; por lo tanto, el valor de los intereses en cada período siempre es igual.

Si el interés liquidado no se paga ni se cobra, se quedará debiendo y por consiguiente se le adicionará al capital adeudado. En este caso la deuda o saldo insoluto para el siguiente periodo será mayor: capital o deuda anterior mas el interés adicionado. Este nuevo valor es la base para liquidar el interés del siguiente periodo.

Ejemplo:

Un crédito de $100.000 se debe pagar dentro de un año. La tasa financiera es del 20% anual con interés simple, pero los intereses se deben pagar cada trimestre vencido. Elaborar el diagrama y un cuadro de pagos.

En este caso debemos distinguir que el periodo de pago de la deuda es anual y los periodos de liquidación y pago de intereses es trimestral.

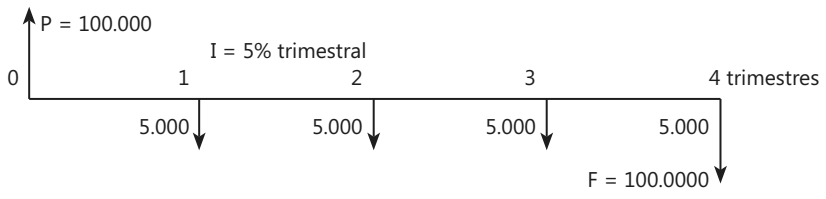
Valor préstamo P = $100.000

Tasa anual: 20% con cobro de interés trimestral.

Tasa trimestral = 20% / 4 = 5% trimestral

Plazo total para pagar: un año.

Inter periodos de liquidación del interés: trimestral



n	Interés liquidado	Pago total	Saldo deuda
0	–	–	100.000
1	5.000	5.000	100.000
2	5.000	5.000	100.000
3	5.000	5.000	100.000
4	5.000	105.000	0

Tomemos de nuevo el ejemplo anterior, pero los intereses no se pagan trimestralmente, se acumulan para pagar la deuda total acumulada.

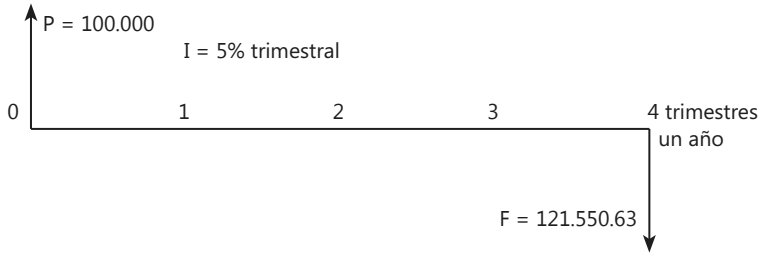
Valor préstamo P= $100.000

Tasa anual: 20% con liquidación de interés trimestral, pero se acumulan.

Tasa trimestral = 20% / 4 = 5% trimestral

Plazo total para pagar todo: un año.

Inter periodos de liquidación del interés: trimestral



n	Interés liquidado	Saldo deuda
0	–	100.000,00
1	5.000,00	105.000,00
2	5.250,00	110.250,00
3	5.512,50	115.762,50
4	5.788,13	121.550,63

En el ejemplo anterior los intereses no se pagaron, se liquidaron cada trimestre y se acumularon a la deuda (interés compuesto). La deuda al final del año se canceló con un valor de $121.550,63. Aparentemente, cualquier deudor desprevenido esperaría que la deuda fuera de $120.000: $100.000 de capital y $20.000 de interés.

La diferencia de $1.550,63 entre $21.550,63 y los $20.000 esperados, corresponde al interés generado por los intereses acumulados (interés compuesto).

Si calculamos la tasa de interés real o efectivamente cobrada en el crédito sería:

$$i\% = \frac{121.550,63 - 100.000}{100.000} \times 100\% = 21,55063\% \text{ Anual Efectivo}$$

Este resultado nos lleva a concluir que una tasa del 20% anual con liquidación y capitalización de intereses cada trimestre y pago de la deuda total al final (préstamo más intereses acumulados) es equivalente a una tasa del 21,55063% anual efectiva o real.

Debemos observar que en el ejemplo, el período de pago es anual (se cancela todo al año) y la liquidación de intereses se hace en un periodo menor: trimestral.

Período de pago > Período de capitalización

Igual situación se presentará en todas las operaciones financieras que utilicen el interés compuesto y para todo tipo de flujo de caja: pagos únicos y series.

Será entonces necesario conocer cómo se buscan las equivalencias de las tasas cuando los periodos de pago y los de capitalización sean diferentes.

DEFINICIONES

Período de pago (PP)

También se le llama período de inversión. Son los períodos en los cuales se adquiere *el compromiso de hacer pospagos de cuotas periódicas, pagos en general, los cobros o las inversiones*. Pueden ser anuales, semestrales, trimestrales, mensuales, bimestrales o diarios (como la devaluación y la corrección monetaria).

Período de capitalización (PC)

Son los períodos en los cuales se liquidan los intereses, bien para cobrarlos (o pagarlos) o para capitalizarlos (como en las cajas de ahorros). Pueden ser anuales, semestrales, trimestrales, mensuales, diarios, etcétera.

Las tasas de interés

Se dividen en nominales y efectivas, de la siguiente manera:

- Tasas de interés
  - Nominales
    - Vencidas (i)
    - Anticipadas (i_a)
  - Efectivas (i_e)

Gráfico 3. Clasificación de las tasas de interés.

Las tasas de interés normalmente se dan anuales, aunque en ocasiones se pueden dar en períodos menores. Esta situación hace que se utilicen diversas denominaciones para las tasas de interés, de acuerdo con los períodos de capitalización y los de pago.

Interés nominal (i)

Es la denominación de tasa de interés que más se utiliza en el sector financiero, en razón a que es la más entendible para la gente.

Es la tasa que se aplica en cada período para liquidar la operación financiera en cuestión y sólo se utiliza cuando el período de pago es igual al período de capitalización.

Este interés nominal se puede dividir o se puede multiplicar, sumar o restar así:

Si i = 30% anual, entonces el interés semestral es 30%/2 = 15% semestral. Si se quiere el interés nominal de dos años sería 30% x 2 = 60% cada dos años.

Interés efectivo (i_e)

Se utiliza cuando el período de capitalización es menor que el período de pago. A diferencia del nominal, el efectivo tiene en cuenta el valor del dinero en el tiempo. Siempre ocurre que el $i_e \geq i$

El interés efectivo no se divide, ni se multiplica, ni se resta ni se suma.

Para ejecutar alguna operación aritmética con él, es necesario transformarlo en interés nominal.

Interés anticipado (ia)

Eventualmente se utiliza en algunos créditos ordinarios de los bancos y en muchas ocasiones en el pago de rendimientos de los bonos y en otras operaciones financieras.

Es la tasa que se cobra al comienzo del período por un crédito. Por ejemplo, si se pacta un crédito al 28% anual, con pagos (de interés) anticipados cada trimestre, la liquidación será:

Tasa anticipada trimestral = 28%/4 = 7% (trimestral anticipada: T.A.).

Sobre un crédito de 1.000, se cobrará 0,07 x 1000 = $70 en el momento de otorgar el crédito, por lo tanto sólo se recibirán:

$1000 – $70 = $930 y se queda con una deuda de $1000.

La tasa anticipada se cobra también cada vez sobre el saldo insoluto.

MANEJO Y EQUIVALENCIAS DE LAS TASAS DE INTERÉS

Las fórmulas o los factores que se utilizan en Matemáticas Financieras para calcular P, F, A o G siempre utilizan interés efectivo (tasa de interés realmente pagado) y vencido (es decir, al final de cada período).

Por esta razón es necesario para cualquier cálculo que se desee efectuar, encontrar primero el interés efectivo.

Casos que se presentan:

1-	PP	=	PC
2-	PP	>	PC
3-	PP	<	PC

Nomenclatura:

i: Tasa nominal vencida

i_e: Tasa efectiva vencida

i_a: Tasa nominal anticipada

m: Número de subperíodos (inter periodos) que tiene el período de pago si éste es mayor que el de capitalización; o número de subperiodos que tiene el período de capitalización si este es mayor que el de pago.

Ejemplo: Si se hacen depósitos anuales o pagos en cuenta de ahorro y le capitalizan trimestralmente tenemos:

Período de pago: PP = Anual
Período de capitalización: PC = Trimestre
Subperíodos: m = 12/3 = 4 capitalizaciones al año
En este ejemplo PP > PC.

Ejemplo: Se proyecta hacer ahorros (pagos) semestrales provenientes de la prima legal, pero la corporación financiera liquidará intereses trimestralmente.

PP: semestral PC: trimestral para este caso PP > PC → m = 2

TRANSFORMACIÓN DE UN INTERÉS NOMINAL A UN INTERÉS EFECTIVO

Primer caso: Periodo de Pago = Periodo de Capitalización (PP = PC)

FÓRMULA: $i = i_e$

Ejemplo: si en una negociación se establece una tasa del 20% anual con pagos y capitalización anual tenemos:

i = 20% anual → i_e = 20% anual E.

Segundo caso: Período de Pago < Período de capitalización (PP < PC)

FÓRMULA: $i_e = \frac{i}{m}$

Ejemplo: si en la negociación se establece un interés del 20% anual, con capitalización semestral y períodos de pago trimestrales, tenemos:

Interés semestral = 20%/2 = 10% semestral

i_e = 10%/2 = 5% trimestral (en el semestre hay dos trimestres)

Nota: Este caso es de poco uso en la práctica. Puede generar conflictos graves en la liquidación de intereses.

Tercer caso: Período de Pago > Período de Capitalización PP > PC

FÓRMULA $i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$ i: se da en índice

Ejemplo: En la negociación se establecen pagos anuales, con períodos de capitalización trimestrales.

i = 20% anual, m = 4 trimestres PP > PC

$i_e = (1 + 0{,}20/4)^4 - 1 = 0{,}2155 \rightarrow 21{,}55\%$ anual efectivo

Otra forma de expresar la tasa dada y la obtenida es simplificando las palabras así:

i% = 20% anual C.T. es equivalente a 21,55% anual E

Y se lee así: 20% anual, capitalizable trimestralmente, equivale 21,55% anual efectivo. Otra forma utilizada con frecuencia es: 20% anual, T.V. Se lee: 20% anual trimestre vencido

1. Suponga pagos anuales, capitalización mensual. *i* = 20% anual C.M. o anual M.V.

   $i_e = (1 + 0{,}20 / 12)^{12} - 1 \rightarrow = 0{,}2194$ 21,94% anual efectivo

   La información anterior de *i* = 20% anual, capitalización mensual es común escribirla así:

   i = 20% anual C.M. o 20% anual M.V.: anual mes vencido, quiere decir: interés del 20% anual con cobro de interés mensualmente (mes vencido).

2. Suponga pagos semestrales, capitalización mensual si *i* = 20% anual C.M.

   i semestral = 20%/2 = 10% semestral C.M.

   La información anterior de i = 10% semestral, capitalización mensual es común escribirla así:

   i = 10% semestral C.M., quiere decir: interés del 10% semestral capitalizable (con cobro de interés) mensualmente. Para convertirlo a semestral E:

   $i_e = (1 + 0{,}10/6)^6 - 1 = 0{,}1043 \rightarrow 10{,}43\%$ efectivo semestral

   $\rightarrow 10{,}43\%$ semestral, E

USO DE LAS CALCULADORAS

Las calculadoras financieras tienen programas para transformar tasas nominales vencidas y nominales anticipadas a efectivas y efectivas a nominales vencidas o a nominales anticipadas. Las *Hewlett Packard 19B II* y *17B* operan así:

Oprima sucesivamente las siguientes teclas para obtener el menú adecuado (ver página siguiente).

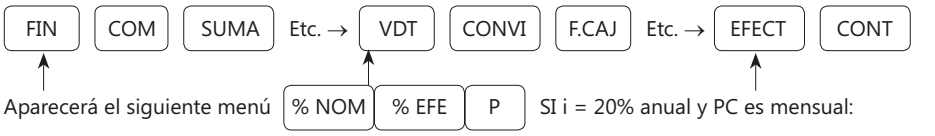


Gráfico 4. Menú de las calculadoras.

Digitamos 20 y oprimimos%NOM; digitamos 12 y oprimimos la P, luego oprimimos%EFE y obtenemos la tasa efectiva del 21,939% anual que es la tasa equivalente a una tasa nominal del 20% anual C.M. La P de la calculadora significa *subperíodos*, es el *m* de la fórmula.

Mediante despeje algebraico podemos obtener la fórmula para calcular el interés nominal conociendo el efectivo:

$$i = \left[\left(i_e + 1 \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] m$$

Sea un interés efectivo del 21,55% anual, transformarlo a interés nominal con período de capitalización trimestral.

$$I = \{(0{,}2155 + 1)^{1/4} - 1)\}4 = 0{,}20 \Rightarrow 20\% \text{ anual C.T.}$$

Utilizando la calculadora digite 21,55 y oprima%EFE, digite 4 y oprima P, oprima% *i* y aparecerá 20% que es la tasa nominal anual capitalizable trimestralmente equivalente a una tasa del 21,55% anual efectiva.

Desarrolle los ejercicios anteriores utilizando el programa de la calculadora.

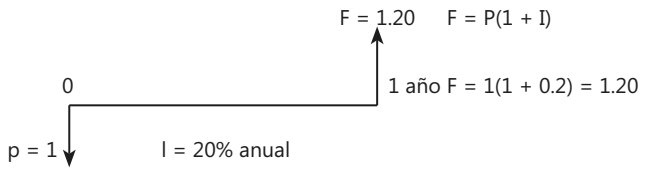
INTERÉS ANTICIPADO

Transformación de interés anticipado a interés efectivo

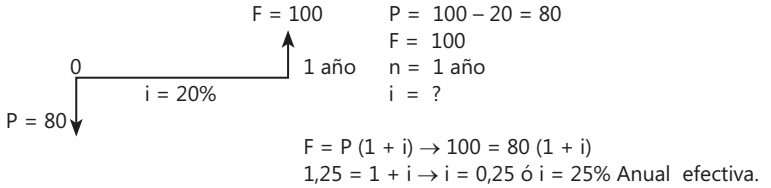
En la sección anterior se estudió la tasa nominal y la tasa efectiva, considerando en todos los casos, las tasas de interés vencidas. Sin embargo, es de uso corriente el empleo de tasas de interés anticipado en nuestro medio financiero.

Recordemos que una tasa del 20% anual vencida, indica que por cada peso entregado, debemos recibir $1,20 al finalizar el año.

Gráficamente:

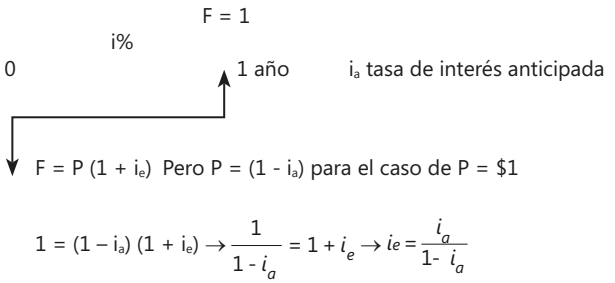


Consideremos ahora una tasa del 20% anual pero anticipada. Esto quiere decir que por cada $100 que prestamos, debemos retener $20 por concepto de intereses, o sea que entregamos $100 – $20 = $80 y debemos recibir $100 al final del año.



Conclusión: una tasa del 20% anual anticipada es equivalente a una tasa del 25% anual efectiva.

Generalizando:



Primer caso: PP = PC Período de pago = Período de capitalización

FÓRMULA $i_e = \frac{i_a}{1 - i_a}$

En este caso, el i_e que se obtiene es igual a i (nominal) porque el PP = PC.

Resolvamos el problema anterior utilizando la fórmula:

$$i_a = 20\% \text{ anual} \quad i_e = \frac{0{,}20}{10{,}20} = 0{,}25 \Rightarrow 25\% \text{ anual efectiva}$$

Segundo caso: PP > PC Período de Pago > Período de Capitalización

Ejemplo: El Banco Popular cobra una tasa del 31% anual trimestre anticipado y deseamos conocer la tasa efectiva anual. Primero hallamos la tasa de trimestre anticipado:

Por ser una tasa nominal la podemos dividir por 4 para convertirla en trimestral (T.A.), y así queda PP trimestral y PC trimestre anticipado (se reduce al caso anterior).

i = 0,32/4 = 0,0775 trimestre anticipado. Calculemos ahora la tasa equivalente efectiva utilizando la fórmula anterior, la cual será igual a la nominal (vencida) porque hemos igualado el período de pago (trimestral) con el período de capitalización (trimestral).

El resultado es que una tasa de interés del 0,0775 trimestre anticipado (T.A.) es equivalente a una tasa del 0,0840 trimestre vencido, o 0,336 anual T.V.: (0,0840 x 4) anual T.V.

Hemos obtenido una tasa del 33,6% nominal anual T.V. Ahora busquemos la tasa efectiva anual equivalente (porque PP es anual > PC que en el ejemplo es trimestral), m = 4 trimestres. Para lograrlo utilicemos la fórmula que transforma una tasa nominal vencida en una efectiva.

$i_e = (1 + 0{,}336 / 4)^4 - 1 = 0{,}3807$ o 38,08%. Se interpreta que una tasa del 31% anual trimestre anticipado es equivalente a una tasa del 38,08% anual, E.

Este procedimiento es engorroso, por lo cual es necesario utilizar formulas que simplifiquen el método.

Ahora bien, a continuación se expone una forma simplificada para calcular el interés efectivo a partir del interés anticipado, cuando el periodo de pago es mayor que el periodo de capitalización.

Otra forma más rápida de llegar al mismo resultado anterior, es decir, conociendo la tasa anticipada es encontrar su equivalente en tasa efectiva vencida. Se logra con la siguiente fórmula:

i_e: tasa efectiva
i_e: tasa efectiva
m: número de subperíodos

$$i_e = \left(\frac{m}{m - i_a}\right)^m - 1 \quad \text{ó} \quad i_e = \left(1 + \frac{i_a}{-m}\right)^{-m} - 1$$

Observe que esta fórmula tiene una presentación semejante al caso de convertir una tasa nominal vencida en una efectiva, salvo que los subperiodos m son negativos.

Resolvamos el ejercicio anterior

i_a = 31% anual trimestre anticipado, en muchos casos sólo se escribe: i = 31% anual, T.A.

i_e = ? anual

$$ie = \left(1 + \frac{ia}{-m}\right)^{-m} - 1$$

$$ie = \left(1 - \frac{0.31}{4}\right)^{-4} - 1 = 0.3808 \quad ie = 38{,}08\% \text{ Anual E}$$

Utilizando el programa de la calculadora:

Digite 31% y oprima%NOM, digite –4 y oprima P (observe que el *m* de la fórmula es negativo), luego oprima%EFE y aparecerá 38,08%.

Para transformar una tasa efectiva a anticipada se sigue el proceso contrario. Si queremos trasformar 38,08% anual E a anticipada, digitamos 38,08 y oprimimos%EFE, digitamos – 4 y oprimimos P, luego oprimimos%NOM y aparecerá 31% que es la tasa anual T.A.

Tercer caso: Cuando PP < PC Primero se reduce la ia a igual período del PP así:

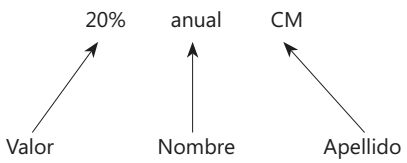
$$ie = \frac{ia}{m}$$ Luego se procede como en el caso de PP = PC

Este caso no se usa. Su importancia es más matemática que práctica.

MÉTODO PRÁCTICO

Para visualizar los procedimientos de transformación de tasas a sus equivalentes, vamos a utilizar un gráfico que nos señale el punto de partida y el punto de llegada, según la tasa que se quiera transformar. Además de identificar la fórmula que se debe utilizar, es necesario conocer el número de subperíodos de capitalización (m) (Ver gráfico página siguiente).

Como recurso didáctico vamos a suponer que las tasas, al igual que las personas, tienen nombre y apellidos, además del valor numérico, así:



El nombre identifica el PP (periodos de pago) y el apellido identifica el PC (periodos de liquidación de intereses).

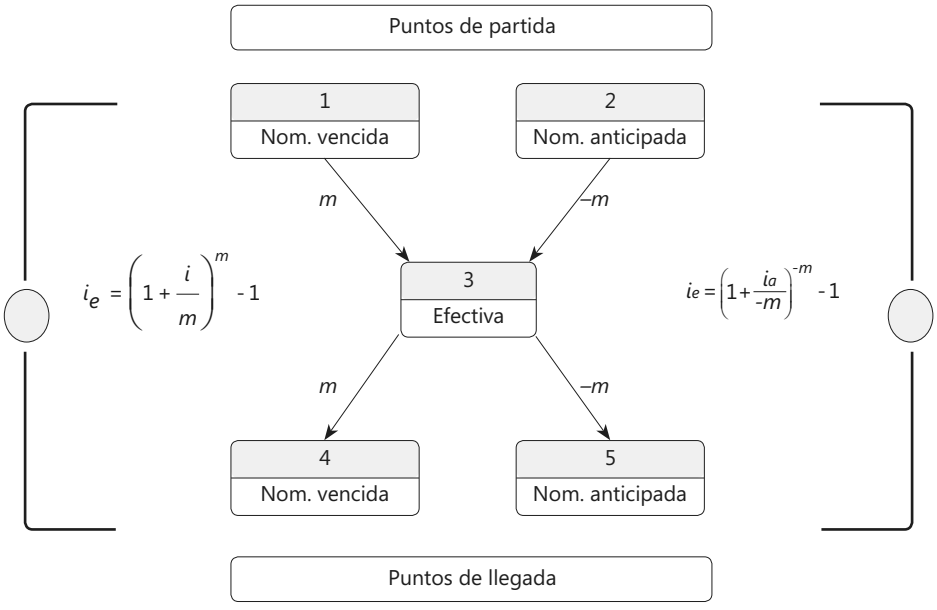


Gráfico 5. Procedimientos de transformación de tasas.

Cambiar el nombre: sólo se puede hacer cuando la tasa sea nominal. Se divide por *m* para pasar de una tasa mayor a una menor o se multiplica por *m* para pasar de una tasa menor a una mayor.

Si i = 30% anual C.M. y la divido por dos, tengo i = 15% semestral. C.M. Cambio nombre de anual a semestral. Conservo el apellido.

Si i = 2,5% mensual C.M. y la multiplico por 12, tengo i = 30% anual, C.M. Cambio de nombre de mensual a anual. Conservo el apellido.

Cambiar apellido: se hace utilizando la formula respectiva para pasar de nominal a efectiva o viceversa.

Ejemplo 1

¿Cuál es la tasa anual efectiva equivalente a una tasa del 20% anual C.M.?

En este caso tenemos una tasa anual nominal vencida (punto 1) y queremos llevarla hasta la modalidad efectiva (punto 3). Se cambiará el apellido C.M. por el de efectivo. El valor de *m* es doce (*m* = 12 porque el apellido, C.M., está contenido 12 veces en el nombre, anual). Debemos, por lo tanto, utilizar la fórmula 1 o si prefiere utilice el programa de la calculadora como se explicó anteriormente. En este caso, no olvide que el m de la fórmula se identifica en ella con la letra P.

20% anual C.M. ↔ 21,93911% anual E

Ejemplo 2

¿Cuál es la tasa anual efectiva equivalente a una tasa del 20% anual M.A.?

Conocemos una tasa nominal anticipada (punto 2) y queremos llevarla hasta la modalidad efectiva (punto 3). El valor de m es menos doce ($m = -12$). Debemos, por lo tanto, utilizar la fórmula 2 o si prefiere utilice el programa de la calculadora como se explicó anteriormente. En este caso no olvide que el m de la fórmula se identifica en ella con la letra P.

20% anual M. A. ↔ 22,34631% anual E.

Ejemplo 3

¿Cuál es la tasa anual C.T. equivalente a una tasa del 18% anual efectiva?

Tenemos una tasa efectiva (punto 3) y queremos llevarla hasta la modalidad nominal vencida (punto 4). El valor de m es cuatro ($m = 4$). Debemos, por lo tanto, utilizar la fórmula 1 o si prefiere utilice el programa de la calculadora como se explicó anteriormente. En este caso no olvide que el m de la fórmula se identifica en ella con la letra P.

18% anual E. ↔ 16,89865% anual C.T.

Ejemplo 4

¿Cuál es la tasa anual T.A. equivalente a una tasa del 18% anual efectiva?

En este caso tenemos una tasa efectiva (punto 3) y queremos llevarla hasta la modalidad nominal anticipada (punto 5). El valor de m es menos cuatro ($m = -4$). Debemos, por lo tanto, utilizar la fórmula 2 o si prefiere utilice el programa de la calculadora como se explicó anteriormente. En este caso no olvide que el m de la fórmula se identifica en ella con la letra P.

18% anual E. 16,21368% anual T.A.

Ejemplo 5

¿Cuál es la tasa anual C.T. equivalente a una tasa del 24% anual C.M.?

Partimos del punto 1 con un $m = 12$ para llegar al punto 3. De allí salimos para el punto 4 con un $m = 4$. En las dos operaciones utilizamos la fórmula 1.

24% anual C.M. → m = 12 → 26,8241% anual E → m = 4 → 24,4832% anual C.T.

Ejemplo 6

¿Cuál es la tasa anual T. A. equivalente a una tasa del 24% anual M. A.?

Partimos del punto 2 con un $m = -12$ para llegar al punto 3. De allí salimos para el punto 5 con un $m = -4$. En las dos operaciones utilizamos la fórmula 2.

24% anual M.A. → m = –12 → 27,4345% anual E → m = – 4 → 23,5232% anual T.A.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA:

Dar las equivalencias de las siguientes tasas de interés:

a) 23% anual T.A. expresarla en semestral M.A.

23% anual T.A.	P = –4	26,73% anual E	P = –12	23,46% anual M.A.	÷2	11,73% Sem. M.A.
Punto de Partida	para cambiar apellido	nueva tasa	para cambiar apellido	nueva tasa	para cambiar nombre	tasa solicitada

b) 17,4% anual B.A. expresarla en semestral T.A.

17.4% anual B.A.	P = –6	19,31% anual E	P = –4	17,27% anual T.A.	÷2	8,64% Sem. T.A.
Punto de Partida	para cambiar apellido	nueva tasa	para cambiar apellido	nueva tasa	para cambiar nombre	tasa solicitada

Dar las equivalencias de las siguientes tasas de interés:

a) 21,6% anual M.A. expresarla en semestral T.A.

21.6% anual M.A.	P = –12	24,35% anual E	P = –4	21,21% anual T.A.	÷2	10,61% Sem. T.A.

b) 17,76% anual T.A. expresarla en cuatrimestral B.A.

17.76% anual T.A.	P = –4	19,92% anual E	P = –6	17,89% anual B.A.	÷3	5,96% cuatr. B.A.

c) 28,4% anual B.A. expresarla en semestral M.A.

28.4% anual B.A.	P = –6	33,37% anual E	P = –12	28,74% anual M.A.	÷2	14,37% Sem. M.A.

TASAS COMBINADAS (IC)

Existen algunas situaciones en las cuales el interés se debe reconocer sobre una unidad monetaria cuyo valor aumenta con el tiempo, en un porcentaje determinado. Ejemplo: Dólar, UVR. Aquí estamos ante la combinación de dos factores que determinan la verdadera tasa de interés cobrada (tasa efectiva) y son: el porcentaje (tasa) de variación de la unidad monetaria y la tasa de interés financiera.

Ejemplo: hallar la tasa efectiva anual que pagamos por un crédito hoy de U.S. $100.000 para pagar dentro de un año a una tasa del 15% anual.

Solución:

Si estimamos la devaluación del peso con respecto al dólar en 30% anual y el dólar al momento de la compra se cotizaba a $350 tenemos:

Valor presente de la obligación en pesos ($)P = 350 x 100.000 = $35.000.000.

Valor del dólar dentro de un año:

Valor = 350 (1 + 0,3) = $455 0,3: Índice de devaluación (f%)

Valor de la obligación en un año sin interés $455 x 100.000 = $45.500.000.

Por efecto de la devaluación la deuda se ha incrementado en:

45.500.000 – 35.000.000 = $10.500.000 lo que en últimas corresponde a un interés bajo la denominación de devaluación.

Valor de los intereses:

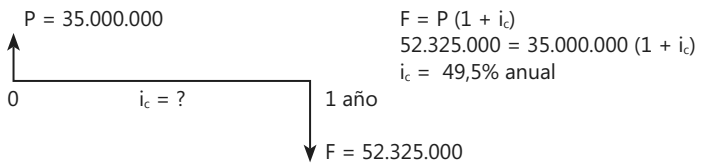
$$i = 0{,}15 \times 45.500.000 = \$6.825.000$$

Valor total a cancelar (en pesos) al finalizar el año:

$$45.500.000 + 6.825.000 = \$52.325.000$$

Valor en dólares = 52.325.000/455 = US$115.000

Diagrama de la operación



Esto significa que al combinar los efectos de la devaluación (f) del peso con respecto al dólar del 30% y el interés corriente del 15%, tenemos una tasa efectiva anual del 49,5%. El mismo procedimiento se sigue con los créditos o ahorros en UVR.

Fórmula para calcular la tasa combinada

FÓRMULA: $i_c = (1 + i)(1 + f) - 1$ o $i_c = i + f + i.f$

Aplicando esta fórmula, resolvamos el problema anterior:

Tasa combinada $i_c = 0{,}15 + 0{,}30 + 0{,}15 \times 0{,}30 = 0{,}495 \Rightarrow i_c = 49{,}5\%$ anual

$$F = 35.000.000\ (1 + 0{,}495) = \$52.325.000$$

Observe que la *tasa combinada* se aplica sobre el crédito en pesos y no en dólares.

Ejemplo: una mercancía tiene un costo de $1.000.000. Se debe cancelar además un 3% de flete, un 4% de seguro y un IVA del 16%.

¿Cuál es el recargo efectivo en el valor de la compra?

Costo inicial de la mercancía: $1.000.000
Recargo por flete 3% $1.000.000 x 0,03 = 30.000 Costo total con flete $1.030.000
Recargo por seguro $1.030.000 x 0,04 = 41.200 Costo total con seguro $1.071.200
Recargo por IVA $1.071.200 x 0,16 = 171.392 Costo total con IVA $1.242.592

Porcentaje (i_c) real de recargo en la compra:

$$i_c = \frac{1.242.592 - 1.000.00}{1.000.000} \times 100\% = 24,259\%$$

Podemos buscar esta tasa utilizando el concepto de tasa combinada:

$$I_c = (1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) - 1 \quad I_c = (1 + 0,03)(1 + 0,04)(1 + 0,16) - 1 = 24,259\%$$

Cuando se presenten más tasas o incrementos se puede generalizar la fórmula:

$$I_c = (1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)(1 + i_4)(1 + i_5)\ldots\ldots\ldots(1 + i_{n-1})(1 + i_n) - 1$$

Tasa combinada en descuentos

Los premios de las loterías tienen descuentos así: el 17% para la beneficencia y del resto se hace una retención en la fuente del 20%. ¿Cuál es la tasa combinada del descuento total?

Sea un premio de $1.000.000, el descuento para la beneficencia es de $170.000; del excedente: $830.000 se hace una retención de 830.000 x 0,20 = 166.000.

Descuento total del premio: 170.000 + 166.000 = 336.000.

Porcentaje total del descuento realizado: 336.000/1.000.000 = 0,336 → 33,6% que es la tasa combinada del descuento.

Utilizando la fórmula $i_c = i + f - i.f = 0,17 + 0,20 - 0,17 \times 0,20 = 0,336 \rightarrow 33,6\%$

Resumiendo: $i_c = i + f \pm i.f$

+ i.f si la tasa crece
– i.f si son descuentos cosecutivos

Descuentos sucesivos: $i_c = 1 - (1 - i_1)(1 - i_2)(1 - i_3)(1 - i_4)(1 - i_5)\ldots(1 - i_{n-1})(1 - i_n)$

TALLER: Obtener la fórmula para el caso anterior cuando se tengan varios incrementos porcentuales y descuentos porcentuales.

PROBLEMAS SOBRE TASAS DE INTERÉS

Problema 1

Usted, como gerente de una entidad de crédito, fue autorizado por la junta directiva para otorgar créditos al 42,1% anual C.T.

¿Qué tasas de interés debe dar a sus clientes para estos planes?

a) Semestral E.
b) Bimestral anticipado.

Solución:

a) Obtenemos la semestral: 42,1%/2 = 21,05% semestral C.T. Ahora capitalizamos esta tasa con dos períodos. (un semestre tiene dos trimestres). Digitamos 21,05 y oprimimos NOM, digitamos 2 y oprimimos P, luego oprimimos%EFE y aparece 22,16% que es la tasa semestral efectiva.

b) Primero obtenemos la efectiva anual con capitalización bimestral (P = 6). Digitamos 42,1% NOM, digitamos 6 y luego oprimimos P; oprimimos%EFE y aparece 50,213% que es la tasa efectiva anual (50,213% anual E). Luego digitamos –6 y en seguida P, oprimimos%NOM y aparece 39,34% anual, bimestre anticipado (39,34% anual, B.A.).

Si quisiéramos dar la tasa del bimestre anticipada, basta dividir la anual entre 6 para obtener 6,557% bimestral A (por ser tasa nominal se puede dividir).

Problema 2

Usted, como gerente de una entidad de crédito, fue autorizado por la junta directiva para otorgar créditos al 39,7% efectivo.

¿Qué tasas de interés debe dar a sus clientes para estos planes?

a) Trimestre anticipado.
b) Semestral Nominal.
c) Nominal Mensual.
d) Semestral Anticipado.

Solución:

a) Vamos a utilizar un gráfico que ilustre las secuencias antes descritas:

39,7% anual E. → 32,074% anual T.A. → 8,018% trimestral, A.

Digitamos 39,7% y EFE% Digitamos – 4 y P Solución:%NOM:

b) 39,7% anual E. → (P = 2) 36,39% anual C.S. → (÷2) 18,195% semestral.

c) 39,7% anual E. → (P = 12) 33,903% anual C.M. → (÷12) 2,825% mensual.

d) 39,7% anual E. → (P = –2) 30,788% anual S.A. → (÷2) 15,39% semestral, A.

Problema 3

Usted debe generar un plan para la emisión de bonos, si la junta directiva de su empresa fijó los intereses de emisión en un 36% anual efectivo y si se le debe ofrecer a los inversionistas planes de pago de intereses así:

a) Mes vencido R/ 31,146% anual M.V. 2,595% mensual.
b) Trimestre vencido R/ 31,961% anual T.V. 7,99% trimestral.
c) Trimestre anticipado R/ 29,596% anual T.A. 7,399% trimestral, A.

¿Qué interés debe fijar a cada plan para cumplir con la disposición de la junta directiva?

Problema 4

Usted debe generar un plan para la emisión de bonos, si la junta directiva de su empresa fijó los intereses de emisión en el 36% A.A. (anual anticipado) y si se le debe ofrecer a los inversionistas planes de pagos de intereses, así:

a) Mes Vencido R/ 45,46% anual C.M. 3,79% mensual.
b) Trimestre Vencido R/ 47,21% anual C.T. 11,80% trimestral
c) Trimestre Anticipado R/ 42,23% anual T.A. 10,56% trimestral, A.

¿Qué interés le deben fijar a cada plan para cumplir con la disposición de la junta directiva?

Problema 5

Una entidad bancaria tiene tres planes de crédito a corto plazo para financiar préstamos pequeños:

Plan 1 Tasa de interés nominal del 34,93% anual, pagadero por mensualidades.

Plan 2 Tasa de interés nominal del 36% anual, con pago único al final del año y capitalización trimestral.

Plan 3 Tasa de interés del 33% anual, trimestre anticipado.

Si usted necesitara un crédito de $10.000.000, ¿qué plan elegiría?

Solución:

Vamos a transformar cada tasa de cada plan a efectiva para establecer la comparación.

Plan A: tasa efectiva: 41,102% anual, E.

Plan B: tasa efectiva: 41,158% anual, E.

Plan C: tasa efectiva: 41,116% anual, E. Mejor plan el A.

Problema 6

Una tasa de interés del 30% anual, mes anticipado, a cuánto equivale en:

a) Efectivo anual. R/ 35,502% anual,E.
b) Trimestre anticipado R/ 29,256% anual, T.A. o 7,314% trimestral, A.

Problema 7

Dé las equivalencias de las siguientes tasas:

a) 28% anual, T.A. expresarla en efectiva. R/ 33,681% anual, E.
b) 32,7% anual, C.T. expresarla en anual, T.A. R/ 30,229% anual, T.A.
c) 32,69% anual, E. expresarla en trimestral anticipada R/ 27,31% anual, T.A; 6,83%, T.A.

Problema 8

Transformar las siguientes tasas:

a) i = 19,15% anual, A. A. Expresarla en semestre anticipado.
b) i = 15% anual, E. Expresarla en bimestral anticipado
c) i = 2,3% mensual. Expresarla en anual mes anticipado.

R/ a) 20,167% anual, S.A. b) 2,3024% B. A. c) 26,979% anual, M.A.

Problema 9

Una tasa de interés del 24,5% anual, mes anticipado, qué equivalencia tendrá en:

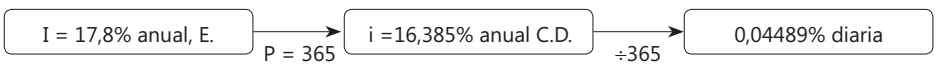
a) Efectivo anual R/ 28,086% anual, E.
b) Trimestre anticipado R/ 24,003% anual, T.A., 6,0008% trimestral T.A.
c) Efectiva semestral R/ 13,1753% semestral ,E.

Problema 10

La devaluación anual es del 17,8% E. ¿Cuál es la devaluación diaria? ¿Cuál es la devaluación de los meses de febrero, junio y de agosto?

Solución:

La devaluación ocurre diariamente; por lo tanto, la capitalización es diaria y los subperíodos son 365 que corresponden a los días de un año (no bisiesto). Además, aunque no se mencione, la tasa de devaluación siempre se da efectiva.



Febrero tiene 28 días: 28 x 0,04489 = 1,257% nominal de febrero; si se capitaliza 28 veces (P = 28) se obtiene la efectiva de este mes: 1,265% efectiva de febrero.

Junio tiene 30 días: 30 x 0,04489 = 1,3467% nominal de junio; si se capitaliza 30 veces (P = 30) se obtiene la efectiva de este mes: 1,355% efectiva de junio.

Agosto tiene 31 días: 31 x 0,04489 = 1,39159% nominal de agosto; si se capitaliza 31 veces (P = 31) se obtiene la efectiva de este mes: 1,401% efectiva de agosto.

Problema 11

La inflación acumulada de los últimos siete meses es del 9,8%. ¿Cuál es la inflación diaria y la mensual?

Solución:

Por no conocer cuáles meses son, debemos asumirlos cada uno de 30 días. Total de días 210. La inflación también es una tasa que siempre se da efectiva; por lo tanto, la vamos a convertir en nominal con un P = 210:

Inflación (7 meses) = 9,351% nominal para 7 meses, al dividir por 210 obtenemos la diaria: 0,045% diaria.

La mensual debemos darla efectiva: 0,045 x 30 = 1,336% mensual nominal, y la hacemos efectiva con un P = 30, inflación mensual = 1,345% efectiva mensual.

Nota: Cuando se conocen específicamente los meses, debemos utilizar el número de días que tiene cada mes.

Problema 12

En la prensa sale el siguiente aviso: La corporación Omega recibe depósitos desde $1.000.000 en adelante con un plazo no inferior a 90 días, paga intereses como los quiera el ahorrador:

a) Mes vencido.
b) Trimestre vencido.
c) Trimestre anticipado.

Si un ahorrador quiere obtener un 36% anual efectivo, ¿qué interés debe exigir en cada uno de los tres planes que tiene la corporación?

Problema 13

Se tiene una tasa del 24% anual T.A. Verificar las siguientes conversiones:

TASAS ANUALES	
Nombre técnico	**V/r y nombre comercial**
Anual diaria	24,7587% Anual C.D.
Anual mes vencido	25,0072% Anual M.V.
Anual mes anticipado	24,4967% Anual M.A.
Anual bimestre vencido	25,2677% Anual C.B.
Anual bimestre anticipado	24,2466% Anual B.A.
Anual trimestre vencido	25,5319% Anual T.V.
Anual trimestre anticipado	24,0000% Anual T.A.
Anual semestre vencido	26,3468% Anual S.V.
Anual semestre anticipado	23,2800% Anual S.A.
Anual año vencido	28,0821% Anual E.
Anual año anticipado	21,9251% Anual A.A.

PERÍODICAS	
Nombre técnico	**V/r y nombre simplificado**
Diario	0,06877% diaria
Mensual vencido	2,08393% mensual M.V.
Mensual anticipado	2,04139% mensual M.A.
Bimestral vencido	4,21129% bimestral B.V.
Bimestral anticipado	4,04111% bimestral B.A.
Trimestral vencido	6,38298% trimestral T.V.
Trimestral anticipado	6,00000% trimestral T.A.
Semestral vencido	13,17338% semestral S.V.
Semestral anticipado	11,64000% semestral S.A.

Problema 14

Se tiene una tasa del 2,5% trimestral efectiva. Verificar las siguientes conversiones:

TASAS ANUALES	
Nombre técnico	**V/r y nombre comercial**
Anual diaria	9,8784% Anual C.D.
Anual mes vencido	9,9178% Anual M.V.
Anual mes anticipado	9,8365% Anual M.A.
Anual bimestre vencido	9,9588% Anual C.B.
Anual bimestre anticipado	9,7962% Anual B.A.
Anual trimestre vencido	10,0000% Anual T.V.
Anual trimestre anticipado	9,7561% Anual T.A.
Anual semestre vencido	10,1250% Anual S.V.
Anual semestre anticipado	9,6371% Anual S.A.
Anual año vencido	10,3813% Anual E.
Anual año anticipado	9,4049% Anual A.A.

PERÍODICAS	
Nombre técnico	**V/r y nombre simplificado**
Diario	0,02744% diaria
Mensual vencido	0,82648% mensual M.V.
Mensual anticipado	0,81971% mensual M.A.
Bimestral vencido	1,65980% bimestral B.V.
Bimestral anticipado	1,63270% bimestral B.A.
Trimestral vencido	2,50000% trimestral T.V.
Trimestral anticipado	2,43902% trimestral T.A.
Semestral vencido	5,06250% semestral S.V.
Semestral anticipado	4,81856% semestral S.A.

Capítulo 3

Fórmulas y factores de recuperación de capital

FÓRMULAS Y FACTORES CON PAGOS ÚNICOS

Cantidad futura compuesta pago único (F)

Se refiere a la cantidad futura compuesta con el capital inicial más la capitalización de intereses.

Dada una cantidad presente (P) hoy, hallar otra cantidad futura (F) compuesta por el capital inicial (P), más los intereses acumulados.

Problema tipo:

Hoy le prestan $*P*, a *n* años y con un interés del *i* % anual. ¿Cuál es la cantidad futura F que debe cancelar?

A cambio de que le presten dinero, usted puede prestarle a un banco su dinero haciendo un depósito en un CDT o en una cuenta de ahorros, durante cierto tiempo y a una tasa *i* % anual o mensual, según sea el caso. Al final del tiempo acordado, usted cobrará su capital y los intereses acumulados.

Otra negociación diferente al préstamo y a los depósitos puede ser comprar un bien y al cabo de cierto tiempo venderlo con alguna utilidad expresada en porcentaje. En todos los casos el préstamo, el depósito, la compra del bien o la venta constituyen pagos únicos o ingresos únicos, es decir, sólo ocurren una vez.

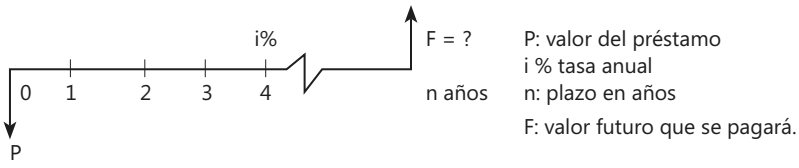
Deducción de la fórmula:

El interés que se paga de una deuda por cada período es igual al capital (préstamo) por la tasa de interés expresada en índice (*i* % / 100). Por ejemplo, $100 al 5% anual pagará dentro de un año 100 x 0,05 = $5 de interés, y el total a pagar será de:

$$\$100 + \$5 = \$105$$

Al iniciar el segundo año la deuda total es de $105 (capital inicial más interés acumulado). Este nuevo valor es capital inicial para el segundo año y al finalizar éste se debe: 105 x 0,05 = $5,25 de intereses, y el total al final del segundo año será de: $105 + $5,25 = $110,25. Este valor será el capital inicial para el tercer año, y así sucesivamente.

Al generalizar el problema y presentar un diagrama de flujo de caja a través del tiempo, tenemos:



$$\text{Final año 1:} \quad F_1 = P + P.i = P\,(1 + i)$$
$$\text{Final año 2:} \quad F_2 = F_1 + F_1\,.i = F_1\,(1 + i) = \overbrace{P\,(1 + i)^1}^{F_1}\,(1 + i) = P\,(1 + i)^2$$
$$\text{Final año 3:} \quad F_3 = F_2 + F_2\,.i = F_2\,(1 + i) = P\,(1 + i)^2\,(1 + i) = P\,(1 + i)^3$$
$$\text{Final año 4:} \quad F_4 = F_3 + F_3\,.i = F_3\,(1 + i) = P\,(1 + i)^3\,(1 + i) = P\,(1 + i)^4$$
$$\downarrow$$
$$\text{Final año n:} \quad F_n = P\,(1 + i)^n$$

Fórmula: $F = P(1 + i)^n$
Presentación con factor:
$F = P\,(F/P, i\,\%, n)$ $\quad F = (P/F)^{-1}$

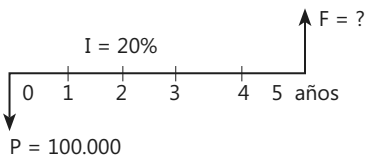
En la fórmula anterior los datos conocidos son el valor presente (P), la tasa de interés (i%) y el valor de n o número de períodos. La incógnita o valor a encontrar es el valor futuro (F).

Para conocer el valor de *n* que se utilizará en la fórmula, se hace lo siguiente: valor numérico del período donde estará F menos el valor numérico del período donde está *P*.

Problema 1

Hoy se recibe un préstamo de $100.000 a una tasa de interés del 20% anual E. Al cabo de 5 años se debe cancelar la deuda, incluidos los intereses acumulados. ¿Cuánto se cancelará?

Diagrama:



Solución utilizando la fórmula: $F = P(1 + i)^n$

$F = 100.000(1 + 0.20)^5$ $\quad F = 100.000 \times 2{,}48832$

$F = 248.832$

Resolvemos el problema utilizando un cuadro que muestre los períodos, el interés de cada período y el saldo de la deuda con los intereses acumulados:

Período	Interés del período	Saldo de la deuda acumulada
0		100.000
1	20.000	120.000
2	24.000	144.000
3	28.800	172.800
4	34.560	207.360
5	41.472	248.832

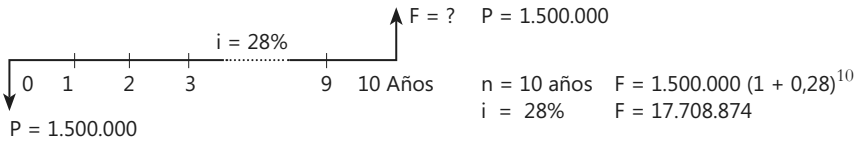
Saldo anterior más el interés del período

Saldo anterior por la tasa 100,000 x 0,20 = 20,000

Problema 2

Con el fin de cubrir una necesidad de inversión dentro de 10 años, usted deposita hoy en un fondo que le garantiza una tasa del 28% anual E, la cantidad de $1.500.000. Si su proyecto de inversión valdrá $20.000.000, ¿logrará su objetivo?

Solución:



No cubrirá su necesidad. Debe hacer un depósito inicial mayor, o conseguir una mayor tasa.

Déficit para la inversión: 20.000.000 - 17.708.874 = $2.291.126

De nuevo resolvemos el problema utilizando un cuadro que muestre los períodos, el interés de cada período y el saldo de la deuda con los intereses acumulados:

Período	Interés del período	Saldo de la deuda acumulada
0		1.500.000
1	420.000	1.920.000
2	537.600	2.457.600
3	688.128	3.145.728
4	880.804	4.026.532
5	1.127.429	5.153.961
6	1.443.109	6.597.070
7	1.847.180	8.444.249
8	2.364.390	10.808.639
9	3.026.419	13.835.058
10	3.873.816	17.708.874

Saldo anterior más el interés del período

Saldo anterior por la tasa 1.500,000 x 0,28 = 420,000

Problema 3

Usted dispone de US$10.000. Considera dos alternativas con este dinero:

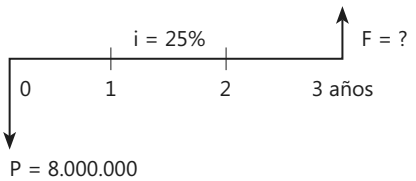
a) Cambiarlos por pesos hoy y depositarlos en una cuenta que le garantiza un 25% anual E. Este dinero lo utilizará dentro de 3 años. Valor del dólar hoy: $800/dólar.

b) Depositar los 10.000 dólares en un banco extranjero que le garantiza una tasa del 8% anual E y dentro de tres años cambiarlos por pesos al valor del cambio que tenga el dólar en esa fecha.

Estadísticamente se conoce que la devaluación promedio es del 14,5% anual E. ¿Qué alternativa debe seleccionar?

Solución:

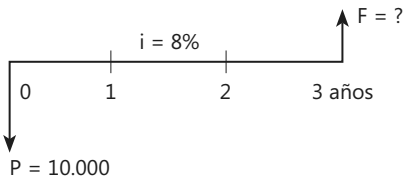
a) 10.000 dólares en pesos hoy: 10.000 x 800 = $8.000.000
Calculamos el dinero acumulado en 3 años:



F = ?

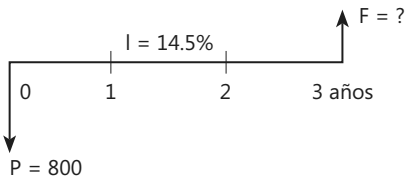
$F = 8.000.000\ (1 + 0{,}25)^3$
F = 15.625.000 Este es el dinero que tendrá dentro tres años, si cambia los dólares hoy y los deposita en la cuenta

b) F = ? Cálculo del valor futuro acumulado de los dólares a la tasa del 8% anual E (depósito en dólares).



$F = 10.000\ (1 + 0{,}08)^3$
F = 12.597,12 dólares

Valor futuro del valor del dólar teniendo en cuenta la devaluación:



$F = 800\ (1 + 0{,}145)^3$
F = $1.200,90 valor futuro del dólar

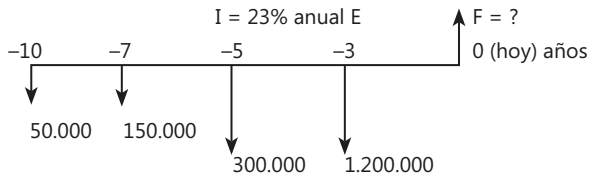
Valor futuro de los dólares en pesos: 12.597,12 x 1.200,90 = $15.127.867
Mejor la alternativa a).

Problema 4

Hace 10 años se abrió una cuenta de ahorros con $50.000. Posteriormente tres, cinco y siete años más tarde se hicieron depósitos de $150.000, $300.000 y $1.200.000, respectivamente. A una tasa financiera del 20,88101% anual C.M., ¿cuánto dinero tiene acumulado hoy?

Solución: En todas las fórmulas de la Ingeniería Económica es obligatorio utilizar tasas efectivas. En este problema la tasa es 20,88101% anual C.M. (tasa nominal vencida); por lo tanto, es necesario convertirla a efectiva. Ver en el capítulo anterior la conversión de tasas.

Primero transformamos la tasa efectiva: 20,88101% anual C.M. → 23% anual E.



$$F = 50.000(1 + 0,23)^{10} + 150.000(1 + 0,23)^{7} + 300.000\,(1 + 0,23)^{5} + 1.200.000\,(1 + 0,23)^{3}$$

7,92594 4,25928 2,81531 1,86087

F = $ 4.112.820

Observe que en este problema "hoy" es el futuro de los depósitos pasados y estos depósitos se toman como valores presentes frente al futuro (hoy). Por esta razón se utiliza la fórmula de F.

USO DE LOS FACTORES

La fórmula que hemos utilizado para calcular el valor futuro (F o VF) puede ser sustituida por el uso de *factores*, los cuales podemos calcular utilizando una calculadora financiera.

Son muchas las calculadoras financieras que existen en el mercado, pero particularmente nos referiremos a las calculadoras *Hewlett Packard 17 BII* o *19BII*.

Configuración de la calculadora

Procedimiento:

Prenda la calculadora y luego oprima EXIT hasta que el menú en la pantalla inicie con FIN. Entrar por FIN (oprimir la tecla que está debajo de FIN); Luego VDT (oprimir la tecla que está debajo de VDT, valor del dinero en el tiempo); luego OTRO.

La configuración predeterminada de estas calculadoras viene con el Modo Final y 12 pagos por año. Le daremos una configuración de modo final y un pago por año.

Debemos entender que los pagos serán al final del período y sólo un pago por cada período que puede ser mensual, trimestral, semestral, etcétera, aunque la calculadora los llame pago por año (PGOS/AÑ).

En este menú oprimimos la tecla 1 y luego P/AÑO; después, FINAL. Esta configuración no se debe cambiar hasta que no se conozca el manejo de otras opciones de configuración. Finalmente se oprime EXIT y parece el siguiente menú que tiene los siguientes significados:

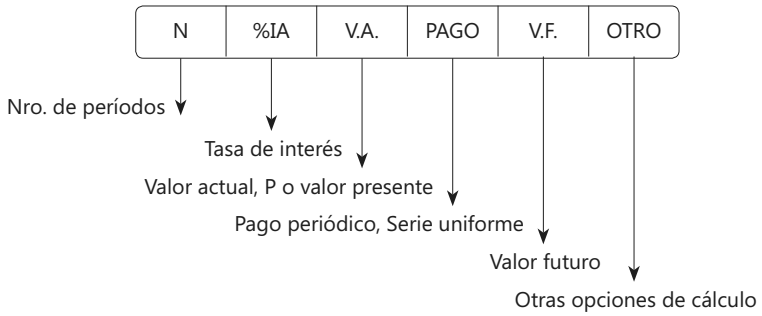


Gráfico 6 Configuración de la calculadora Hewlett Packard.

En la parte superior de la pantalla debe aparecer: 1 PGOS/AÑO: MODO FINAL

Esta debe ser la configuración permanente de la calculadora, hasta que tengamos necesidad de otras opciones.

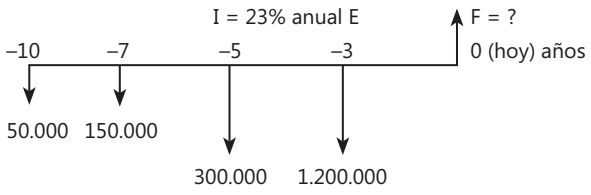
El procedimiento para resolver el problema anterior, usando la calculadora financiera, es:

1. Entrar por FIN (Financiera) y luego VDT (Valor del dinero en el tiempo).
2. Oprimir la tecla CLEAR DATA y después INPUT para eliminar cualquier valor en las memorias de este menú y para verificar que la configuración sea la correcta.

Vamos a resolver el problema 4 anterior utilizando la calculadora:

Hace 10 años se abrió una cuenta de ahorros con $50.000. Posteriormente 3, 5 y 7 años más tarde se hicieron depósitos de $150.000, $300.000 y $1.200.000, respectivamente. A una tasa financiera del 20,88101% anual C.M., ¿cuánto dinero tiene acumulado hoy?

No olvide que la tasa la convertimos a efectiva.



La ecuación utilizada antes en la solución de este problema fue:

$$F = 50.000(1 + 0{,}23)^{10} + 150.000(1 + 0{,}23)^{7} + 300.000\,(1 + 0{,}23)^{5} + 1.200.000\,(1 + 0{,}23)^{3}$$

7,92594 4,25928 2,81531 1,86087

↓ ↓ F = $ 4.112.820 ↓ ↓

La presentación de esta ecuación utilizando el formato de factores y no las fórmulas es:

↓ ↓ ↓ ↓

7,92594 4,25928 2,81531 1,86087

F = 50.000(F/P; 23%, 10) + 150.000(F/P; 23%, 7) + 300.000 (F/P; 23%, 5) + 1.200.000 (F/P; 23%, 3)

F = $ 4.112.820

Explicación: Fórmula $F = P(1 + i)^n \rightarrow$ Factor F = P (F/P, i%, n)

Cada fórmula de la ecuación se sustituye por el factor respectivo como lo indican las flechas. Ejemplo:

La fórmula (1+ 0.23)10 la sustituimos por (F/P; 23%, 10) que es el factor, y para encontrar el valor respectivo hacemos lo siguiente: digitamos 10 y oprimimos la tecla debajo de N, digitamos 23 y oprimimos la tecla debajo de%IA, digitamos 1 y oprimimos la tecla debajo de V.A.; luego oprimimos la tecla debajo de V.F. y obtenemos el valor de 7,92594. Omitimos el signo menos que sólo indica que es egreso.

La fórmula (1+ 0.23)7 la sustituimos por (F/P; 23%, 7) que es el factor, y para encontrar el valor respectivo hacemos lo siguiente: digitamos 7 y oprimimos la tecla debajo de N, digitamos 23 y oprimimos la tecla debajo de %IA, digitamos 1 y oprimimos la tecla debajo de V.A.; luego oprimimos la tecla debajo de V.F. y obtenemos el valor de 4,25928. Omitimos el signo menos que sólo indica que es egreso.

Realmente lo que hacemos es utilizar una fórmula pregrabada en la memoria de la calculadora. El mismo procedimiento se hace con cada uno de los demás factores.

Antes de calcular cualquier valor de un factor, no olvide CLEAR DATA y luego INPUT para borrar memorias temporales.

TALLER: resolver todos los problemas anteriores utilizando los factores en sustitución de las fórmulas.

Hasta aquí se han explicado las soluciones manuales utilizando las fórmulas y las soluciones usando la calculadora financiera y los factores. Un tercer método es utilizar el Excel y las fórmulas financieras. En el complemento virtual al libro podrá estudiar esta metodología con ejemplos similares.

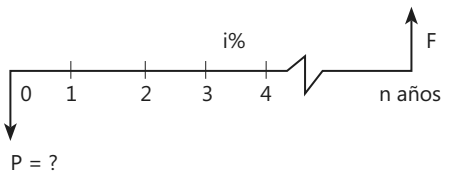
VALOR PRESENTE PAGO ÚNICO

En un futuro se necesita cierta cantidad de dinero la cual acumularemos mediante un depósito hoy y la capitalización de los intereses durante el tiempo que transcurrirá entre el depósito y el retiro. Queremos saber qué cantidad se debe depositar hoy.

Problema tipo:

Si se tiene una necesidad u obligación futura (F) de dinero, calcular el valor presente (P) que se debe depositar a una tasa *i*%, durante *n* años para lograr acumular la cantidad deseada. Dado F, hallar P a una tasa *i*% durante *n* períodos.

De la fórmula anterior $F = P(1 + i)^n$ y mediante un simple despeje algebraico obtenemos la inversa de ella para calcular el valor presente.



Fórmula:

$$P = F\left(\frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

Presentación con factor:

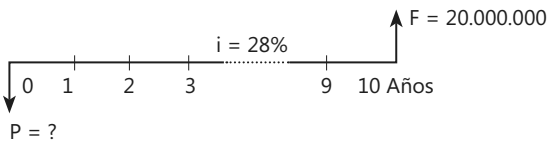
$P = F(P/F, i\%, n)$ $P = (F/P)^{-1}$

En la fórmula anterior los datos conocidos son el valor futuro (F), la tasa de interés (i%) y el valor de *n* o número de períodos. La incógnita o valor a encontrar es el valor presente o actual (P).

Para calcular el valor de *n* que se debe utilizar en la fórmula se sigue el procedimiento del caso anterior: valor numérico del período donde está *F* menos el valor numérico del período donde estará *P*.

Problema 5

En el problema 2 de este capítulo se habló de la necesidad de disponer de $20.000.000 dentro de 10 años. ¿Qué valor deberá depositar hoy para lograr este objetivo, si la tasa es del 28% anual E?



$$P = F\ \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$P = 20.000.000\left(\frac{1}{(1+0.28)^{10}}\right)$$

P = 20.000.000 x 0.08470 P = $1.694.066

Solución utilizando los factores:

1. Entrar por FIN (Financiera) y luego VDT (Valor del dinero en el tiempo).

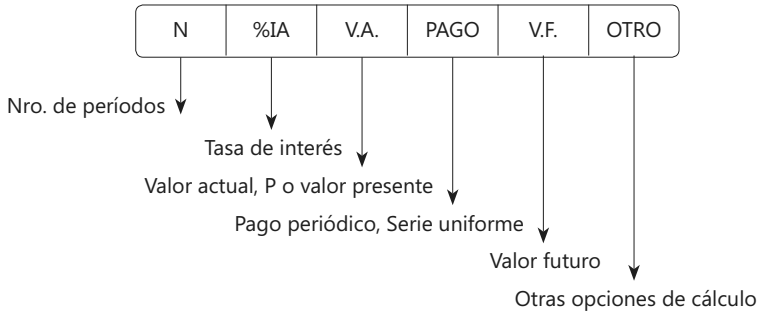


Gráfico 6 Configuración de la calculadora Hewlett Packard.

En la parte superior de la pantalla debe aparecer: 1 PGOS/AÑO: MODO FINAL

2. Oprimir la tecla CLEAR DATA y después INPUT para eliminar cualquier valor en las memorias de este menú y para verificar que la configuración sea la correcta.

La fórmula $\left(\frac{1}{(1+0.28)^{10}}\right)$ la sustituimos por (P/F; 28%, 10) que es el factor, y para encontrar el valor respectivo hacemos los siguiente: digitamos 10 y oprimimos la tecla debajo de N, digitamos 28 y oprimimos la tecla debajo de %I.A., digitamos 1 y oprimimos la tecla debajo de V.F.; luego oprimimos la tecla debajo de V.A. y obtenemos el valor de 0,08470. Omitimos el signo menos que sólo indica que es egreso.

$$P = 20.000.000\ \underbrace{(P/F,\ 28\%,\ 10)}_{\text{Factor}} \rightarrow P = \$1.694.066 \rightarrow P = 20.000.000 \times \underbrace{0.08470}_{\text{Valor del factor}} = 1.694.066$$

El factor anterior (P/F, 28%, 10) se lee así: dado un valor F de 20.000.000, calcular el valor de P a una tasa del 28% en 10 años.

Si en los datos que introducimos a la calculadora, en vez de digitar a F con un valor de 1 digitamos el valor de 20.000.000 y hacemos clic en el V.A., nos entrega el valor de 1.694.066. Es decir, el valor del factor (0,08470) lo multiplica de una vez por el coeficiente del factor, que en este caso es 20.000.000.

Problema 6

En el PROBLEMA 3 de este capítulo se seleccionó la primera alternativa porque a los 3 años dispondría de $15.625.000. Si usted tiene la oportunidad de aumentar la

cantidad de dólares, ¿cuál debe ser este incremento para que la segunda alternativa tenga el mismo valor futuro de la primera, sin modificar las condiciones de devaluación y de tasa financiera en el extranjero?

Valor futuro esperado: $15.625.000
Valor en dólares: 15.625.000/1.200,90

F = 13.011,07 dólares

P = 13.011,07 (P/F, 8%, 3)
P = 13.011,07 x $1/(1+0,08)^3$
P = 10.328,60 dólares

Valor del incremento = 10.328,60 – 10.000 = 328,60 dólares

Problema 7

El 20 de julio una familia recibió un giro del exterior por un valor de U.S. $7.000, los cuales utilizaría en el pago de la cuota inicial de una casa. Esta cuota la debe pagar el 20 de octubre, y tendrá un valor de $10.000.000.

La firma constructora le ofreció recibirle los dólares el mismo 20 de julio a una tasa de cambio de $1.200 por dólar y le ofreció a cambio un descuento del 8% en el valor de la cuota inicial. La familia no aceptó la propuesta y decidió colocar el dinero en un depósito a término y en dólares a tres meses, a una tasa del 16% anual E.

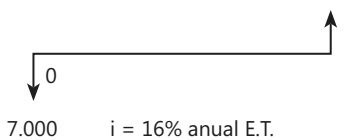
El próximo 20 de octubre retirará los dólares y los cambiará por pesos para cumplir el compromiso. Analice económicamente la decisión de la familia.

Información adicional: tasa de devaluación para los meses de julio, agosto, septiembre y octubre: 14,6, 15,8, 16,3 y 17% anual efectiva, respectivamente.

Valor recibido:	U.S. $7.000
Cuota el 20/10:	$ 10.000.000
V/R dólar el 20/07:	$1.200
Descuento ofrecido:	8%
Cuota inicial con descuento:	$9.200.000 pagadera el 20/07 con los dólares recibidos

Dólares en pesos: 7.000 x 1200 = $8.400.000. Se debe pagar un excedente de $800.000

Colocación de los dólares en un depósito:

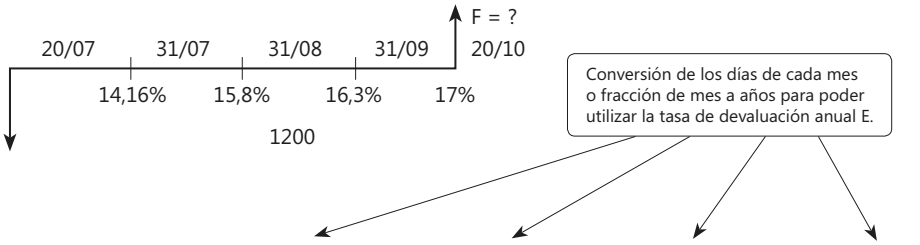


Meses expresados en años

F = ? F = 7.000 (F/P; 16%, 3/12)

3 meses F = 7.264,61 Estos U.S los cambiará el 20/10

Valor del dólar a los tres meses:



F($U.S) =1200 (F/P; 14,6%; 11/365) (F/P; 15,8%; 31/365) (F/P; 16,3; 30/365) (F/P: 17%; 20/365)
1,00412 1,01254 1,01249 1,00864

F = $ 1.245,96 Valor de U.S el 20/10

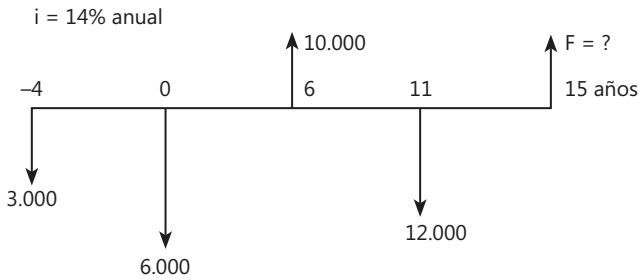
Cambio de los dólares el 20/10: 7.264,61 x 1.245,96 = $ 9.051,458

Excedente para pagar la cuota el 20 de octubre sin descuento: 10.000.000 – 9.051458 = $948.542. La decisión de la familia fue incorrecta.

De nuevo y hasta aquí se han explicado las soluciones manuales utilizando las fórmulas y las soluciones usando la calculadora financiera y los factores. Un tercer método es utilizar Excel y las fórmulas financieras. En el complemento virtual al libro podrá estudiar esta metodología con ejemplos similares.

Problema 8

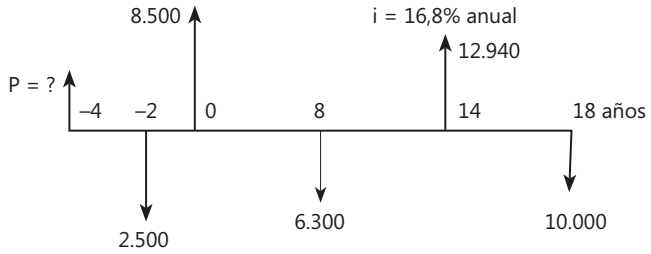
Calcular el valor futuro del siguiente flujo de caja.



Respuesta: $66.742,74

Problema 9

Calcular el valor presente (en –4) del siguiente flujo de caja.



Respuesta: $–2.219,66

Problema 10

Pedro recibió dos letras de cambio como respaldo de un préstamo que hizo. La primera se vence dentro de seis meses por valor de $3.000.000 y la segunda con vencimiento dentro de un año por valor de $5.000.000. Estas letras las negocia hoy con una tasa de descuento del 1,50% mensual. ¿Cuánto dinero recibe?
Respuesta: $6.925.564

Problema 11

Se deben cancelar tres pagarés: uno por $1.300.000 en tres meses, otro por $2.500.000 con vencimiento en cinco meses y un tercero por valor de $2.800.000 con vencimiento en un año. Si hoy dispone de efectivo y ofrece pagar hoy $2.500.000 y el resto en ocho meses. ¿Cuál debe ser el valor de este pago para cancelar los tres pagarés? Suponga un interés del 1,8% mensual.
Respuesta: $3.782.373

Problema 12

Para disponer de dinero dentro de un año se planea hacer los siguientes depósitos en una cuenta de ahorros que le reconoce una tasa del 16,8% anual C.M. $1.500.000 dentro de 5 meses, $650.000 dentro de siete meses y $1.300.000 dentro de 10 meses. Calcular:

a) Saldo en la cuenta al final del año.
b) El valor de un depósito único en el día de hoy para tener el mismo saldo al final del año.

Respuesta: a) $3.686.767 b) $3.120.256

Problema 13

Un préstamo de $5.000.000 al 26,82418% anual E, se pagará en dos cuotas iguales en los meses 6 y 8, de tal forma que al final del año quede un saldo pendiente de $500.000. Calcular el valor de las dos cuotas iguales.
Respuesta: $2.644.763

Problema 14

¿En cuánto tiempo un inversionista logra que un depósito de $1.500.000 se convierta en $3.331.933, si el rendimiento es del 3% mensual?
Respuesta: 27 meses

Problema 15

Se ofrece un apartamento al mejor postor. Se reciben las siguientes ofertas:

a) La primera propuesta es de $100.000.000 de contado.
b) La segunda ofrece pagar dentro de un año la suma de $137.000.000.
c) La tercera ofrece pagar hoy $70.000.000, y dentro de 10 meses la suma de $39.000.000.

Se estima que la tasa mínima para los créditos es 2,50% mensual, ¿cuál es la mejor oferta?
Respuesta: a) $100.000.000, hoy; b) $101.867.156, hoy; c) $100.466.738, hoy. La mejor es la opción b)

Problema 16

Pedro ofrece comprarle el carro a su hermano. El valor de contado es de $55.000.000. Pedro le ofrece pagarlo así: una cuota inicial equivalente al 20% y el resto será en tres pagos. El primero dentro de seis meses pagará $10.000.000; dentro de 12 meses pagará $25.000.000 y dentro de 18 meses se pagarán $22.000.000. Si Pedro considera que el interés debe ser mínimo del 3% mensual, ¿debe aceptar la propuesta?
Respuesta: no, sólo paga el equivalente a $38.832.021 para cubrir el saldo de hoy que es de $44.000.000, con la propuesta de Pedro la tasa que le reconoce es del 2% mensual.

Problema 17

Elaborar el diagrama de flujo de caja del siguiente cuadro de flujo de caja. Tasa de interés es 9,54% anual E. Calcular el valor presente (VP en el período cero) (*Ver* cuadro página siguiente.

Problema 18

La devaluación en 1993 fue del 14,5% anual y en 1994 el 16,8%. Si el 4 de junio de 1993 el dólar se cotizó a $815, ¿a cómo se cotizó el 20 de enero de 1994?

NOTA: No olvide que la devaluación es efectiva anual y se capitaliza diariamente.
Respuesta: $888,56

N	INGRESOS	EGRESOS
–6	450	
–5		
–4		800
–3	280	
–2		
–1		350
0		
1	350	290
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		630
11	580	
12		
13		
14	170	

Problema 19

Pedro envió el 20 de marzo 5.600 dólares para pagar la última cuota de un local comercial que le entregarán dentro de tres meses. El pago que debe hacer es de $12.320.000 el 20 de junio. Le ofrecieron recibirle los dólares a una tasa de cambio del momento que es de $2.200 y si la paga de inmediato le rebajan $1.000.000. Si no acepta tendrá que pagar la totalidad de la cuota en tres meses.

Pedro rechazó la oferta y decidió prestarle los dólares a un comerciante a una tasa del 1,5% mensual. El 20 de junio le devolvieron los dólares, incluidos los intereses, y los cambió por pesos para pagar la cuota. Si las tasas de devaluación para marzo, abril, mayo y junio fueron del 10,5, 13, 14,6 y 15,7% anuales efectivas, respectivamente:

a) ¿Por cuánto cambió los dólares el 20 de junio?
b) ¿Su decisión fue buena?

Respuesta: podría haber cambiado los dólares hoy por: $12.320.000; si hubiera pagado de inmediato le sobrarían $1.000.000 y pagaría $11.320.000.

El comerciante le devuelve US$5.855,80; valor del dólar el 20 de junio: $2.272,84; valor del cambio: $13.309.285; sobrante después de pagar la cuota: $989.285. No fue buena la decisión.

Problema 20

Hoy se compró una máquina a crédito y se pagará así: cuota inicial de $50.000, tres cuotas de $60.000, $80.000 y $90.000 a cinco, diez y doce meses, respectivamente. La tasa financiera del crédito es del 2,8% mensual. ¿Cuál fue el valor de la máquina hoy?
Respuesta: $229.818

Problema 21

Para respaldar un crédito se firmaron tres pagarés así: $100.000 para dentro de cuatro meses, $250.000 para dentro de un año y $300.000 para dentro de quince meses. El deudor propone refinanciar el crédito reemplazando los pagarés por uno solo a 10 meses. Si el interés es del 36% anual C.M. ¿cuál será el valor del nuevo pagaré?
Respuesta: $613.836

Problema 22

Un vehículo se estima en $30.000.000 de contado. El propietario lo negocia a crédito en las siguientes condiciones: un pago inicial en el momento de cerrarse la negociación y el saldo se pagará en un plazo máximo de un año. Si usted tiene capacidad para pagar dos cuotas iguales en los meses 6 y 12 de $12.000.000 cada una, calcular el valor del pago inicial sí la tasa de financiación es del 34,49% anual E.
Respuesta: $10.729.884

Problema 23

Una industria metalmecánica vende un torno en $12.000.000. La financiación que concede al comprador es la siguiente: exige una cuota inicial del 20% y el resto en 3 cuotas en los meses 4, 8 y 12. El segundo pago en el mes 8 debe ser $200.000 más que el primero, y el tercer pago debe ser $100.000 más que el segundo. Si se cobra una tasa de interés del 42,58% anual E, ¿cuál es el valor de los tres pagos?
Respuesta: $3.880.041, $4.080.041 y $4.180.041

Capítulo 4

La amortización y la capitalización

FÓRMULAS Y FACTORES PARA FLUJOS DE CAJA CON SERIES UNIFORMES

Además de los flujos de caja (ingresos y egresos) que ocurren esporádicamente y que en el capitulo anterior llamamos pagos únicos, ocurren otros flujos que periódicamente se repiten en iguales condiciones de tiempo y de valor.

Por ejemplo:

1. Cuando se adquiere el compromiso de pagar una deuda en cuotas mensuales (o en otros períodos) consecutivas y de igual valor (amortización o anualidad).
2. Se debe pagar el valor mensual de la nómina de una empresa.
3. Ahorrar mensualmente y durante cierto tiempo la misma cantidad (capitalizar, acumular cuotas mas intereses).
4. Hacer retiros periódicos (mensuales, bimestrales, trimestrales, anuales, etcétera) de igual valor de una cuenta de ahorros durante cierto tiempo.
5. Pagar las doce cuotas iguales del canon de arrendamiento.

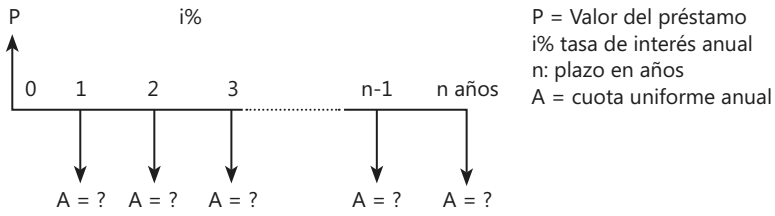
En general las series uniformes son ingresos o egresos de igual valor que ocurren en forma consecutiva durante cierto período.

Problema tipo o modelo:

Hoy se adquiere un crédito de $ *P* a una tasa de interés del *i* % anual para pagarlo en *n* cuotas iguales. ¿Cuál es el valor de las cuotas de amortización?

En forma más genérica: se toma un crédito hoy o se prestó un dinero ($ *P*) y se planea pagarlo en *n* cuotas iguales, que incluyan intereses y amortización de la deuda. Tasa de interés del *i* % anual.

Dado un valor presente *P,* hallar las cuotas uniformes *A* a una tasa *i* % anual y durante *n* períodos.



Nota: Observe que la primera cuota de amortización se paga un período después de ocurrir el préstamo de $ P y hasta el final del período *n*.

Para el cálculo del valor de *n* que se utilizará en la fórmula se hace la siguiente operación: número del período donde está la última cuota menos el período

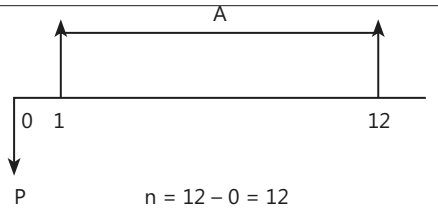
donde está el *P* (El presente *P* de una serie se ubica un período antes de la primera cuota).

Fórmula $A = P \dfrac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$

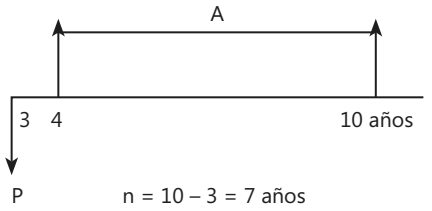
Presentación con factor:

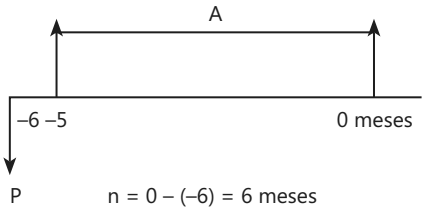
A = P (A/P, i%, n) A = $(P/A)^{-1}$

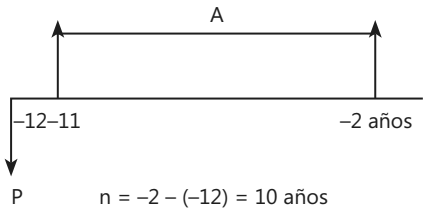
Veamos los siguientes ejemplos:

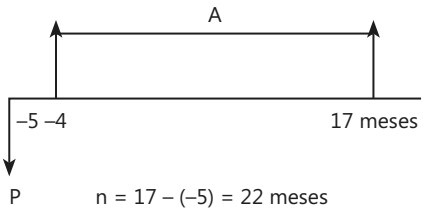


Cálculo del valor de *n*
n = Periodo donde termina la serie, menos periodo donde queda el presente de la serie (*P*). El presente de una serie queda un periodo antes de la primera cuota de la serie.









Problema 1

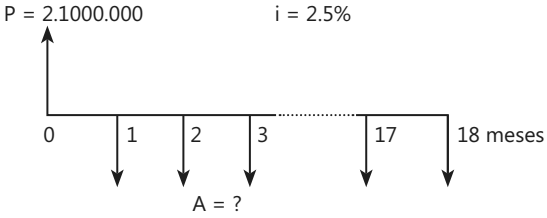
Almacén El Crédito ofrece el siguiente plan de financiamiento: crédito a 18 meses, cuota inicial 30% y cuotas constantes, tasa de financiación del 2,5% mensual.

Si un cliente compra artículos por valor de $3.000.000, ¿cuál debe ser el valor de las cuotas mensuales? Haga un cuadro de pagos.

V/r compra: 3.000.000

Cuota inicial: 3.000.000 x 0.3 = 900.000

Saldo a financiar: 3.000.000 – 900.000 = 2.100.000



$$A = P\,\frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$A = 2.100.000\,\frac{0.025\,(1+0.025)^{18}}{(1+0.025)^{18} - 1}$$

$$A = 2.100.000 \times 0.06967$$

A = 146.307 Valor de las cuotas mensuales

USO DEL FACTOR

La fórmula que hemos utilizado para calcular el valor de las cuotas uniformes (A) puede ser sustituida por el uso del *factor*, el cual podemos calcular utilizando una calculadora financiera. Nos referimos a las calculadoras *Hewlett Packard 17 BII* o *19BII*.

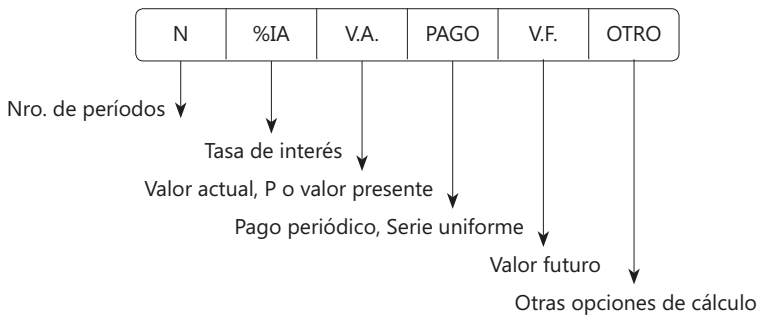
Configuración de la calculadora

No olvide que la configuración predeterminada de estas calculadoras viene con el modo final y 12 pagos por año. Le daremos una configuración de modo final y un pago por año. Debemos entender que los pagos serán al final del período y sólo un pago por cada período.

Procedimiento:

Al prender la calculadora aparece el menú principal: entrar por FIN (oprimir la tecla que está debajo de FIN), luego VDT (oprimir la tecla que está debajo de VDT) y luego OTRO.

En este menú oprimimos 1, P/AÑO, luego FINAL y luego EXIT.



En la parte superior de la pantalla debe aparecer: 1 PGOS/AÑO: MODO FINAL

En este caso no vamos a utilizar V.F. ni OTRO.

El procedimiento usando la calculadora financiera es:

1. Entrar por FIN (Financiera) y luego VDT (Valor del dinero en el tiempo).
2. Oprimir la tecla CLEAR DATA y después INPUT para eliminar cualquier valor en las memorias de este menú y para verificar que la configuración sí es la correcta.

Vamos a resolver el problema anterior utilizando la calculadora.

La ecuación utilizada antes en la solución de este problema fue:

$$A = 2.100.000 \frac{0.025\,(1 + 0.025)^{18}}{(1 + 0.025)^{18} - 1}$$

Esta fórmula escrita con el factor

$$A = 2.100.000\ \underbrace{(A/P,\ 2{,}5\%,\ 18)}$$

$$A = 2.100.000 \times 06967$$

$$A = 146.307$$

La fórmula $\frac{0.025\,(1 + 0.025)^{18}}{(1 + 0.025)^{18} - 1}$ la sustituimos por (A/P; 2,5%, 18) que es el factor, y para encontrar el valor respectivo hacemos lo siguiente: digitamos 18 y oprimimos la tecla debajo de N, digitamos 2.5 y oprimimos la tecla debajo de %IA, digitamos 1 y oprimimos la tecla debajo de V.A. Luego oprimimos la tecla debajo de PAGO y obtenemos el valor de 0,06967. Omitimos el signo menos que solo indica que es egreso.

Si queremos obtener la respuesta final sin necesidad de conocer el valor del factor, en vez de digitar 1 y luego V.A., digitamos el valor real de V.A. que es 2.100.000 y luego la tecla de Pago y la calculadora nos muestra PAGO = 146.307. Omitimos el signo menos que sólo indica que es egreso.

Realmente lo que hacemos es utilizar una fórmula pregrabada en la memoria de la calculadora. Antes de calcular cualquier valor de un factor, no olvide CLEAR DATA y luego INPUT para borrar memorias temporales.

CUADRO DE PAGOS O CUADRO DE AMORTIZACIÓN

El siguiente cuadro de pagos, presenta las siguientes columnas:

N.° 1. Identifica el número de la cuota que se cancela.

N.° 2. Contiene el valor cuotas. En este caso son constantes durante toda la vigencia del crédito.

N.° 3. Contiene el valor de los intereses generados durante el mes. Cada valor se obtiene multiplicando el saldo del mes anterior por la tasa financiera.

Ejemplo: para el interés de la primera cuota se multiplica el saldo de la cuota cero ($ 2.100.000) por la tasa 0,025 así: 2.100.000 x 0,025 = 52.500.

El interés de la sexta cuota: saldo de la quinta cuota por el interés, 1.606.919 x 0,025 = 40.173.

N.° 4. Contiene los valores que amortizan el saldo de la deuda. La amortización es igual al valor de la cuota menos el valor del interés en el mismo período.

Amortización de la sexta cuota: cuota 6 menos interés 6: 146.307 – 40.173 = 106.134.

N.° 5. Saldo de la deuda (saldo insoluto). Se obtiene en cada caso restando del saldo de la cuota anterior el valor de amortización del período.

Saldo después de pagar la sexta cuota: saldo en la quinta cuota menos la amortización en la sexta cuota: 1.606.919 – 106.134 = 1.500.785.

En cada período se repiten las mismas instrucciones.

		CUADRO DE PAGOS		
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Número cuota	**Valor cuota**	**Interés del período**	**Amortización**	**Saldo**
0	0	0	0	2.100.000
1	146.307	52.500	93.807	2.006.193
2	146.307	50.155	96.152	1.910.040
3	146.307	47.751	98.556	1.811.484
4	146.307	45.287	101.020	1.710.464
5	146.307	42.762	103.546	1.606.919
6	146.307	40.173	106.134	1.500.785
7	146.307	37.520	108.788	1.391.997
8	146.307	34.800	111.507	1.280.490
9	146.307	32.012	114.295	1.166.195
10	146.307	29.155	117.152	1.049.042
11	146.307	26.226	120.081	928.961
12	146.307	23.224	123.083	805.878
13	146.307	20.147	126.160	679.718
14	146.307	16.993	129.314	550.404
15	146.307	13.760	132.547	417.857
16	146.307	10.446	135.861	281.996
17	146.307	7.050	139.257	142.739
18	146.307	3.568	142.739	0

Es interesante hacer una presentación gráfica de los saldos, intereses y amortizaciones del cuadro de pagos anterior. Para ello utilizaremos las herramientas de Excel.

En el primer gráfico presentamos el comportamiento de los saldos durante toda la vigencia del crédito. Los períodos o cuotas (1 – 18) serán las abscisas que se ubican en el eje de las *X* y los diferentes saldos en cada período serán las ordenadas que se ubican en el eje *Y*.

Ejemplo: período 6: el par ordenado será (6; 1.500.785); período 12: el par ordenado será (12; 805.878) y así sucesivamente.

En el segundo gráfico se presentan los intereses y las amortizaciones en cada una de las cuotas.

Cuota 6: el par ordenado para los intereses será (6; 40.173); cuota 12: (12; 23.224). Para la amortización en las mismas cuotas los pares ordenados serán (6; 106.134) y (12; 123.150).

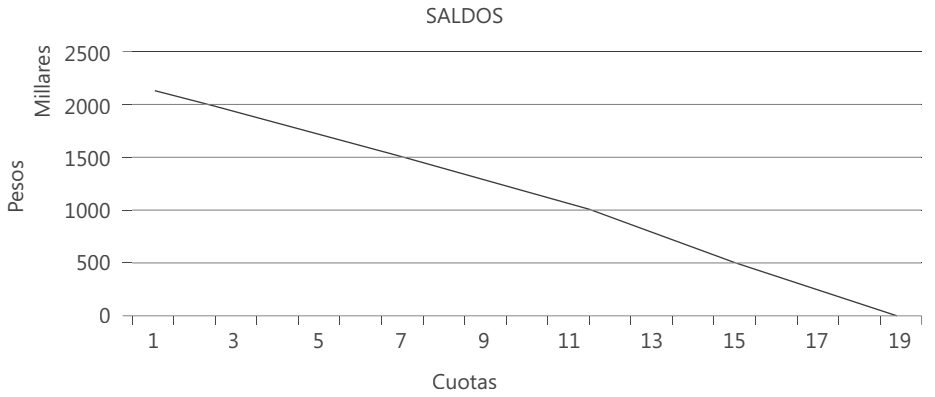


Gráfico 7 Comportamiento de los saldos.

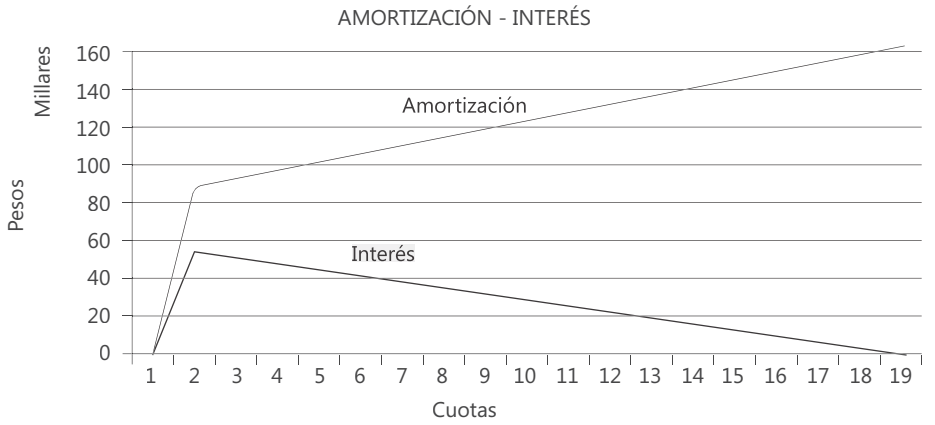


Gráfico 8 Amortización - Intereses.

En la siguiente gráfica se muestran las cuotas que son constantes y están compuestas por los intereses más la amortización.

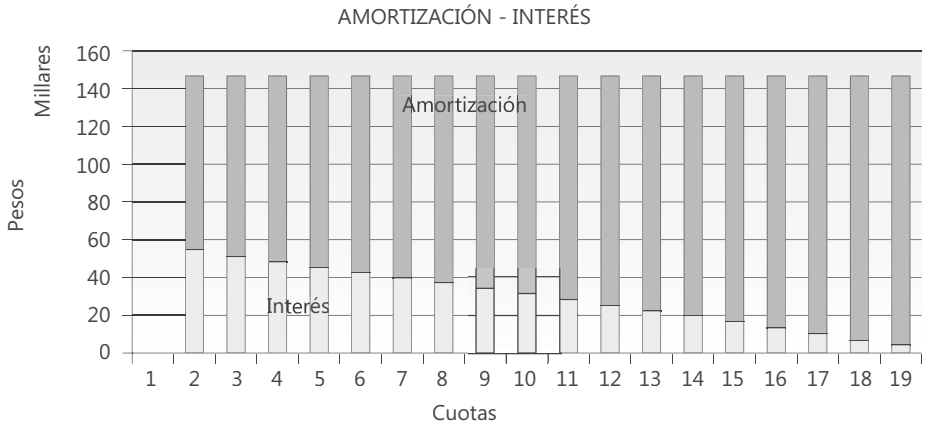
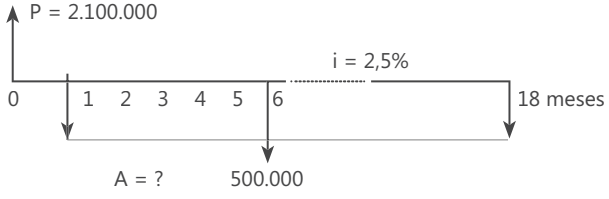


Gráfico 9 Amortización-Intereses cuotas contantes.

Problema 2

Si en el problema anterior el cliente promete pagar en la cuota 6 un valor adicional de $500.000, ¿qué valor tendrán las cuotas mensuales?



Si partimos de la ecuación de equilibrio económico:

Ingresos = Egresos, I = E o I – E = 0

Tendríamos:

2.100.000 = A (P/A, 2,5%, 18) + 500.000 (P/F, 2,5%, 6)

Ingresos = Egresos

2.100.000 = A x 14,353364 + 500.000 x 0,862297

A = 116.269 Cuota mensual

En la cuota 6 pagará en total: 500.000 + 116.296 = 616.296

CUADRO DE PAGOS					
Mes	**Cuota**	**Interés**	**Amortización**	**Saldo**	**Cuota extra**
0	0	0	0	2.100.000	
1	116.269	52.500	63.769	2.036.231	
2	116.269	50.906	65.363	1.970.868	
3	116.269	49.272	66.997	1.903.870	
4	116.269	47.597	68.672	1.835.198	
5	116.269	45.880	70.389	1.764.809	
6	116.269	44.120	572.149	1.192.660	500.000
7	116.269	29.817	86.453	1.106.208	
17	116.269	5.602	110.667	113.433	
18	116.269	2.836	113.433	0	

Amortización = Cuota ordinaria más cuota extra menos interés.

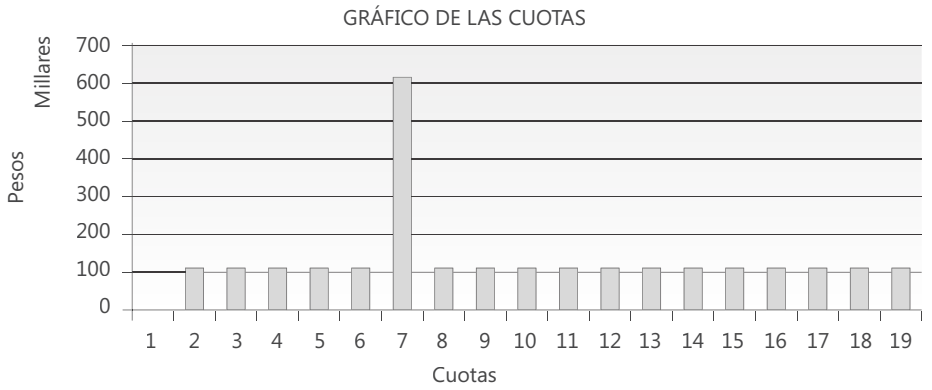


Gráfico 10 Cuotas.

Observe en el siguiente gráfico de saldos el efecto que produce el pago de una cuota extra en el sexto mes. El saldo presenta un descenso vertical.

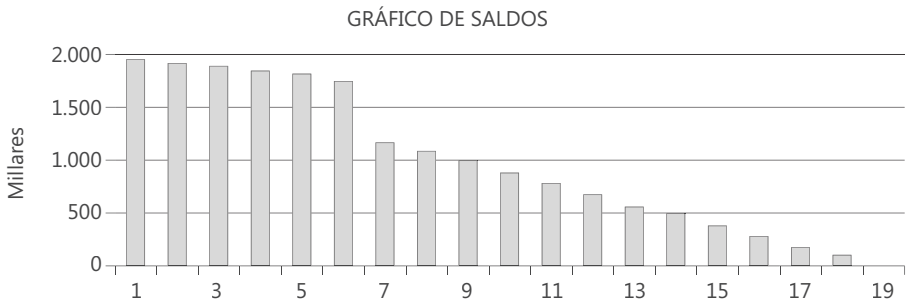
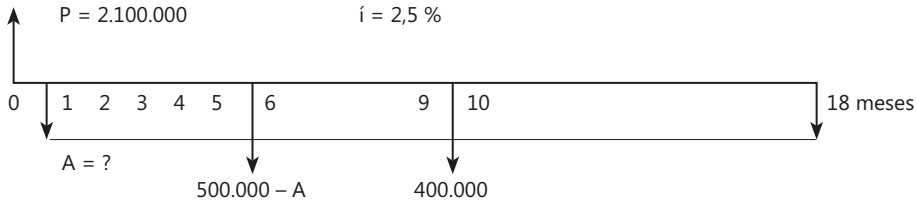


Gráfico 11 Saldos - descenso vertical.

Problema 3

Si en el ejercicio anterior consideramos que en la sexta cuota los $500.000 no son adicionales, sino que en este pago está incluida la cuota ordinaria, ¿cuál sería el valor de las cuotas mensuales, si se tiene en cuenta que la décima cuota daría una cuota adicional de $400.000?



$$2.100.000 = A(P/A, 2{,}5\%, 18) + (500.000 - A)\,(P/F, 2{,}5\%, 6) + 400.000\,(P/F, 2{,}5\%, 10)$$

(14,35336) (0,86230) (0,78120)

A = 100.539

CUADRO DE PAGOS					
Período	**Cuota**	**Cuota extra**	**Interés**	**Amortización**	**Saldo**
0	0				
0	0	2.100.000			
1	100.539		52.500	48.039	2.051.961
2	100.539		51.299	49.240	2.002.722
3	100.539		50.068	50.471	1.952.251
4	100.539		48.806	51.732	1.900.519
5	100.539		47.513	53.026	1.847.493
6	500.000		46.187	453.812	1.393.681
7	100.539		34.842	65.697	1.327.985
8	100.539		33.200	67.339	1.260.646
9	100.539		31.516	69.022	1.191.623
10	100.539	400.000	29.791	470.748	720.875
11	100.539		18.022	82.517	638.359
12	100.539		15.959	84.580	553.779
13	100.539		13.844	86.694	467.085
14	100.539		11.677	88.861	378.224
15	100.539		9.456	91.083	287.141
16	100.539		7.179	93.360	193.780
17	100.539		4.845	95.694	98.086
18	100.539		2.452	98.086	0

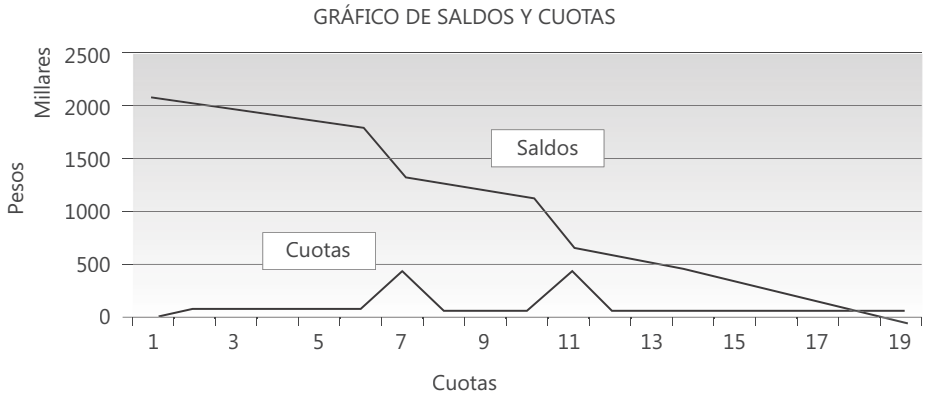
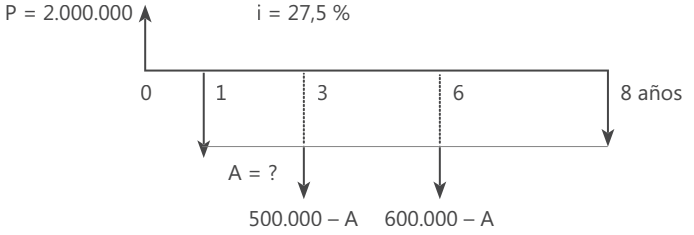


Gráfico 12 Saldos y cuotas.

Problema 4

Elaborar una tabla de amortización para cancelar una deuda de $2.000.000 en ocho cuotas anuales. Las cuotas 3 y 6 serán de $500.000 y $600.000, respectivamente; las demás serán iguales. La tasa de interés pactada fue del 27,5% anual E. La tabla debe contener: número de la cuota, valor, interés, amortización y saldo.



Utilizando la igualdad Ingresos = Egresos, y trasladando todo el flujo a valor presente:

$$2.000.0000 = A\,(P/A,\ 27{,}5\%,\ 8) + (500.000 - A)(P/F,\ 27{,}5\%,\ 3) + (600.00 - A)(P/F,\ 27{,}5\%,\ 6)$$

(3,11567) (0,48247) (0,23278)

$$2.000.000 = 3{,}11567\ A + 241.235 - 0{,}48247\ A + 139.668 - 0{,}23278\ A$$

$$A = \$674.507$$

Observe que los valores previstos para las cuotas 3 y 6 son menores que el resto de las cuotas; sin embargo, en la formulación de la ecuación se asumió como si estuvieran incluidas las cuotas ordinarias en cada una de ellas.

Cuota	Valor	Interés	Amortización	Saldo
0	–	–	–	2.000.0000
1	674.506	550.000	124.506	1.875.494
2	674.506	515.760	158.745	1.875.494
3	500.000	472.106	27.894	1.688.855
4	674.506	464.435	210.071	1.478.784
5	674.506	406.666	267.840	1.210.944
6	600.000	333.009	266.991	943.953
7	674.506	259.587	414.919	529.034
8	674.506	145.484	529.021	0

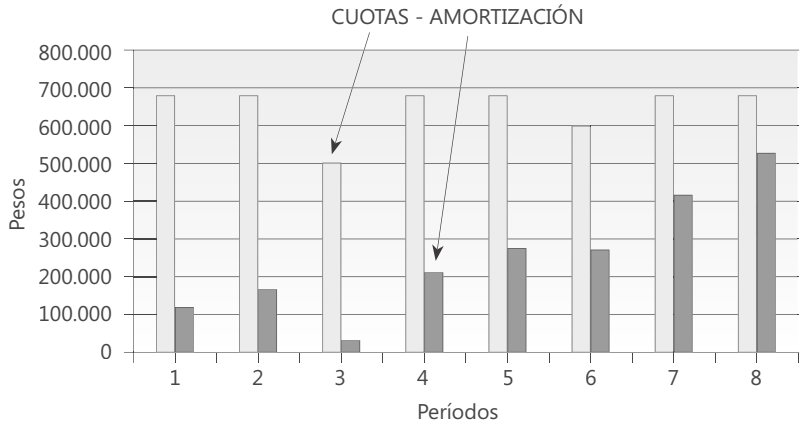


Gráfico 13 Cuotas - Amortización.

De nuevo y hasta aquí se han explicado las soluciones manuales utilizando las fórmulas y las soluciones, con el empleo de la calculadora financiera y los factores. Un tercer método es utilizar Excel y las fórmulas financieras. En el complemento virtual al libro podrá estudiar esta metodología con ejemplos similares.

VALOR PRESENTE DE UNA SERIE UNIFORME

En todas las entidades de crédito se deben realizar estudios económicos de las personas o empresas que solicitan préstamos con diferentes destinaciones. Estos estudios se hacen con base en la información que cada cliente suministra en los formularios que se deben llenar cuando se hace la solicitud de crédito. Es fundamental determinar en el estudio la capacidad que tiene cada cliente de pagar cierto valor en las cuotas que se le asignarían. Por ejemplo, si una persona tiene un salario de $1.000.000 mensuales, su capacidad de pago probablemente no es mayor al 30% de su salario mensual. Por lo tanto, sus cuotas máximas mensuales serían de $300.000.

Se supone que con los $700.000 restantes debe cubrir sus necesidades personales, es decir, no se le debe comprometer en el pago de un crédito más del 30% de su ingreso mensual. Esto, en sana lógica, supone que el deudor no tendría motivos económicos para incumplir el compromiso de pagos. Esta aparente seguridad facilitaría la decisión de otorgar el crédito.

Con este análisis (además de otros que en cada caso la entidad financiera estime conveniente realizar en el estudio económico) se ha determinado en forma genérica la capacidad de pago de cada cliente por período.

En forma general: si se tiene una capacidad de pago por período de $\$A$ cada vez, ¿cuánto dinero me pueden prestar hoy?

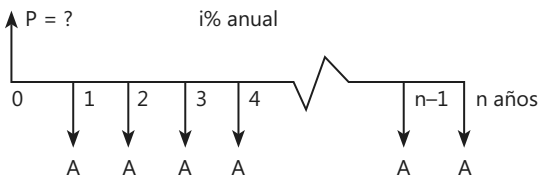
Caso típico: préstamo de vivienda con pagos de cuota fija, un crédito de $\$P$ para pagar en cuotas mensuales $\$A$ cada vez (cuota fija).

Podemos sintetizar el cálculo anterior como: capacidad de endeudamiento. Dada una capacidad de pago fijo por período de $\$A$, calcular el monto total del préstamo.

Problema tipo o modelo

¿Cuál es la capacidad de endeudamiento (P) si se tiene la capacidad de pagar n cuotas anuales iguales de $\$A$ a una tasa financiera de i%?

Si de la fórmula anterior $A = P \dfrac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ despejamos el valor P.



Fórmula: $P = A \dfrac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}$

Presentación con factor:

P = A (P/A, i%, n) P = $(A/P)^{-1}$

Nota: La primera cuota se ubica un período después de P (préstamo).

Cálculo de n: igual al caso anterior:

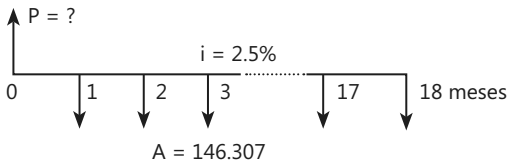
Para el cálculo del valor de n que se utilizará en la fórmula se hace la siguiente operación: número del período donde está la última cuota menos el período donde está el P (el presente P de una serie se ubica un período antes de la primera cuota).

Problema 5

En los PROBLEMAS 1, 2 y 3 de este capítulo se calculó en cada caso el valor de las cuotas mensuales. De acuerdo con estos problemas, calcular el valor del préstamo (crédito) en cada uno de ellos conociendo las cuotas calculadas en cada caso.

Problema 1: Almacén El Crédito ofrece el siguiente plan de financiamiento: crédito a 18 meses, cuota inicial del 30% y cuotas constantes mensuales de $146.307, tasa de financiación del 2,5% mensual.

¿Si un cliente compra artículos a crédito en estas condiciones, cuál fue el valor del crédito?

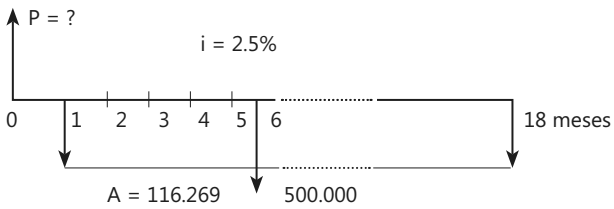


P = 146.307 (P/A, 2.5%, 18)

P = 146.307 (14.35336)

P = $2.100.000

Problema 2: si en el problema anterior el cliente promete pagar en la sexta cuota un valor adicional de $500.000, y el valor de las cuotas mensuales será de $116.269 a una tasa del 2,5% mensual, ¿cuál es el valor del crédito?



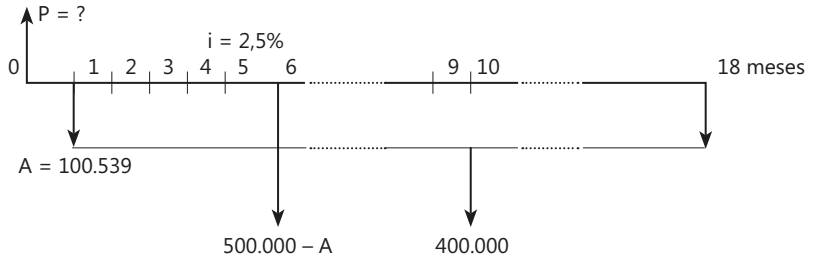
Si partimos de la ecuación de equilibrio económico: Ingresos = Egresos, I = E o I – E = 0
Tendríamos:

P = 116.269 (P/A, 2,5%, 18) + 500.000 (P/F, 2,5%, 6)

(14,35336) (0,86230)

P = $ 2.100.000

Problema 3: si en el problema anterior el cliente promete pagar en la sexta cuota un valor total de $500.000 (este valor incluye la cuota ordinaria), y el valor de las cuotas mensuales será de $100.539, en la cuota 10 pagará adicionalmente $400.000, con una tasa del 2,5% mensual, ¿cuál es el valor del crédito?



Si partimos de la ecuación de equilibrio económico: Ingresos = Egresos, I = E o I – E = 0
Tendríamos:

$$P = 100.539\ (P/A, 2{,}5\%, 18) + 399.461\ (P/F, 2{,}5\%, 6) + 400.000\ (P/F, 2{,}5\%, 10)$$

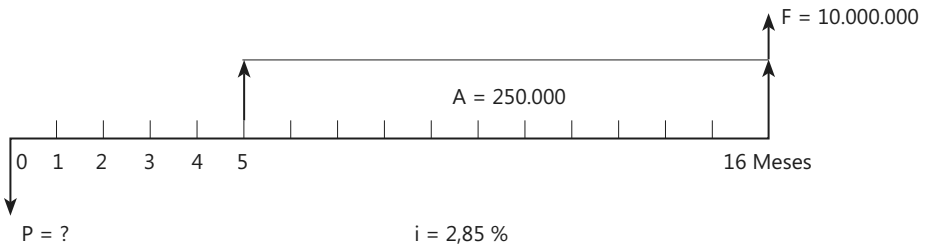
(14,35336) (0,86230) (0,78120)

P= $2.100.000

Nota: Los cuadros de pagos se elaboran de igual manera a los anteriormente mostrados en la sección anterior.

Problema 6

¿En cuánto se puede negociar hoy un título valor que dentro de 5 meses empezará a pagar 12 cuotas mensuales de $250.000 cada una? La tasa mínima atractiva de retorno (TMAR) (en este caso es la misma tasa de interés) para el inversionista es del 2,85% mensual. Además, al final del último período se recuperará el valor nominal del título que es de $10.000.000.



Nota: Recuerde que el *P* de una serie queda un período antes del primer valor de la serie. En este caso queda en el período 4. Si son doce pagos, entonces el último pago estará en 4 + 12 = 16 meses.

También en el período 16 estará el valor de recuperación de la inversión.

De acuerdo con lo anterior, el valor presente de la serie estará ubicado en el período 4, pero es necesario llevarlo al período 0. Este valor, P_4, se convierte en

un valor futuro para el período 0; por lo tanto, lo debemos trasladar al período 0 utilizando el factor P/F.

Este factor convierte la serie de 12 cuotas en un valor presente ubicado en el período 4, para trasladarlo luego al período cero.

Este factor traslada el valor presente de la serie desde el período 4 al período cero.

$$P = 250.000\ \underbrace{(P/A,\ 2{,}85\%,\ 12)}\ \underbrace{(P/F,\ 2{,}85\%,\ 4)} + 10.000.000\ \underbrace{(P/F,\ 2{,}85\%,\ 16)}$$

$$P = 250.000 \times 10{,}043725 \times 0{,}893682 + 10.000.000 \times 0{,}637869$$

$$P = 8.622.664$$

Un método alternativo para calcular este valor consiste en trasladar a *P* hasta el período 4, que es donde queda el *P* proveniente de la serie, y el valor nominal de recuperación ($10.000.000), trasladado también hasta el período 4 con el factor P/F.

$$P\ \underbrace{(F/P,\ 2{,}85\%,\ 4\ )} = 250.000\ \underbrace{(P/A,\ 2{,}85\%,\ 12)} + 10.000.000\ \underbrace{(P/F,\ 2{,}85\%,\ 12)}$$

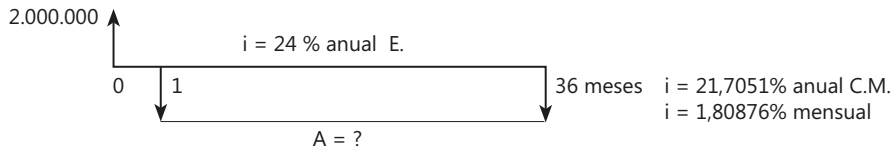
$$P \times 1{,}118967 = 250.000 \times 10{,}043725 + 10.000.000 \times 0{,}713754$$

$$P = \$8.622.664$$

Problema 7

Juan Pérez obtiene un crédito de $2.000.000 para ser pagados en tres años, mediante cuotas mensuales uniformes con intereses sobre saldos al 24% efectivo anual. Si en el momento de pagar la sexta cuota mensual decide pagar en forma anticipada las cuotas 7, 8, y 9, debido a un viaje que va a realizar durante tres meses, ¿cuál debe ser el valor a cancelar al vencimiento de la sexta cuota?

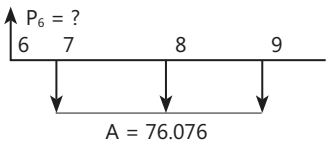
Respuesta. $76.076 cuotas mensuales. Valor anticipado de las tres cuotas: $220.215.



A = 2.000.000 (A/P; 1,80876 %; 36)

A = $76.076 cuotas mensuales

Cuotas que se pagarán anticipadamente:



P = 76.076 (P/A; 1,80876%; 3) = $220.215

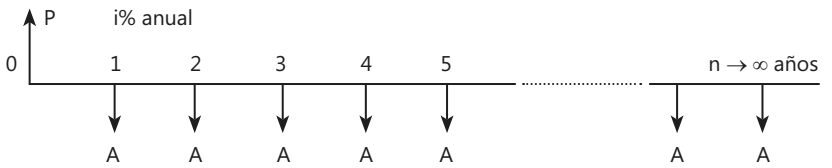
VIDA INFINITA O PERENNE

Costo capitalizado y recuperación de capital cuando la vida es infinita

Puede ocurrir que en una decisión económica se presente una vida útil demasiado grande. En este caso se define como anualidad perpetua aquella que tiene un infinito número de pagos. Estrictamente, no existe, porque en la realidad todo tiene un fin; sin embargo, se considera como vida infinita, perpetua o perenne cuando ésta es demasiado prolongada, por ejemplo, 80 o más años.

PROBLEMA TIPO: Hoy se depositan $\$P$ a una tasa del i% anual. Se harán retiros de $\$A$, anuales iguales y de por vida.

Diagrama:



$P = \frac{A}{i}$	$A = P.i$
Costo capitalizado Cuando se calcula el valor presente de una serie infinita, este V.P se llama: *Costo capitalizado*	**Recuperación de capital** Esta anualidad infinita (serie uniforme para recuperar el capital) se presenta cuando solo se cobran o se pagan los intereses del período y no se afecta el saldo porque la amortización es 0 pesos. Esto quiere decir que el interés que se genera por el uso del capital es el valor de la anualidad o de la cuota.

Problema 8

Hallar el valor de una serie uniforme anual perpetua si se depositan hoy $300.000 a una tasa del 20% anual E.

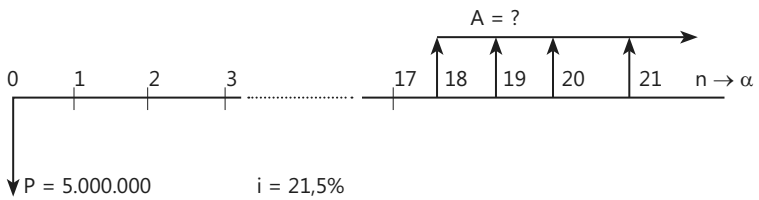
$$A = 300.000 \times 0{,}20 = 60.000$$

Podemos apreciar que si se depositan hoy $300.000 a una tasa del 20% anual, anualmente podrá hacer retiros de $60.000 y nunca se disminuirá el capital inicial porque solo se retiran los intereses causados.

Períodos	Retiro	Interés	Interés acumulado	Saldo
0	0	0	0	300.000
1	60.000	60.000	0	300.000
2	60.000	60.000	0	300.000
3	60.000	60.000	0	300.000
4	60.000	60.000	0	300.000
5	60.000	60.000	0	300.000
ETC.	60.000	60.000	0	300.000

Problema 9

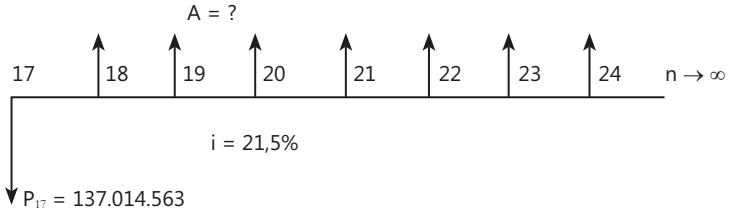
Un padre de familia decide depositar hoy $5.000.000 en una cuenta de ahorros que paga el 21,5% anual E, para que su hijo, dentro de 18 años, retire a perpetuidad y anualmente una cantidad fija para su sostenimiento. ¿Cuál es el valor de los retiros anuales?



Primero traslademos los $5.000.000 hasta el año 17 (un período antes de iniciar la serie de retiros), para luego convertir este valor que sirve de valor presente en este año para la serie que empieza un período después (año 18) en una serie infinita de retiros.

$$F_{17} = 5.000.000\ (F/P,\ 21,5\%,\ 17) = 5.000.000 \times 27,40291 = \$137.014.563$$

En este momento el valor acumulado de $137.014.563, constituye un valor presente en el período 17 y el nuevo diagrama es:



Por tratarse de una serie infinita aplicamos la ecuación A = P. í

A = 137.014.563 x 0,215 = 29.458.131

La anualidad uniforme obtenida aparenta ser desproporcionada para el depósito inicial realizado ($5.000.000), pero se trata de dinero que se retirará a partir del año 18 en adelante que no tendrá el mismo poder adquisitivo de una cantidad igual ubicada en el período cero, es decir, hoy.

Si la primera anualidad de $29.458.131 que se retirará, la tratamos como un valor futuro y la trasladamos a valor presente (hoy), utilizando la misma tasa de capitalización del 21,5% anual, tendríamos:

$$P = F\ (P/F,\ i\%,\ n) \Rightarrow P = 29.458.131\ (P/F,\ 21{,}5\%,\ 18) = 29.458.131 \times 0{,}03003 = \$884.774$$

Si asumiéramos una inflación promedio constante a través del tiempo en un porcentaje igual a la tasa del 21,5% anual, podríamos afirmar que lo que hoy cuesta $884.774, dentro de 18 años costaría $29.458.131.

Las anualidades posteriores a la del año 18 tendrían menos poder de compra.

Problema 10

¿Cuál debe ser el valor de un depósito hoy, con el fin de obtener una renta perpetua de $ 500.000 si se puede negociar una tasa de interés del 24 % anual?

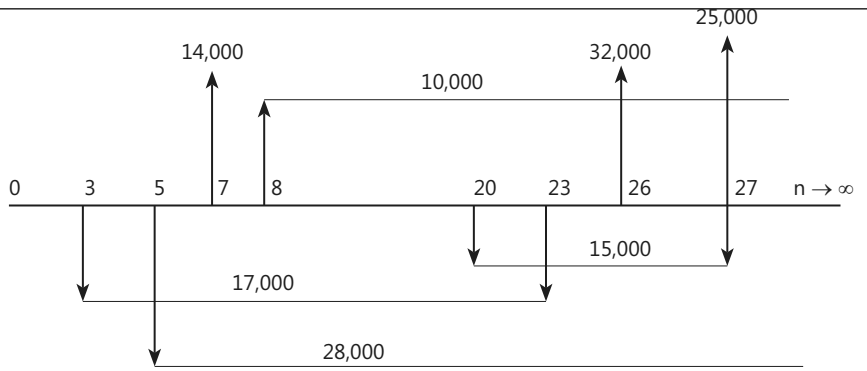
$$P = \frac{A}{i} \qquad P = 500.000/0{,}24 = \$\ 2.083.333$$

Obsérvese que el interés que produce anualmente un capital de $2.083.333 colocado al 24% anual es: $2.083.333 x 0,24 = $500.000.

Esto indica que al final de cada año, y de por vida, se podrá retirar de la cuenta $500,000 y queda de nuevo el capital inicial para producir durante el año siguiente el mismo interés, renta infinita o perenne.

Problema 11

Calcular el valor presente del siguiente flujo, tasa 21,4% anual E.



Solución Presente = Ingresos – Egresos P = I – E

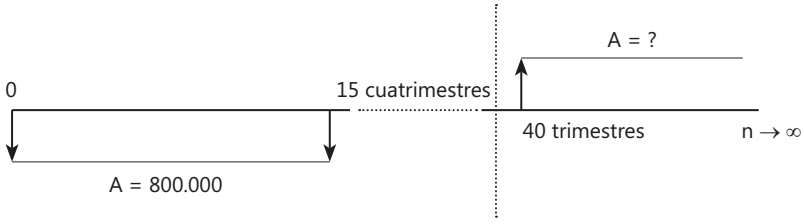
$$P = 14{,}800(P/F, 21{,}4\%, 7) + \frac{10.000}{0,214}(P/F, 21{,}4\%, 7) + 32{,}000(P/F, 21{,}4\%, 26) + 25{,}000(P/F, 21{,}4\%, 27) -$$

$$17{,}000(P/A, 21{,}4\%, 21)\,(P/F, 21{,}4\%, 2) - \frac{28{,}000}{0,214}(P/F, 21{,}4\%, 4) - 15{,}000(P/A, 21{,}4\%, 8)\,(P/F, 21{,}4\%19)$$

Encontrar los valores de los factores y realizar las operaciones algebraicas.
Respuesta: $-98.435

Problema 12

Durante cinco años, empezando hoy, usted deposita cada cuatro meses la cantidad de $800.000. Al final del décimo año usted empezará a retirar trimestralmente, y de por vida, una misma cantidad. Si la tasa pactada es del 27% anual E, ¿de qué valor serán los retiros?



Conversión de tasas; i = 27% anual E, i = 8,29321% cuatrimestral efectiva.

i = 6,15756% trimestral efectiva.

Ingresos = Egresos

$$\frac{A}{0,0615756}(P/F;\ 6{,}15756\%;\ 39) = 800.000 + 800.000\,(P/A;\ 8{,}29321\%;\ 15)$$

A = $ 4.765.160

PROBLEMAS GENERALES SOBRE SERIES

1. Juan está planeando una temporada en el exterior. Hace tres meses abrió una cuenta con $1.300.000. A partir de hoy iniciará cinco depósitos iguales y mensuales. Además, dentro de un semestre ahorrará $900.000.

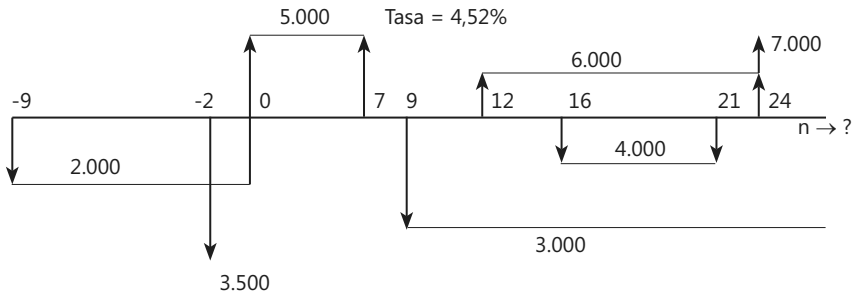
   El dinero acumulado lo utilizará mediante tres retiros iguales a partir del séptimo mes. Cada retiro será de $2.000.000 mensuales.

   Adicional al primer retiro, necesita pagar los pasajes, que tendrán un costo de $1.250.000, a una tasa de interés del 21,36% anual C.M. ¿Cuál será el valor de los depósitos mensuales?

   Elabore un cuadro con el flujo de caja.

Respuesta: $856.483

2. Calcular el valor presente del siguiente flujo:



Respuesta: $20.322

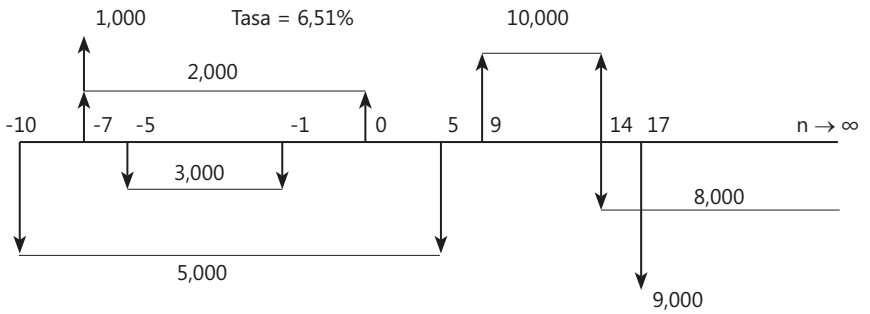
3. Un estudiante necesita disponer de dinero para asegurar su especialización que durará cuatro semestres. Para lograrlo inició una cuenta de ahorros hace dos semestres con $1.350.000, en una entidad financiera que le reconoce una tasa de interés del 9,6% anual C.S. A partir de hoy empezará ahorros semestrales e iguales y en total hará seis depósitos.

   Dentro de un año podrá depositar adicionalmente $600.000. Su especialización la empezará dentro de tres años. Pagará cuatro matrículas semestrales iguales de $3.500.000 cada una; además necesitará $2.000.000 adicionales cuando haga el primer retiro para sus gastos iniciales de instalación.

   ¿Cuál es el valor de los depósitos? Haga un cuadro de pagos.

Respuesta: $1.744.323

4. Calcular el valor presente del siguiente flujo.



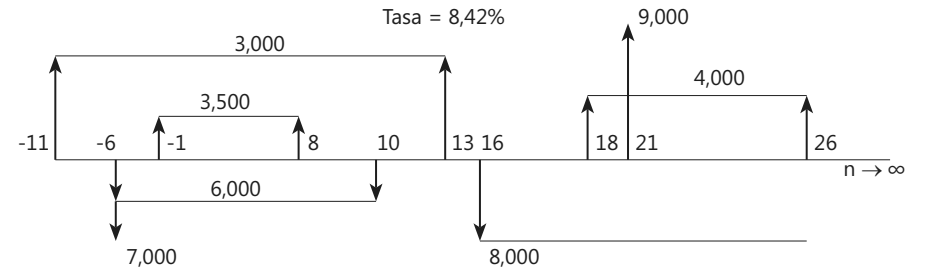
Respuesta: $122.142

5. Desde hace cuatro meses he venido consignando una misma cantidad en una cuenta y continuaré hasta dentro de dos meses. Hace un mes consigné $500.000. Espero utilizar el dinero para cancelar una obligación en cuatro pagos iguales y mensuales iniciando dentro de tres meses. Estos pagos serán de $800.000 cada uno.

Además, en el quinto mes pagaré $100.000 adicionales y en el sexto pagaré el doble adicional. La tasa es del 29,08% anual E. ¿Cuál debe ser el valor de los depósitos mensuales que garanticen los retiros?

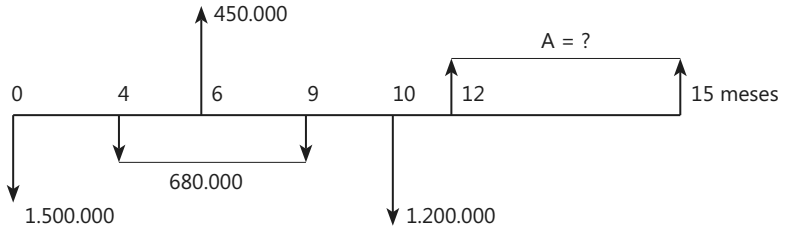
Respuesta: $372.211

6. Calcular el valor presente del siguiente flujo:



Respuesta: $16.871

7. En el siguiente flujo de egresos (cuenta de ahorros) e ingresos (retiros), calcular el valor de los retiros. La tasa es del 3,21% mensual.



Respuesta: $2.040.042

8. Hace cuatro meses me prestaron $3.000.000. Hace dos meses me han venido prestando mensualmente $1.000.000. En total me harán seis préstamos mensuales de igual valor. El dinero lo pagaré así: dentro de tres meses iniciaré cuatro pagos mensuales iguales, y adicional al último pago, pagaré una cuota extra de $2.500.000.

   A una tasa del 30% anual C.M., ¿cuál es el valor de los pagos mensuales? Haga un cuadro de pagos.

Solución:

n	Ingresos	Egresos	Interés	Saldo
-4	3.000.000			3.000.000
-3			75.000	3.075.000
-2	1.000.000		76.875	4.151.875
-1	1.000.000		103.797	5.255.672
0	1.000.000		131.392	6.387.064
1	1.000.000		159.677	7.546.740
2	1.000.000		188.669	8.735.409
3	1.000.000	1.979.318	218.385	7.974.476
4		1.979.318	199.362	6.194.521
5		1.979.318	154.863	4.370.066
6		4.479.318	109.252	0

Pagos mensuales: $1,979,318

9. Un banco me prestó hace tres meses $3.500.000. Otra entidad me ha venido prestando mensualmente, desde hace dos meses, $700.000, y en total me harán cinco préstamos iguales.

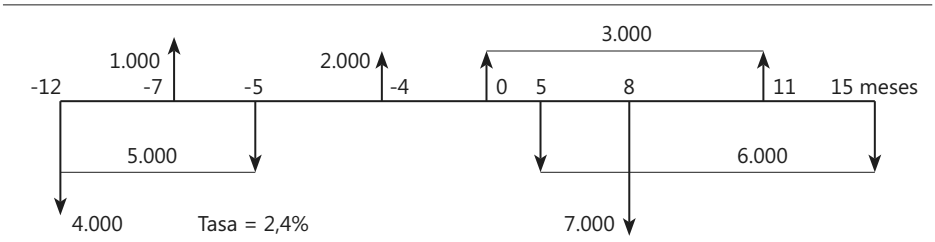
   El dinero debo empezar a pagarlo así: dentro de tres meses empezaré a pagar cuotas mensuales iguales, en total pagaré cuatro cuotas, pero adicional a la última cuota debo pagar $800.000.

   A una tasa del 1,95% mensual, ¿cuál será el valor de los pagos mensuales? Haga un cuadro de pagos.

Respuesta:

n	Préstamos	Pagos	Interés	Saldo
-3	3.500.000			3.500.000
-2	700.000		68.250	4.268.250
-1	700.000		83.231	5.051.481
0	700.000		98.504	5.849.985
1	700.000		114.075	6.664.059
2	700.000		129.949	7.494.009
3		1.771.473	146.133	5.868.669
4		1.771.473	114.439	4.211.635
5		1.771.473	82.127	2.522.288
6		2.571.473	49.185	0

10. Calcular el valor presente del siguiente flujo de caja. La tasa es del 2,4% mensual.



Solución:

P = 1.000 (F/P, 2,4%, 7) + 2.000 (F/P, 2,4%, 4) + 3.000 (P/A, 2,4%, 12) + (F/P, 2,4%, 1)
1,18059 1,09951 10,32015 1,024
-4.000 (F/P, 2,4%, 12) -5.000 (P/A, 2,4%, 8) (F/P, 2,4%,13) -6.000 (P/A, 2,4%, 11) (P/F, 2,4%, 4)
1,32923 7,20081 1,36113 9,56783 0,90949
-7.000 (P/F, 2,4%, 8)
0,82718
P = -77241

11. Una compañía compra una máquina por $20.000 y la vende a los 16 años por $4.000. Los gastos de operación son de $2.000 anuales. Además debe hacerle revisión general cada cinco años por un valor de $3.800 cada una. ¿Cuál es el valor presente de la máquina? La tasa de interés es del 26% anual M.V.

Respuesta: $-53.197

12. Calcular el valor presente de una máquina cuyo costo es de $100.000 y tiene una vida útil de nueve años con un valor de salvamento de $20.000. Se estima un costo de operación de $12.000 anuales. En el sexto año se debe hacer, además, una reparación general por un valor de $25.000. La tasa de interés es del 1,54% mensual.

Respuesta: $205.512

13. La compañía Alfa se propone comprar una máquina de construcción. El ingreso anual realizable es de $15.000 en los primeros cuatro años, $20.000 del quinto año en adelante. Si la compañía piensa vender el equipo a los nueve años por el mismo valor de compra y calcula que su mantenimiento anual es de $1.800, calcule el valor presente de ésta inversión si la tasa de interés es del 13,17% anual M.V.

Respuesta: $-126.342, asumiendo que la máquina costó $100.000

FONDO DE CAPITALIZACIÓN (Cuotas capitalizables)

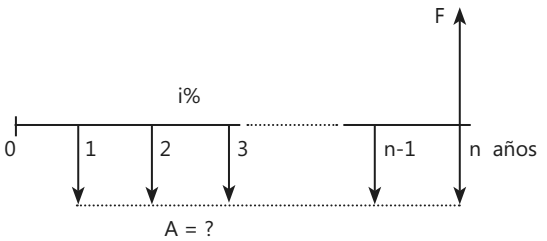
En la sección anterior calculamos las cuotas periódicas para cancelar una deuda o un préstamo (cuotas de amortización). Ahora queremos calcular las cuotas periódicas (anuales, mensuales, etcétera) de ahorros para reunir en un determinado tiempo un capital compuesto con los depósitos y los intereses acumulados. Esta operación financiera se conoce como *Capitalización*, que en otras palabras, consiste en cal-

cular el valor de los depósitos mensuales, anuales, etcétera de una serie uniforme para lograr acumular una cantidad futura, previamente prevista.

Capitalizar: reunir un capital mediante una serie de pagos periódicos y acumulación de los intereses.

Problema tipo o modelo:

Dentro de *n* años se necesitan $*F* para una inversión. Para lograrlo ahorraré durante *n* años una misma cantidad de pesos $A. A una tasa financiera de *i*% anual, ¿cuál será el valor de las cuotas del ahorro?



Fórmula:

$$A = F\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Presentación con factor:

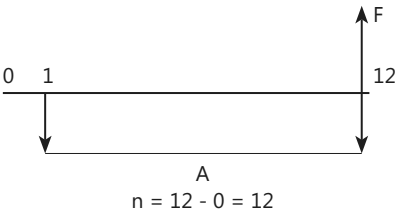
$A = F\ (A/F, i\%, n) = A = (F/A)^{-1}$

Cálculo del valor de n que se utilizará en la fórmula:

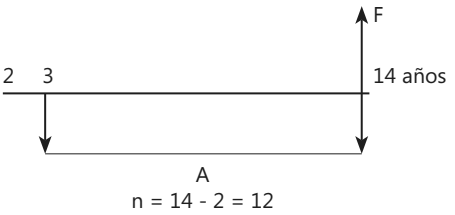
Nota: Observe que el primer depósito se hace en el período uno y el último se hace en el período donde está ubicado el valor futuro.

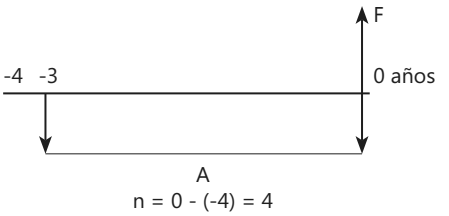
Procedimiento: n = Valor del período donde esta F (o donde termina la serie) menos el valor del período donde quedaría el valor presente P (recuerde que en P queda un período antes del primer pago de la serie).

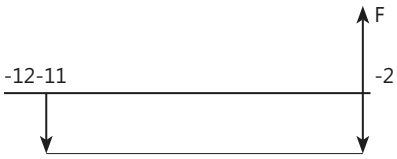
Veamos los siguientes ejemplos:



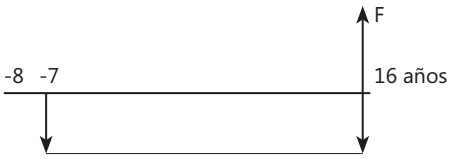
n = periodo donde termina la serie, menos periodo donde quedaría el presente de la serie.
(P), recuerde que es un periodo antes de la primera cuota.
El futuro de una serie queda en el periodo donde termina la serie.







n = -2 -(-12) = 10



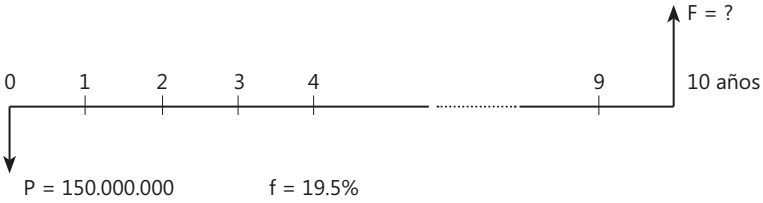
n = 16 - (-8) = 24

Problema 13

La empresa Alfa tiene prevista una ampliación para dentro de 10 años que costará $150.000.000 a precio de hoy. Si la tasa de inflación la estimamos en un 19,5% anual E (en promedio), ¿cuánto costará la ampliación en aquella época? (en pesos de ese entonces).

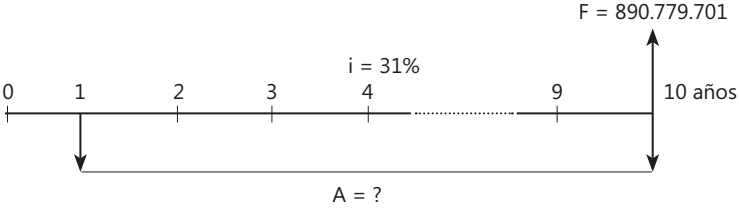
Si la empresa para garantizar el recurso económico necesario para la ampliación opta por hacer 10 depósitos anuales e iguales, empezando dentro de un año, ¿cuál debe ser el valor de estos depósitos si en el mercado puede negociar una tasa hasta del 31% anual E?

Primera parte: Valor futuro de la ampliación. Tendrá un valor mayor por efecto de la inflación.



F = 150.000.000 (F/P, 19,5%, 10) = $ 890.779.701 valor futuro de la ampliación

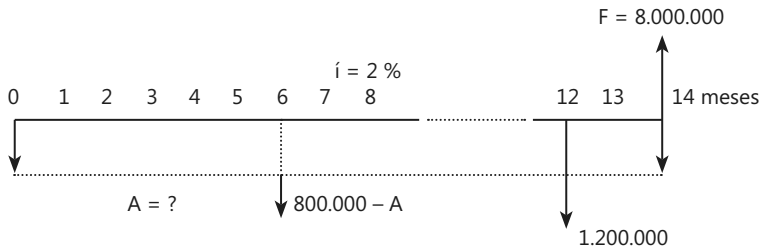
Segunda parte: Cálculo de los depósitos anuales para reunir el dinero necesario.



A = 890.779.701 (A/F, 31%, 10) = $19.889.533 Valor de los depósitos anuales.

Problema 14

Usted planea realizar una excursión dentro de 14 meses que se supone que le costará $8.000.000. Considera que sus dos primas laborales dentro de 6 meses y dentro de doce meses las podrá ahorrar. Estas primas tendrán valores de $800.000 y $1.200.000, respectivamente, pero la prima dentro de seis meses incluye el ahorro mensual, mientras que la dentro de 12 meses será adicional al ahorro ordinario. Además piensa ahorrar mensualmente una misma cantidad de dinero, empezando hoy, en una cuenta bancaria que paga el 2% mensual, ¿cuál es el valor de los ahorros mensuales necesarios para lograr el objetivo?



Para establecer la ecuación de Ingresos = Egresos, debemos trasladar todos los flujos de caja a un mismo período. Vamos a seleccionar el período 14.

$$8.000.000 = A(F/A;\ 2\%;\ 15) + (800.000 - A)\ (F/P;\ 2\%;\ 8) + 1.200.000\ (F/P;\ 2\%\ 2)$$

$$17{,}29342 \qquad 1{,}17166 \qquad 1{,}0404$$

$$A = \$360.642{,}50$$

CUADRO DE CAPITALIZACIÓN				
	Cuota	**Interés**	**Acumulado**	**Explicaciones**
0	360.643	0	360.643	
1	360.643	7.213	728.498	Acumulado = 360,643 + 360,643 + 7,213
2	360.643	14.570	1.103.710	
3	360.643	22.074	1.486.427	Interés = 1,103,710 x 0,02 = 22,074
4	360.643	29.729	1.876.798	
5	360.643	37.536	2.274.977	
6	800.000	45.500	3.120.476	Acumulado = 800,000 + 45,500 + 2,274,977
7	360.643	62.410	3.543.528	
8	360.643	70.871	3.975.041	
9	360.643	79.501	4.415184	Interés = 3,975,041 x 0,02 = 79,501
10	360.643	88.304	4.864.131	
11	360.643	97.283	5.322.056	
12	1.560.643	106.441	6.989.139	Acumulado = 1,560,643 + 106,441 + 5,322,056
13	360.643	139.783	7.489.565	
14	360.643	149.791	7.999.998	

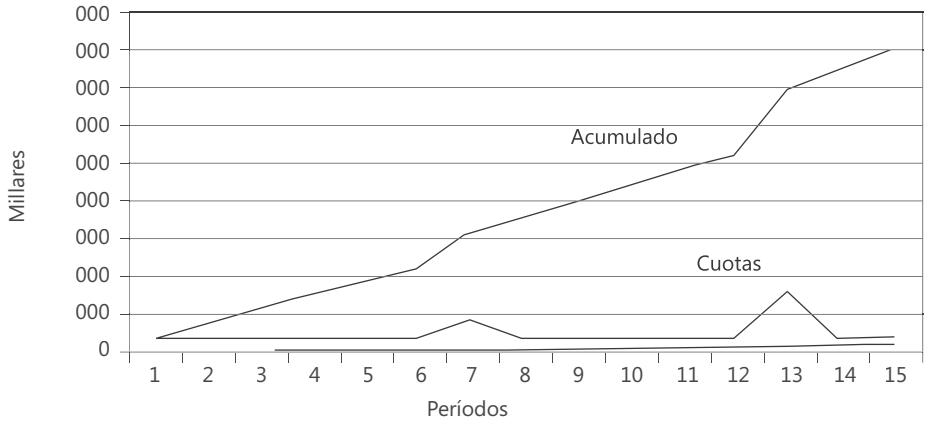


Gráfico Capital acumulado, ahorros mensuales, interés mensual.

CANTIDAD FUTURA COMPUESTA SERIE UNIFORME

Cantidad acumulada (capital más intereses) con una serie de depósitos iguales

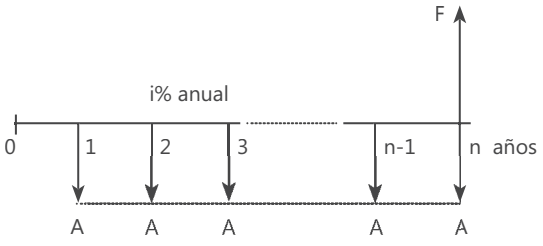
Se quiere conocer la cantidad de dinero que se podrá acumular realizando *n* depósitos iguales en periodos anuales, semestrales, mensuales, etcétera, y a una tasa financiera del *i*% efectiva. Previamente se conoce la capacidad de ahorro de $*A* por período.

Dada una serie uniforme de depósitos por período (A), calcular el valor futuro (F).

Problema tipo o modelo:

Se ha decidido hacer n ahorros anuales e iguales de $ A para capitalizarlos o acumular cierta cantidad de dinero que se utilizará en el futuro. Si la tasa financiera que se paga en la cuenta es de i % anual, ¿cuánto dinero se acumulará?

Despejando de la fórmula $A = F \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$ el valor de F, tenemos:



Fórmula:

$$F = A\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

Presentación con factor:

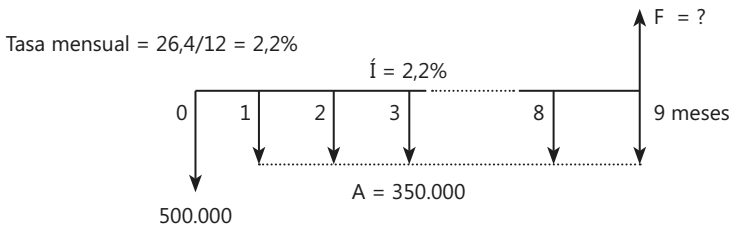
$F = A\ (F/A, i\%, n) = F = (A/F)^{-1}$

Para el cálculo de n que se utiliza en la fórmula, se procede de igual manera al explicado en la sección anterior.

Procedimiento: n = Valor del período donde esta F (o donde termina la serie) menos el valor del período donde quedaría P (recuerde que P queda un período antes del primer pago de la serie).

Problema 15

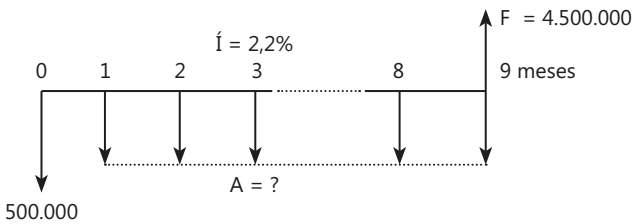
Dentro de nueve meses tengo una obligación hipotecaria por un valor de $4.500.000. Para cancelar este valor he decidido abrir una cuenta bancaria que paga el 26,4% anual M.V. La apertura de esta cuenta la haré con $500.000, y cada mes posterior, y hasta el final del noveno mes, haré depósitos iguales de $350.000. ¿Lograré reunir el dinero necesario?



F = 500.000 (F/P, 2,2%, 9) + 350.000 (F/A, 2,2%, 9) = $4.050.084
1,21635 9,83403

No alcanza a capitalizar el dinero necesario. Faltante: 4.500.000 – 4.050.064 = $449.916

Si se desea tener exactamente el dinero necesario, ¿en cuánto debe aumentar el ahorro mensual?



4.500.000 = 500.000 (F/P, 2,2%, 9) + A (F/A, 2,2%, 9) → A = $395.751
1,21635 9,83403

Debe aumentar sus ahorros en $395.751 – 350.000 = $45.751 mensuales.

Problema 16

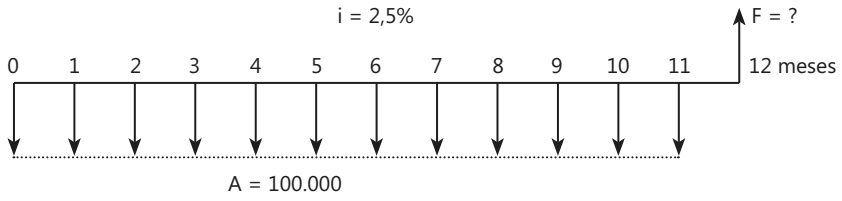
Las cédulas de capitalización ofrecen planes diferentes. Se trata de pagar una mensualidad, por ejemplo, de $100.000 durante un tiempo, ejemplo 12 meses. Al final del año usted puede retirar su dinero que será de $1.200.000. Igualmente, usted participará entre cierto número de inversionistas en sorteos mensuales que en caso de resultar favorecido, ganará el valor de la cédula ($1.200.000).

Además podrá solicitar crédito por un valor que depende del valor que lleve capitalizado (por ejemplo, 2, 3… n veces el valor acumulado).

También participará en rifas mensuales por un valor, por ejemplo, de 10 veces sus ahorros acumulados u otro plan que tenga diseñado la capitalizadora. Si su TMAR (tasa mínima atractiva de retorno) es del 2,5% mensual, desde el punto de vista económico ¿es atractivo el plan de capitalización? ¿En qué condiciones podría ser atractivo? Explique.

Valor futuro de sus ahorros:

a) Con el plan de capitalización = 12 x 100.000 = 1.200.000 (no paga interés sobre los depósitos).
b) Si en vez de comprar el plan de capitalización, ahorrara los $100.000 mensuales en una cuenta de ahorros que pague su TMAR, es decir, el 2,5% mensual, al cabo de los doce meses tendría acumulado (observe que la cuenta la abre hoy con $100.000 y el último depósito lo hace al final del mes once y el retiro total del dinero lo hace al final del mes doce):



F = 100.000 (F/A, 2,5%, 12) (F/P, 2,5%, 1) = $1.414.044

Observe que el futuro de la serie que empieza en cero y termina en el período 11 queda en ese mismo periodo; por lo tanto, hay que trasladarlo como un futuro al período 12.

El plan de capitalización le garantiza que a los doce meses le devuelve $1.200.000; por lo tanto, con el plan de ahorros como alternativa tendría un valor adicional de $214.044

Bajo estas condiciones no es atractivo el plan de capitalización, pero si tenemos en cuenta las otras ventajas que ofrece la capitalizadora, podríamos hacer varios análisis que cambien la decisión.

Por ejemplo, si le ofrecen participar en la rifa de 10 veces el ahorro acumulado y si el sorteo se hace entre 1.000 suscriptores del plan de capitalización, sus posibilidades y costos, según su exigencia de rentabilidad, sería, de acuerdo con el manejo financiero de sus cuotas, de la siguiente manera:

Periodo	Ahorro	Interés	Acumulado
0	100.000	0	100.000
1	100.000	2.500	202.500
2	100.000	5.063	307.563
3	100.000	7.689	415.252
4	100.000	10.381	525.633
5	100.000	13.141	638.774
6	100.000	15.969	754.743
7	100.000	18.869	873.612
8	100.000	21.840	995.452
9	100.000	24.886	1.120.338
10	100.000	28.008	1.248.347
11	100.000	31.209	1.379.555
12	0	34.489	1.414.044

Quiere decir que en el primer mes usted "compraría" una boleta de $2.500 (que es la rentabilidad que usted ganaría en una cuenta de ahorros, pero que no recibe en el plan, en cambio la capitalizadora si la obtiene) para participar en la rifa de $ 1.000.000; en el segundo mes le valdría $ 5.062,50 para participar en la rifa de $ 2.000.000, y así sucesivamente. Si asociamos la inversión a la probabilidad de ganar, tendríamos el siguiente análisis:

Premio esperado: $1.000.000 en el primer mes.

Si asumimos que la rifa se hace entre 1.000 socios del plan tendríamos:

Probabilidad de ganar: P(g) = 1/1.000

Valor esperado (esperanza matemática): E = P(g) x Premio

E = 1/1.000 x 1.000.000 = $1.000 La esperanza significa el precio justo de la apuesta (valor de la boleta).

Quiere decir que en la primera rifa el precio justo de la boleta es de $1.000, pero usted la compra en $2.500, que es el interés que gana la capitalizadora (ver cuadro anterior).

En el segundo mes: E = 1/1.000 x 2.000.000 = 2.000, pero usted compró en $5.063.

En el tercer mes compró en $7.689.

Nota: Continúe el ejercicio y saque conclusiones.

Pregunta adicional: se supone que en el primer mes, la compañía debe pagar un premio de $1.000.000 porque alguien del grupo se los gana. ¿Cuál debe ser la tasa de inversión de la capitalizadora para que este programa sea rentable?

Solución: El primer mes la compañía recauda: 100.000 x 1.000 = 100.000.000
Para no tener pérdidas los $ 100.000.000 deben producir en un mes $1.000.000

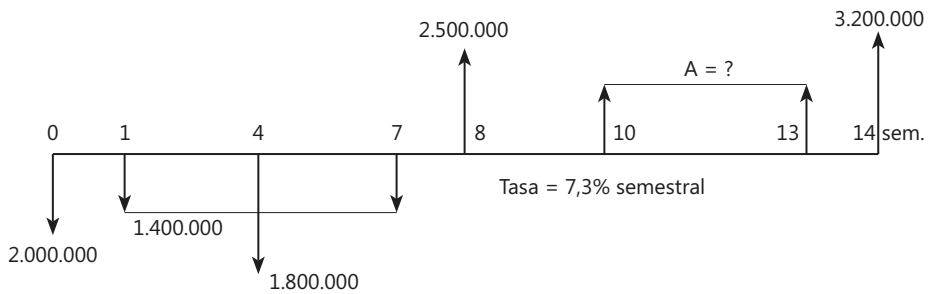
i = 1.000.000 /100.000.000 = 0,01 i = 1% mensual

Luego la compañía debe invertir sus recaudos a una tasa mayor al 1% mensual.
Nota: Tanto la *amortización* como la *capitalización* se pueden hacer con series no uniformes, tales como crecientes, decrecientes o irregulares. Estos temas serán estudiados en los capítulos correspondientes a los gradientes.

Problema 17

Un padre de familia quiere garantizar la educación de su hijo en un posgrado que realizará una vez termine su pregrado y que terminará dentro de cuatro años. Con este fin, hoy abre una cuenta con $2.000.000. La cuenta le reconocerá el 14,6% anual C.S. Hará siete depósitos semestrales de $1.400.000, que empieza dentro de un semestre. Además, hará un depósito extra de $1.800.000 dentro de dos años. Al final del pregrado, el hijo necesitará $2.500.000 para sus gastos personales. Un año después de su grado iniciará la especialización que tendrá una duración de dos años. Las matrículas las pagará semestralmente. Estas matrículas tendrán el mismo valor. Un semestre después de su última matrícula hará un retiro final de $3.200.000 (la cuenta quedará en cero) para financiar su excursión de grado. ¿Cuál será el valor de las matrículas del posgrado? Haga un cuadro de pagos.

Tasa semestral = 14,6/2 = 7,3% semestral



Ingresos = Egresos I = E Vamos a llevar todos los flujos al período cero

2,500,000 (P/F,7,3%,8) + A(P/A,7,3%,4)(P/F,7,3%,9) + 3,200,000(P/F,7,3%,14) = 2,000,000 + 1,400,000(P/A,7,3%7) + 1,800,000(P/F,7.3%,4)

0,56912 3,3644 0,5304 0,37291 5,33338 0,7544

A = $4.599.968

Comprobemos este resultado en un cuadro de pagos (se elaboró en Excel).

n	Depósitos	Retiros	Interés	Acumulado
0	2.000.000			2.000.000
1	1.400.000		146.000	3.546.000
2	1.400.000		258.858	5.204.858
3	1.400.000		379.955	6.984.813
4	3.200.000		509.891	10.694.704
5	1.400.000		780.713	12.875.417
6	1.400.000		939.905	15.215.323
7	1.400.000		1.110.719	17.726.041
8		2.500.000	1.294.001	16.520.042
9			1.205.963	17.726.005
10		4.599.982	1.293.998	14.420.022
11		4.599.982	1.052.662	10.872.701
12		4.599.982	793.707	7.066.426
13		4.599.982	515.849	2.982.293
14		3.200.000	217.707	0

Vea los problemas resueltos en Excel en el complemento virtual al libro.

PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN SERIES UNIFORMES Y PAGOS ÚNICOS EN PERÍODOS DIFERENTES

Cuando en un mismo problema existen varios períodos de pagos diferentes, por ejemplo meses, trimestres, semestres, años, etcétera es necesario buscar las equivalencias de la tasa financiera para cada período de pago, de la siguiente manera: si la tasa es anual efectiva o anual nominal y el período de pago es trimestral, debemos convertir la tasa anual a su equivalente trimestral efectiva.

Además, para facilitar la diagramación de los flujos de caja y la posterior formulación de la ecuación respectiva, se debe hacer un diagrama de caja por cada tipo de período de pago, agrupando en cada uno los flujos coincidentes en el período de pago.

Veamos los siguientes ejemplos:

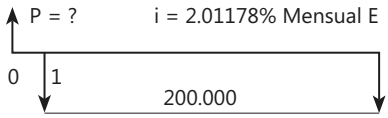
1. Un préstamo de *P* pesos lo debe pagar así: desde el primer mes y durante 36 meses debe pagar cuotas iguales de $200.000; cuatro cuotas iguales y trimestrales, que se empiezan en el sexto trimestre, de $500.000 cada una y cinco cuotas semestrales, que se empiezan en el segundo semestre por un valor de $600.000 cada una. Si la tasa financiera es del 27% anual efectiva, ¿cuál es el valor del préstamo?

   Los períodos de pagos son: meses, trimestres y semestres. Debemos calcular las tasas financieras para cada uno de estos períodos.

Conversión de las tasas:

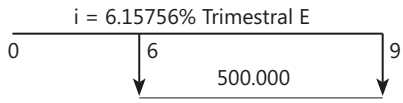
$$I = 27\% \text{ anual E.} \longrightarrow \begin{cases} 2.01178\% \text{ Mensual E} \\ 6.15756\% \text{ Trimestral E} \\ 12.69428\% \text{ Semestral E} \end{cases}$$

Períodos mensuales



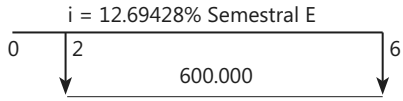
P_m = 200.000(P/A; 2.01178%; 36)
P_m = \$5.088.138

Períodos trimestrales



P_t = 500.000(P/A; 6.1575%; 4)(P/F; 6.1575%,5)
P_t = \$1.280.462

Períodos semestrales:



P_s = 600.000(P/A;12.6942%;5)
(P/F;12.6942%%,1)
P_s = \$1.886.676

VP total hoy: \$8.255.276

Si lo prefiere puede escribir los factores anteriores en una sola ecuación:

P = 200.000(P/A; 2.01178%; 36) + 500.000(P/A; 6.15756%; 4)(P/F;6.15756%,5) +
600.000(P/A;12.69428%;5)(P/F;12.69428%%,1)

VP total hoy: \$8.255.276

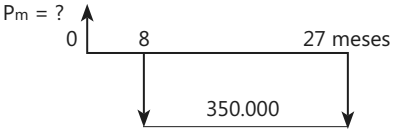
---

2. Al negociar un vehículo quedé debiendo cierta cantidad de dinero, el cual pagaré así: siete cuotas semestrales iguales, que comenzaré en el primer semestre y con un valor de \$1.000.000 cada una; veinte cuotas mensuales de \$350.000, cada una, comienzo en el octavo mes, y nueve cuotas iguales y trimestrales, que empiezo a pagar en el quinto trimestre con un valor de \$320.000, cada una. Si la tasa financiera fue del 26,8% anual efectiva, ¿cuál fue el valor del crédito?

   De nuevo los períodos de pagos son: meses, trimestres y semestres. Debemos calcular las tasas financieras para cada uno de estos períodos.

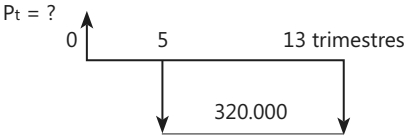
$$I = 26.8\% \text{ anual E.} \longrightarrow \begin{cases} 1.99838\% \text{ Mensual E} \\ 6.11574\% \text{ Trimestral E} \\ 12.60551\% \text{ Semestral E} \end{cases}$$

Meses I = 1,99838% mensual



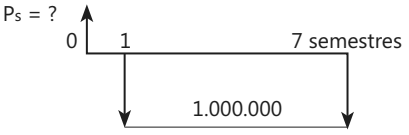
P_m = 350.000(P/A,1,998%,20)(P/F,1,998%,7)
P_m = $4.983.550

Trimestres I = 6,11574 trimestral E



P_t = 320.000(P/A,6.1157%,9)(P/F,6.1157%%,4)
P_t = $1.707.902

Semestres I = 12,60551% semestral E



P_s = 1.000.000(P/A,12,60551%,7)
P_s = $ 4.477.450

VP total hoy= $ 11.168.902

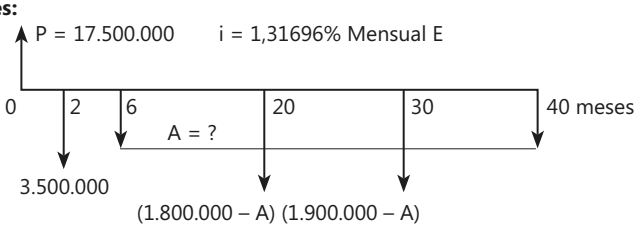
Si lo prefiere puede escribir los factores anteriores en una sola ecuación:

VP = 350.000(P/A, 1,998%, 20)(P/F, 1,998%, 7) + 320.000(P/A, 6,1157%, 9)(P/F, 6,1157%, 4) + 1.000.000(P/A, 12,60551%, 7) = $11.168.902

3. Un carro de segunda cuesta $17.500.000. Se compra a crédito de 40 meses. La forma de pago es así: dentro de dos meses se pagará $ 3.500.000; cada semestre se pagará $450.000; a partir del quinto mes se pagarán cuotas mensuales iguales hasta el final del plazo; en los meses 20 y 30 se pagarán cuotas totales (incluidas las ordinarias mensuales) de $1.800.000 y $1.900.000, respectivamente. La tasa financiera es del 17% anual efectiva. ¿Cuál es el valor de las cuotas mensuales?

Respuesta: $364.977

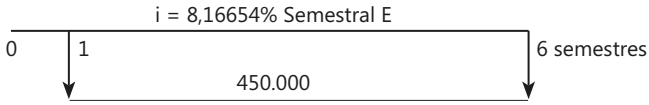
Períodos mensuales:



Conversión de la tasa:

i = 17% anual E { 1,31696% Mensual E; 8,16654% Semestral }

Períodos semestrales:



Vamos a escribir los factores en una sola ecuación:

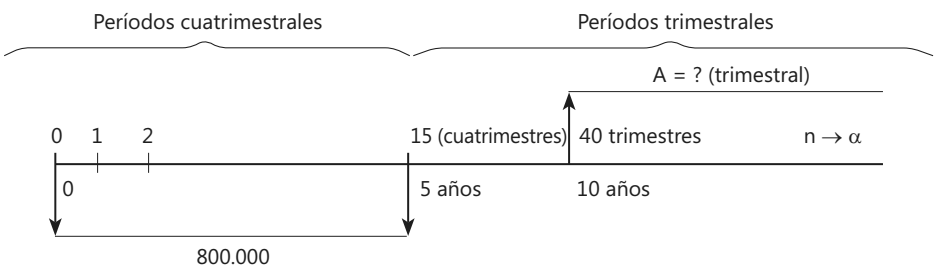
$$17.500.000 = \underbrace{3.500.000(P/F;\ 1{,}31696\%;\ 2)}_{3.409.602} + A\underbrace{(P/A;\ 1{,}31696\%;\ 36)(P/F;1{,}31696\%,4)}_{27{,}06812\ A} +$$

$$\underbrace{(1.800.000 - A)(P/F;\ 1{,}31696\%;\ 20)}_{1.385.622 - 0{,}76979\ A} + \underbrace{(1.900.000 - A)(P/F,\ 1{,}31696\%;\ 30)}_{1.283.184 - 0{,}67536\ A} + \underbrace{50.000(P/A;\ 8{,}16654\%;\ 6)}_{2.069.827}$$

Al resolver la ecuación encontramos el valor de A = $364.977 cuota mensual.

4. Durante cinco años, empezando hoy, usted deposita, cada cuatro meses, la cantidad de $800.000. Al final del décimo año usted empezará a retirar trimestralmente y de por vida una misma cantidad. Si la tasa pactada es del 27% anual efectiva, ¿de qué valor serán los retiros?

   En la solución del ejercicio vamos a utilizar un solo diagrama con diferentes períodos de pago, con el fin de ilustrar las dificultades que se pueden presentan al no hacer dos diagramas independientes que identifiquen en cada caso el período de pago correspondiente.



i_e = 27% anual E

Para los depósitos

Para los depósitos: $i_{(cuatrimestral)}$ = 8,29321% cuatrimestral E.

Para los retiros: $i_{(trimestral)}$ = 6,15756% trimestral E.

En el período cero (0): Ingresos = Egresos

$$800.000 + \underbrace{800.000\ (P/A,\ 8{,}29321\%,\ 15)}_{(8{,}40834)} = \frac{A}{0.0615756}\underbrace{(P/F,\ 6{,}15756\%,\ 39)}_{(0.09726)}$$

A = 4.765.159

Problemas propuestos

1. Un estudiante que se acaba de graduar en la universidad ha planeado iniciar un fondo de pensiones. Es su deseo retirar dinero cada año la misma cantidad durante 15 años, empezando dentro de 25 años. El fondo de pensiones gana un interés del 7% anual M.V, Si abre hoy la cuenta con $200.000 y deposita $150.000 anuales durante 16 años, empezando dentro de tres años, ¿qué cantidad anual uniforme podrá retirar cuando se pensione dentro de 25 años?

Respuesta: $840.911

2. Durante seis años, empezando hoy, usted deposita semestralmente la cantidad de $600.000. Al final del décimo año usted empezará a retirar trimestralmente y de por vida la misma cantidad. Si la tasa pactada es del 27% anual afectiva, ¿de qué valor serán los retiros?

Respuesta: $2.659.201

3. Un supermercado está planeando abrir una nueva sección de pastelería. Por medio de una investigación de mercados, predice que si compra equipos y vitrinas, por un valor de 23.000 dólares, podrá obtener ingresos brutos anuales de 52.000 dólares y gastos anuales de 11.000 dólares por concepto de mantenimiento y energía. Los empleados de la sección tendrán un salario mensual de 3.500 dólares. Considera que los equipos tendrán una vida útil de ocho años, con el 10% de recuperación. Si se supone que, los ingresos y los egresos serán uniformes durante ese periodo, a una tasa del 18% anual E, ¿cuál es el valor presente de esta inversión?, ¿es rentable?

Respuesta: $-40.172. No es rentable.

4. Usted hace cinco depósitos semestrales de $ 100.000, cada uno, y empieza hoy. Tres meses después del último depósito inicia 12 retiros mensuales iguales. Si la tasa lograda es del 27% anual efectiva, ¿qué valor tendrán los retiros?

Respuesta: $63.428

5. Un señor ahorró, al nacer su hija y en cada uno de sus sucesivos cumpleaños, $150.000 en una cuenta que paga el 25% anual efectivo. Cuando su hija cumplió 12 años aumentó sus consignaciones a $200.000 anuales hasta que cumplió 18 años. Tres meses más tarde su hija podrá empezar a retirar mensualmente y durante 60 meses cantidades iguales para su sostenimiento en la universidad. ¿De qué valor serán estos retiros?

Respuesta: $1.210.778

6. Pedro compra un vehículo en la Agencia MOTOR LTDA. por un valor de $9.000.000. Las condiciones del crédito fueron: cuota inicial del 40%; saldo a cinco meses en cuotas iguales, pero en el cuarto mes dará una cuota extraordinaria $3.500.000. En esta cuota extraordinaria está incluida la ordinaria mensual. La tasa del interés es del 38,5 % anual efectiva.

Elabore un cuadro de pagos para todo el crédito que contenga: número de cuota, valor, interés, amortización y saldo.

n	Saldo	Interés	Cuota	Extra	Amortización
0	5.400.000				
1	4.940.252	148.572	608.320		459.748
2	4.467.855	135.923	608.320		472.397
3	3.982.461	122.926	608.320		485.394
4	592.032	109.571	608.320	2.891.680	3.390.429
5		16.289	608.320		592.031

7. Un equipo se puede adquirir a crédito a 2 años con las siguientes condiciones: valor total: $8.000.000; cuota inicial: $260.000; saldo de $7.740.000. Se pagaría así: cada año, a finales de junio y diciembre, se pagarán cuotas de $500.000 cada una. Al final de cada mes distinto a junio y diciembre se pagará una cuota uniforme. La tasa de interés es del 25% anual efectiva. Determine el valor de las cuotas mensuales y elabore un cuadro de pagos. Formule la ecuación y obtenga el resultado.

n	Saldo	Interés	Cuota	Extra	Amortización
0	7.740.000				
1	7.499.974	145.274	**385.300**		240.026
2	7.255.443	140.769	385.300		244.531
3	7.006.322	136.180	385.300		249.121
4	6.752.526	131.504	385.300		253.797
5	6.493.966	126.740	385.300		258.560
6	6.115.853	121.887		500.000	378.113
7	5.845.343	114.790	385.300		270.510
8	5.569.756	109.713	385.300		275.587
9	5.288.996	104.540	385.300		280.760
10	5.002.966	99.271	385.300		286.030
11	4.711.568	93.902	385.300		291.368
12	4.300.001	88.433		500.000	411.567
13	3.995.408	80.708	385.300		304.592
14	3.685.099	74.991	385.300		310.309
15	3.368.966	69.167	385.300		316.134
16	3.046.898	63.233	385.300		322.067
17	2.718.786	57.188	385.300		328.112
18	2.269.816	51.030		500.000	448.970
19	1.927.119	42.603	385.300		342.697
20	1.577.989	36.171	385.300		349.130
21	1.222.306	29.618	385.300		355.683
22	859.948	22.942	385.300		362.358
23	490.788	16.141	385.300		369.160
24	0	9.212		500.000	490.788

8. La empresa metalmecánica El Torno negocia una dobladora por un valor de $12.000.000. Las condiciones del crédito fueron: cuota inicial del 30%; el saldo se financia a seis meses en cuotas iguales, pero en el tercer mes debe entregar una cuota extraordinaria (incluye la ordinaria) de $4.000.000. Si la tasa negociada es del 22% anual efectiva, ¿cuál será el valor de las cuotas?

   Haga un cuadro completo de pagos que incluya el valor de las cuotas, los intereses, las amortizaciones y los saldos.

n (meses)	Saldo	Interés	Cuotas	Amortización
0	8.400.000			
1	7.565.540	140.355	974.816	834.460
2	6.717.136	126.412	974.816	848.403
3	2.829.373	112.236	4.000.000	3.887.764
4	1.901.833	47.276	974.816	927.540
5	958.795	31.778	974.816	943.038
6	– 0	16.020	974.816	958.795

9. El Banco Cafetero tiene un plan de crédito al 28% anual, trimestre anticipado. Usted solicita un crédito de $5.000.000, pero solicita que la modalidad sea de pagos semestrales en cuotas iguales vencidas. Si el crédito se hace a dos años, haga un cuadro que contenga las cuotas, los intereses, las amortizaciones y los saldos.

n (meses)	Saldo	Interés	Pago	Amortización
0	5.000.000			
1	4.007.666	781.015	**1.773.349**	992.334
2	2.860.327	626.009	1.773.349	1.147.339
3	1.533.769	446.792	1.773.349	1.326.557
4	0	239.579	1.773.349	1.533.769

10. Usted puede comprar electrodomésticos por valor de $4.500.000. Le exigen el 30% de cuota inicial y el saldo lo financia a 18 meses. Las cuotas 7 y 12 deben tener un valor de $400.000 y $300.000, respectivamente, y el resto de las cuotas iguales.

    Si la tasa de interés que tiene el almacén es del 26,8 % anual C.M., ¿qué valor tendrán las cuotas mensuales diferentes a la 7 y a la 12?

n meses	Saldo	Interés	Pago	Extra	Amortización
0	3.150.000		1.350.000		
1	3.023.095	70.350	**197.255**		126.905
2	2.893.355	67.516	197.255		129.740
3	2.760.718	64.618	197.255		132.637
4	2.625.119	61.656	197.255		135.599
5	2.486.491	58.628	197.255		138.628
6	2.344.768	55.532	197.255		141.724
7	1.997.134	52.360		400.000	347.634
8	1.844.481	44.603	197.255		152.653
9	1.688.419	41.193	197.255		156.062
10	1.528.872	37.708	197.255		159.547
11	1.365.762	34.145	197.255		163.110
12	1.096.264	30.502		300.000	269.498
13	923.492	24.483	197.255		172.772
14	746.861	20.625	197.255		176.631
15	566.286	16.680	197.255		180.575
16	381.677	12.647	197.255		184.608
17	192.946	8.524	197.255		188.731
18	0	4.309	197.255		192.946

11. Juan tiene un sueldo mensual de $102.400. Tiene necesidad de comprar los siguientes artículos: nevera a $140.000 de contado; estufa a $ 80.000 de contado; equipo de sonido a $250.000 de contado.

    Juan va a decidir si compra todos o algunos de los artículos a crédito, pero comprometiendo como máximo el 30% de su sueldo para pagar las cuotas mensuales.

    La nevera se la financian a 12 meses, para pagos en cuotas mensuales iguales a una tasa de interés del 25% anual C.M.

    La estufa se la financian a seis meses, para pagos en cuotas mensuales al mismo interés.

    El equipo de sonido se lo financian a 18 meses, para pagos en cuotas mensuales a un interés del 27% anual C.M. ¿Cuál debe ser la decisión de Juan?

Respuestas: cuotas de la nevera $13.306; cuotas de la estufa $14.322; cuotas del equipo de sonido $17.044. Capacidad de pago $30.720. Sólo puede comprar la nevera y la estufa o la nevera y el equipo.

12. La Distribuidora Nisán está promocionando sus nuevos vehículos. Usted se interesó en el modelo Sentra mecánico, que tiene un costo de $15.000.000 incluido, el IVA.

    El vendedor le informa que lo entregarían con el 30% de cuota inicial y el resto lo financian a seis meses en cuotas mensuales.

La tasa de interés será del 26,9% anual E. Además, en la tercera cuota debe pagar $ 4.000.000, pero las demás deben ser iguales.

¿Cuál es el valor de las cuotas mensuales?

Discrimine cada una de las cuotas así: valor, interés, amortización y saldo.

Meses	Saldo	Interés	Pago	Amortización
0	10.500.000			
1	9.265.524	210.533	1.445.010	
2	8.006.295	185.781	1.445.010	
3	4.166.827	160.533	1.445.010	2.554.990
4	2.805.366	83.548	1.445.010	
5	1.416.606	56.250	1.445.010	
6	– 0	28.404	1.445.010	

13. Se quiere hacer 60 depósitos mensuales de $10.000 cada uno, empezando dentro de un mes. Este dinero será retirado anualmente en cantidades iguales, y empieza a retirarse dentro de ocho años y en forma indefinida. Tanto para los depósitos como para los retiros la capitalización será mensual y la tasa de interés será del 33% anual nominal. ¿Cuál será el valor de los retiros?

Respuesta: $1.098.054

14. Una persona adquiere un préstamo hoy de cierta cantidad y se compromete a pagarlo así: desde el cuarto mes y durante 20 meses debe pagar cuotas iguales de $287.000; cinco cuotas iguales y trimestrales, que empieza a pagar en el quinto trimestre, de $456.000 cada una; y ocho cuotas semestrales de $500.000 cada una, que empieza a pagar el primer semestre.

    Si la tasa financiera es del 19,7% anual efectiva, ¿cuál es el valor del préstamo?

Respuesta: $9.100.061

15. Usted abre hoy una cuenta de ahorros con $450.000. Hará seis depósitos semestrales de $230.000 cada uno, y empieza dentro de seis meses. Dos meses después del último depósito inicia ocho retiros mensuales iguales. Si la tasa lograda es del 23,5% anual efectiva, ¿qué valor tendrán los retiros?

Respuesta: $367.848

16. El Banco BBWA ofrece créditos al 19,36615% anual, trimestre anticipado. Usted solicita un crédito de $9.500.000, pero solicita que la modalidad sea de pagos semestrales en cuotas iguales y vencidas.

    Además, al final del primer año, adicionalmente pagará una cuota extra de $2.000.000.

    Si el crédito se hace a tres años, haga un cuadro que contenga las cuotas, intereses, amortizaciones y saldos.

Respuesta:

n	Saldo	Interés	Cuota	Amortización
0	9.500.000			
1	8.663.507	991.287	1.827.780	836.493
2	5.739.728	904.002	3.827.780	2.923.778
3	4.510.866	598.918	1.827.780	1.228.863
4	3.153.776	470.691	1.827.780	1.357.090
5	1.655.080	329.084	1.827.780	1.498.697
6	0	172.701	1.827.780	1.655.080

17. Un padre de familia planeó un curso intensivo de su hijo en el exterior. Hace un año abrió una cuenta con $2.500.000. Cada tres meses, empezando tres meses después de abrir la cuenta y hasta hoy, ha venido haciendo depósitos así: el primero de cierta cantidad, el segundo fue el doble, el tercero el triple y el cuarto el cuádruplo del primero.

    El dinero acumulado lo utilizará el hijo dentro de seis meses, y hará cinco retiros mensuales iguales de $4.500.000 cada uno. Un mes después hará el último retiro para viajar por un valor de $3.000.000 y la cuenta quedará en cero. Si la tasa financiera es del 2.60% mensual, ¿cuál fue el valor de los depósitos?

Respuestas: $1.587.336; $3.174.671; $4.762.007; $6.349.343

18. La fábrica El Turrón pretende crear una nueva sección para lo cual proyecta el siguiente flujo: equipos por $75.000 dólares. Los ingresos operacionales se contabilizarán semestralmente y se iniciarán dentro de tres semestres y tendrán un valor de $68.000 dólares.

    Gastos de mano de obra: $1.200 dólares mensuales hasta el final de la vida útil que es de 7 años. A partir del quinto trimestre tendrá ingresos trimestrales no operacionales por valor de $2.500 dólares.

    A una tasa financiera del 17% anual efectiva, ¿cuál es el valor presente de esta inversión?

Respuesta: Tasa anual E = 17%, Semestral E = 8,16653%, Trimestral E = 4,00314 %. Mensual E = 1,31696%, V.P = $331.050.

19. Un aparta-estudio tiene un costo de $37.000.000. Se compra a crédito a un plazo total de 48 meses. La forma de pago es así: a partir del cuarto mes se pagarán cuotas mensuales iguales hasta el final del plazo; dentro de seis meses se pagará $8.500.000 adicionales; cada semestre se pagará $300.000 adicional a las cuotas mensuales; en los trimestres 5 y 9 se pagarán $11.000.000 y $5.000.000, respectivamente; en estos dos valores están incluidas las cuotas mensuales. La tasa financiera es del 14% anual T.A. ¿Cuál es el valor de las cuotas mensuales?

Respuesta: $451.448

20. Un carro que cuesta $43.000.000 se compra a crédito a 48 meses. La forma de pago es así: dentro de cuatro meses se pagará $8.500.000; cada semestre se pagará $370.000. Además, a partir del séptimo mes se pagarán cuotas mensuales iguales hasta el final del plazo. En los cuatrimestres 7 y 8 se pagarán, adicionalmente, $10.000.000 y $4.500.000, respectivamente. La tasa financiera es del 13,8% anual M.A. ¿cuál es el valor de las cuotas mensuales?

Respuesta: $724.268

21. Hace un mes se abrió una cuenta de ahorros con $500.000. Se harán 10 depósitos mensuales desde el tercer mes por un valor de $350.000, cada uno. Además, en el octavo mes se depositará, adicionalmente, $1.000.000. El dinero acumulado se retirará por medio de cinco retiros iguales a partir del mes 18. Si la tasa financiera es del 15% anual E, ¿cuál será el valor de los retiros?

Respuesta: $1.167.705

22. Una familia planeó hacer una excursión durante seis meses al exterior. Para poder realizarla, hace ocho meses abrió una cuenta con $3.000.000. Hace tres meses empezó a depositar mensualmente cierta cantidad y continuará hasta dentro de cinco meses. Además, dentro de seis meses depositará $2.500.000.

    El dinero acumulado lo utilizará la familia dentro de ocho meses para el viaje al exterior, para lo cual hará un retiro de $10.000.000 con el fin de pagar los pasajes y cada mes posterior hará seis retiros mensuales de $5.000.000, cada uno, para su sostenimiento. Al final la cuenta quedará en cero pesos. Si la tasa financiera es del 19,60% anual E ¿Cuál debe ser el valor de los depósitos?

Respuesta: $3.210.586

23. Usted desea capitalizar sus ahorros para hacer uso de ellos en el futuro. Hoy abre una cuenta que le pagará el 16,76% anual M.V. La cuenta la abre con cierta cantidad. Sus depósitos mensuales serán así: el primer depósito mensual lo hará en el cuarto mes con $700.000, hará un total de 5 depósitos mensuales; en el segundo y sexto mes depositará, de forma adicional, $1.500.000 y $2.500.000, respectivamente. Del cuarto al séptimo trimestre hará retiros trimestrales de $3.000.000 cada vez. ¿Con cuánto debe abrir la cuenta?
24. Un padre de familia quiere garantizar la estadía de su hijo durante un año en el exterior. Para lograrlo, hace seis meses abrió una cuenta de ahorros con $2.500.000. A partir de hoy hará 6 depósitos mensuales de $800.000 cada vez. La estadía en el exterior la iniciará dentro de 12 meses, para lo cual debe hacer retiros bimestrales de esta cuenta, empezando dentro de 12 meses. La tasa financiera es del 11,80% anual E. ¿Cuál es el valor de los retiros bimestrales?
25. Hace un año abrí una cuenta de ahorros con $3.700.000. Dentro de tres meses iniciaré siete depósitos trimestrales de $350.000 cada vez. El dinero acumulado lo utilizaré dentro de tres años, cuando inicie 11 retiros iguales y mensuales. La tasa financiera es del 11,7% anual E. ¿Cuál es el valor de los retiros?

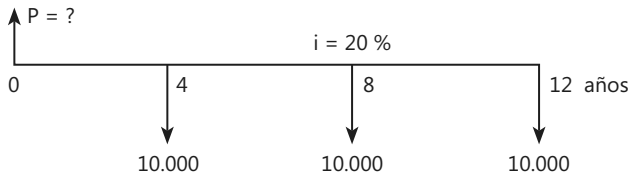
Capítulo 5

Gastos recurrentes

Son gastos (o ingresos) uniformes que ocurren cada cierto número de períodos no consecutivos. Ejemplos: gastos de $10.000 cada cuatro años, gastos de $5.000 cada cinco años, etcétera.

Problema 1

Si se tienen gastos cada cuatro años de $10.000 durante una vida útil de 12 años y a una tasa del 20% anual E. Calcular el equivalente en valor presente.



Primer método de solución:

Si calculamos el valor presente del flujo de egresos, tratando cada pago individualmente como pagos únicos futuros, obtenemos:

P = 10.000 (P/F, 20%, 4) + 10.000 (P/F, 20%, 8) + 10.000 (P/F, 20%, 12)
P = 10.000 x 0,4823 + 10.000 x 0,2326 + 10.000 x 0,1122
P = 8.270

Este método tiene el inconveniente de que si se tienen varios flujos recurrentes diferentes, y con períodos más largos, el proceso de solución sería demasiado largo y de muchas operaciones matemáticas.

Segundo método de solución:

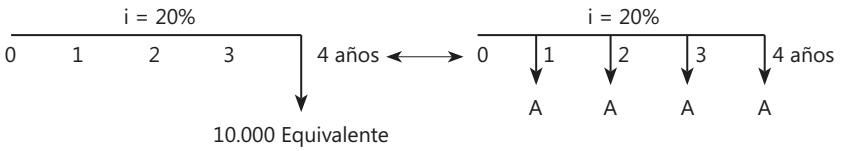
Resolvamos ahora el mismo problema utilizando la metodología de la recurrencia:
El método consiste en convertir el primer flujo de caja (ingreso o egreso) en una serie uniforme, utilizando los factores A/P o A/F, según las conveniencias del problema.

Esta serie utiliza un *n* igual a los subperiodos de la recurrencia.

En el ejemplo anterior el flujo es de cada cuatrienio (cuatro años) los subperiodos son años, en este caso cuatro. El segundo flujo recurrente que tiene el mismo valor del anterior generaría la misma serie; el tercer flujo recurrente también tiene el mismo valor del anterior y generaría la misma serie, y así sucesivamente. Por ser los mismos valores no es necesario calcularlos de nuevo, por ser series ya conocidas con el primer cálculo que hacemos.

Veamos el caso en forma práctica:

Se toma el primer valor de $10.000 ubicado en el cuarto año y lo transformamos en una serie distribuida uniformemente en los cuatro primeros años, así:



A = 10.000 (A/F, 20%, 4) = 10.000 x 0,1863 = 1.863

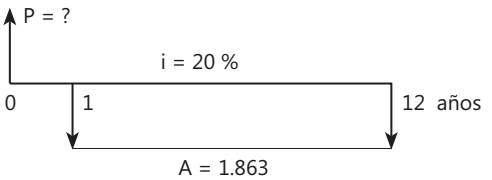
Esta serie queda ubicada desde el periodo uno hasta el cuatro.

Podríamos hacer lo mismo con los $10.000 ubicados en el período 8, es decir, transformar este valor futuro en una serie uniforme colocada desde el quinto año hasta el octavo; igualmente, el último pago del duodécimo año también lo transformamos en una serie uniforme colocada desde el noveno hasta el duodécimo año.

Todos los valores calculados tendrán el mismo valor de $1.863, en razón a que en cada oportunidad estamos utilizando el mismo factor de transformación: 10.000 (A/F, 20%, 4)

Finalmente, se tiene como resultado definitivo una serie uniforme de 1.863 desde el primer año hasta el duodécimo.

Esto quiere decir que sólo es necesario calcular una vez el valor de la serie del primer gasto recurrente y luego reconocer que este valor es igual hasta el período donde está el último flujo recurrente.



Si ya sabemos que este valor de la serie $A = 1.863$ es equivalente a los gastos recurrentes anteriores, sólo necesitamos transformar esta serie en un valor presente así:

P = 1.863 (P/A,20%,12) ⇒ P = 1.863 x 4,4392 = 8.270 igual valor obtenido antes.

En resumen: todos los gastos recurrentes se convierten en series uniformes (es decir, valores iguales y consecutivos), utilizando los factores A/P o A/F, según las conveniencias del problema.

Los pasos anteriores los podemos agrupar en una sola ecuación:

P = 10.000 (A / F, 20%, 4) (P/A,20%,12) = 8.270

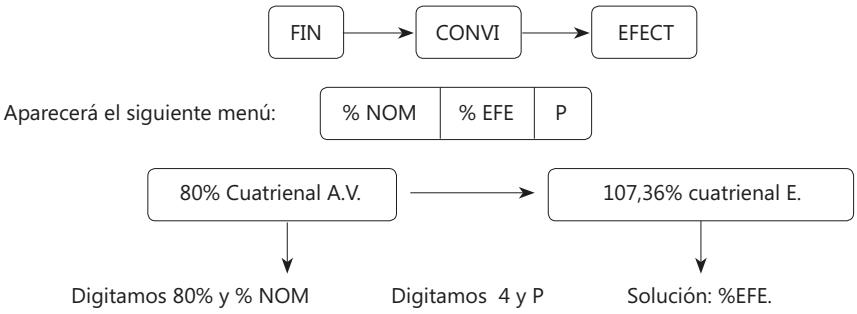
Tercer método de solución:

Transformación de la tasa a otra tasa equivalente en los periodos de recurrencia:

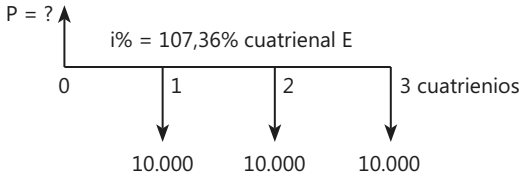
Si los periodos del flujo de caja en este caso son cuatrienios (cada cuatro años), podemos encontrar la tasa efectiva del cuatrienio utilizando las fórmulas de equivalencias entre las tasas estudiadas en el capítulo 2, de la siguiente forma: 20% anual x 4 = 80% cuatrienal A.V. (año vencido).

En las calculadoras *Hewlett Packard 19B II* y *17B* operan así:

Oprima sucesivamente las siguientes teclas para obtener el menú adecuado.



Con esta tasa cuatrienal efectiva tenemos una presentación nueva del problema con una serie uniforme con periodos de pago cuatrienales.



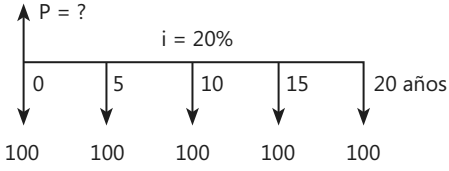
Calculemos el Valor Presente de la serie:

$$P = 10.000(P/A, 107,36\%, 3) = 10.000 \times 0,82698 = \$\ 8.270$$

Obtenemos el mismo valor.

Problema 2:

En el siguiente flujo de caja, calcular su equivalente en valor presente:



Primer método:
P = 100 + 100 { (P/F, 20%, 5) + (P/F, 20%, 10) + (P/F, 20%, 15) + (P/F, 20% 20) }
P = 100 + 100 (0,4019 + 0,1615 + 0,0649 + 0,0261) = 165,44

Segundo método (recurrencia):
Vamos a utilizar el factor A/P, en este caso la serie anual que generará el primer recurrente, que está en el periodo cero. Quedará ubicada desde el primer periodo hasta el quinto, la correspondiente al segundo recurrente colocado en $n = 5$; quedará ubicada desde el sexto periodo hasta el décimo, la correspondiente al tercer recurrente colocado en $n = 10$; quedará ubicada desde el periodo undécimo hasta el decimoquinto, la correspondiente al recurrente del periodo 15; quedará ubicada desde el periodo decimosexto hasta el vigésimo, la correspondiente al recurrente del periodo 20, y por último el recurrente del período 25, generará una serie ubicada desde el período vigésimo primero hasta el vigésimo quinto.

Por lo tanto, el factor *100 (A/P, 20%, 5)* será igual a una serie uniforme cuyo valor se repite desde el periodo primero hasta el vigésimo quinto. Sólo se calcula una vez para luego convertir esta serie en un valor presente.

P = 100 (A/P, 20%, 5) (P/A, 20%, 25)
P = 100 x 0,3344 x 4,9476 = 165,44

Conclusión:
Observe que por el segundo método, al utilizar el factor A/P, la serie que se obtiene queda colocada desde el período uno (un período después de P) hasta el último que queda en el período 25. Por esta razón, el segundo factor que se utiliza, P/A, convierte la serie en valor presente y debe utilizar un *n* de 25 años.

Alternativa del segundo método (recurrencia): en este caso vamos a utilizar el factor A/F como en el primer ejemplo:

P = 100 + 100 (A/F, 20% 5) (P/A, 20%, 20)
P = 100 + 100 x 0,1344 x 4,8696 = 165,44

Explicación:
En este método se utiliza el factor A/F y la serie obtenida queda a la izquierda de F, por esta razón no incluimos como primer recurrente el pago que está en el período cero, pues la serie quedaría en períodos negativos, lo que obligaría a utilizar otros factores que trasladen dicha serie a un valor equivalente en cero.

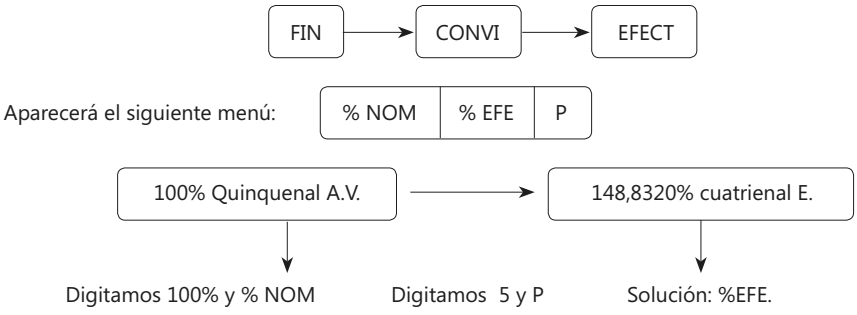
Para evitar este proceso, que a pesar de ser correcto implica más operaciones matemáticas, dejamos el primer recurrente de $100 en el período cero, pues no es necesario moverlo, y tomamos como primer recurrente el valor que está en el período 5, para luego aplicar el factor A/F que convierte los recurrentes en serie colocada desde el primer período hasta el vigésimo.

El segundo factor utilizado P/A con un *n* de 20 convierte la serie en valor presente.

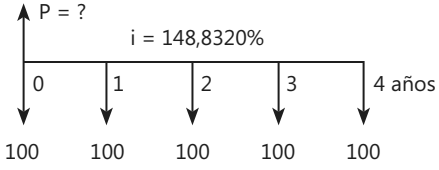
Tercer método de solución:
Se refiere a la transformación de la tasa a otra tasa equivalente en los periodos de recurrencia.

Si los periodos del flujo de caja en este caso son quinquenios o lustros (cada 5 años), podemos encontrar la tasa efectiva del quinquenio utilizando las fórmulas de equivalencias entre las tasas estudiadas en el capítulo 2, de la siguiente manera: 20% anual x 5 = 100% quinquenal A.V. (año vencido).

En las calculadoras *Hewlett Packard 19B II* y *17B* operan así:



Con esta tasa quinquenal tenemos de nuevo una presentación equivalente del problema con una serie uniforme con periodos de pago quinquenales.



P = 100 + 100(P/A, 148,8320%, 4) = 100 + 100 x 0,65437 = $ 165,44

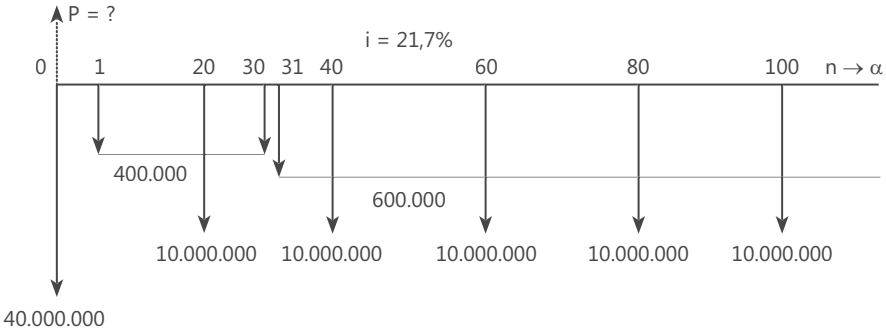
Obtenga conclusiones con respecto a las diferentes formas de tratar los gastos recurrentes.

Problema 3

La Sociedad de Mejoras de una ciudad tiene previsto el diseño de un parque de recreación. El diseño contempla en su etapa de ejecución una inversión inicial de $40.000.000. Se calcula que sería necesario hacer cada 20 años una reconstrucción que costaría $10.000.000.

Sus gastos anuales serían de $400.000 los primeros 30 años y de $600.000 anuales, posteriormente.

Si el proyecto se considera permanente (vida infinita) y la tasa de retorno es del 21,7% anual, ¿cuál sería hoy el costo total de la inversión?



$$P = 40.000.000 + 400.000\ (P/A;\ 21.7\%;\ 30) + \frac{600.000}{0.217}\ (P/A;\ 21.7\%;\ 30) + \frac{10.000.000\ (A/F;\ 21.7\%;\ 20)}{0.217}$$

Serie finita de 1 a 30. Con El factor P/A se traslada a valor presente.	Serie infinita a partir del año 31. Al dividirla por i%, se convierte en valor presente en el año 30. Este valor se traslada a VP utilizando P/F en 30 años.	Serie de gastos recurrentes cada 20 años. El primer recurrente está en el año 20. Utilizando el factor A/F se convierte en serie desde el primer año hasta el infinito, por ser los recurrentes también infinitos. Esta serie se divide por i% para convertirla en valor presente.

P = 40.000.000 + 400.000 x 4.596 + 2.764.977 x 0,00276 + 46.082.949 x 0,00375
P = $42.018.842

Resolver el problema utilizando la tasa equivalente a períodos de veinte años (veinteñal) para los gastos recurrentes.

Probablemente una vez concluya la solución por el método de cambio de tasa y haga la comparación respectiva del tratamiento del problema como recurrencia, es posible que considere, por lo menos en algunos casos, que es más cómodo y rápido utilizar el cambio de tasa.

Capítulo 6

Cálculo del número de períodos y de la TIR

Al estudiar algunas inversiones económicas puede ocurrir que para lograr algún resultado esperado, sea necesario calcular la vida útil mínima de la inversión, es decir, calcular n o la tasa interna de retorno (TIR).

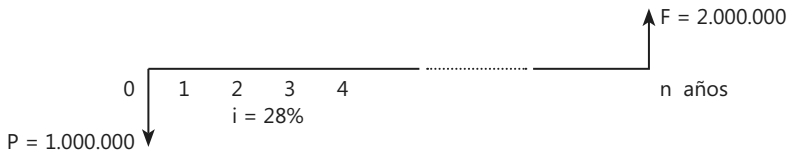
CÁLCULO DE *n* PERÍODOS DESCONOCIDOS

1. Cuando se solicita un crédito, en el estudio financiero, se determina la capacidad de pago y el valor máximo de la cuota que se le puede cobrar. Conociendo, además, la cantidad solicitada como préstamo y la tasa financiera que le cobrará la entidad, se debe calcular el plazo máximo o el mínimo, según sea el caso, para cancelar la deuda. Es decir, el número de cuotas que debe cancelar periódicamente (cuotas de amortización o anualidad).
2. Calcular el número de cuotas de ahorros o depósitos mensuales, trimestrales, anuales etcétera que se deben hacer para lograr acumular cierta cantidad de dinero (capitalizar o acumular cuotas de ahorros más intereses).
3. En general, calcular la vida útil de una inversión (valor de *n*).

Problema 1

Si se desea invertir en un depósito (puede ser un CDT u otro tipo de inversión) la cantidad de $1.000.000, a una tasa del 28% anual E (con reinversión de intereses), hasta que el valor se duplique, se hace necesario conocer en cuántos años ocurrirá la duplicación.

Solución:



Aplicando los factores correspondientes tendríamos:

$$F = P\ (F/P, 28\%, n) \Rightarrow 2.000.0000 = 1.000.000\ (F/P, 28\%, n)$$

El factor no es una ecuación de la cual podamos despejar la incógnita que en este caso es *n*; por lo tanto, debemos utilizar la fórmula correspondiente:

$$F = P\ (F/P, 28\%, n) \text{ Pero } F = P\ (1 + i)^n$$

$$\text{Utilizando la fórmula: } 2.000.000 = 1.000.000\ (1 + 0{,}28\ )^n$$

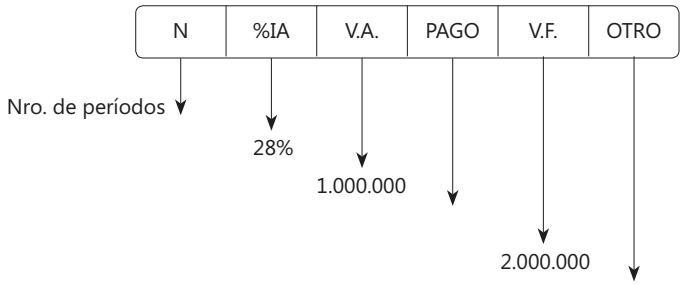
Simplificando por 1.000.000:

$$2 = 1.28^n \text{ y utilizando los logaritmos:}$$

$$n.\ln 1.28 = \ln 2 \Rightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1.28} \Rightarrow n = \frac{0.6931}{0.2469} = 2.8078.\text{años}$$

Este procedimiento fue sencillo debido a que en la fórmula $F = P\ (1 + i)^n$ fue posible despejar a *n*.

El mismo problema resuelto con la ayuda de la calculadora *H.P 17 BII* o *19BII* sería:



Una vez se digite la tasa, el valor actual y el valor futuro, hace clic en N y aparece la respuesta que antes obtuvimos con la fórmula N = 2,8078 años.

En la parte superior de la pantalla debe aparecer: 1 PGOS/AÑO: MODO FINAL

Cuando las fórmulas no son tan elementales, será imposible despejar el elemento n de toda la ecuación para crear un algoritmo adecuado.

En este caso es necesario utilizar el método *pruebas de ensayo y error* (suponer diferentes valores de *n* para comprobar si la suposición es válida) y realizar, además, una interpolación lineal entre dos valores extremos (inferior y superior) que constituyan un rango dentro del cual debe estar el valor de *n* buscado.

Tomando el ejemplo anterior: 2.000.000 = 1.000.000 (F/P, 28%, n)

Supuesto:

Si n = 2 ⇒	2.000.000 ≠ 1.000.000 (F/P, 28%, 2)	
	2.000.000 ≠ 1.000.000 x 1,6384	Ensayo
	2.000.000 ≠ 1.638.4000	Para n = 2 no se cumplió la igualdad.
		Se obtuvo un valor inferior a 2.000.000

Observe que se utilizó el signo de diferente (≠ o desigualdad) porque no se tiene seguridad de que el primer miembro de la ecuación sea igual al segundo.

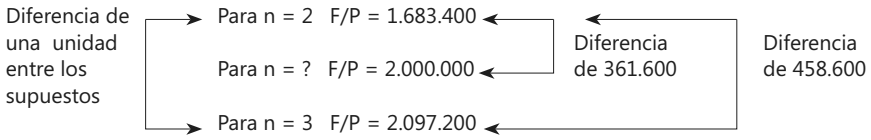
Supuesto:

Si n = 3 ⇒	2.000 .000 ≠ 1.000.000 x 2,0972	Ensayo
	2.000.000 ≠ 2.097.200	Se obtuvo un valor superior a 2.000.000

Se interpretan estos resultados así: el valor real de *n* está entre 2 y 3 años porque con estos valores se fijó el rango (1.638.400 a 2.097.200).

Recordemos que a una diferencia entre dos cantidades también se le denomina error.

Interpolación lineal:



A una diferencia de un año, corresponde una diferencia de 458.800 en los valores extremos. ¿Cuál será la variación de n que corresponde a la diferencia (en este caso de 361.800) entre el valor inferior y el valor esperado?

Para un Δn de 1 hay 458.800 de diferencia (error)

? (cuánto) hay para 361.600 de diferencia (error)

? = 361.600/458.800 = 0,7881 Por lo tanto n = 2 + 0,7881 = 2,7881 años

El valor no es exacto debido a que la interpolación es lineal, cuando en realidad las fórmulas que se utilizan son exponenciales.

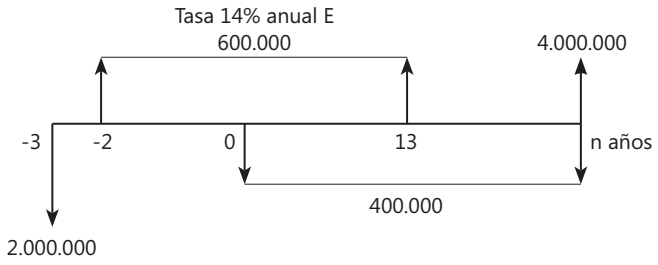
Error relativo entre las dos respuestas:

$$e = \frac{2,807 - 2,7881}{2,7881} \times 100\% = 0.45\%$$

Esto indica que la confiabilidad de la respuesta es del 99,55%. Esta confiabilidad sería mejor si la interpolación se hiciera, por ejemplo, entre dos, cinco y tres años.

Problema 2

Calcular el valor de n del siguiente flujo de caja para que los ingresos sean iguales a los egresos.



Primero formulamos la ecuación de Ingresos = Egresos I = E en un período determinado.

Vamos a seleccionar como período cero para la igualdad.

600.000(P/A, 14%, 16)(F/P, 14%, 3) + 4.000.000(P/F, 14%, n) = 2.000.000(F/P, 14%, 3) + 400.000(P/A, 14%, n+1)(F/P, 14%, 1)
6,26506 1,48154 1,48154 1,1400

5,569162 + 4.000.000(P/F, 14%, n) = 2.963080 + 456.000(P/A, 14%, n+1)
4.000.000(P/F, 14%, n) – 456.000(P/A, 14%, n+1) = 2.963080 – 5.569162

4.000.000(P/F, 14%, n) – 456.000(P/A, 14%, n+1) = –2.606.082 trasladamos términos:

Con la siguiente ecuación haremos todos los ensayos:

2.606.082 = 456.000(P/A, 4%, n+1) – (4.000.000 P/F, 14%, n)

Si n = 15 (supuesto) 2.606.082 ≠ 456.000 x 6.26506 – 4.000.000 x 0,14010
2.606.082 ≠ 2.296.467 Se obtuvo un valor menor en el 2º miembro.
Si n = 17 (supuesto) 2.606.082 ≠ 456.000 x 6.46742 – 4.000.000 x 0.10780
2.606.082 ≠ 2.517.944 La diferencia disminuyó.
Si n = 18 (supuesto) 2.606.082 ≠ 456.000 x 6.55037 – 4.000.000 x 0.09456
2.606.082 ≠ 2.608.649 Ya es mayor el segundo miembro de la ecuación.
Interpretamos que el valor de n que buscamos está entre 17 y 18 años.

Vamos a interpolar entre estos valores:

Δn = 1
Variación de "n"

Para n = 17 el V.P obtenido: 2.517.944
Para n buscado el V.P debe ser :2.606.082
Para n = 18 el V.P obtenido: 2.608.649

Diferencia de –88.138

Diferencia de = –90.705

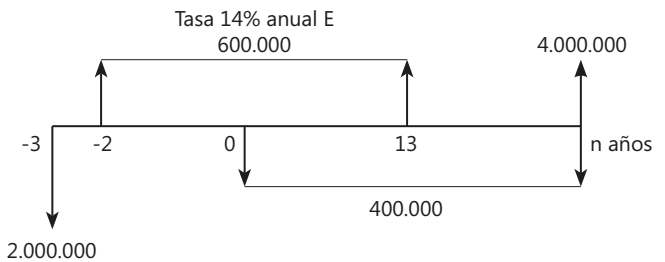
Interpolación Lineal:

Para un Δn = 1 hay diferencia de –90.705
Cuánto vale Δ n si la diferencia es –88.138

Regla de tres. $\Delta n = \frac{-88.138}{-90.705} = 0.97$

Por lo tanto n = 17 + 0,97 = 17,97 años

Una segunda opción de solución se puede hallar utilizando un cuadro de flujo de caja elaborado en Excel.



n	Depósitos	Retiros	Interés	Acumulado
-3	2.000.000			2.000.000
-2		600.000	280.000	1.680.000
-1		600.000	235.200	1.315.200
0	400.000	600.000	184.128	1.299.328
1	400.000	600.000	181.906	1.281.234
2	400.000	600.000	179.373	1.260.607
3	400.000	600.000	176.485	1.237.092
4	400.000	600.000	173.193	1.210.284
5	400.000	600.000	169.440	1.179.724
6	400.000	600.000	165.161	1.144.886
7	400.000	600.000	160.284	1.105.170
8	400.000	600.000	154.724	1.059.893
9	400.000	600.000	148.385	1.008.278
10	400.000	600.000	141.159	949.437
11	400.000	600.000	132.921	882.359
12	400.000	600.000	123.530	805.889
13	400.000	600.000	112.824	718.713
14	400.000		100.620	1.219.333
15	400.000		170.707	1.790.040
16	400.000		250.606	2.440.645
17	400.000		341.690	3.182.336
18	400.000		445.527	4.027.863
19	400.000		563.901	4.991.764
20	400.000		698.847	6.090.610

Recuerde que la columna del Interés es igual al saldo anterior por la tasa del 14%.

La columna Acumulado es igual al saldo anterior más el interés, más el depósito, menos el retiro.

Entre los períodos 17 y 18 se logra un saldo de 4.000.000 que corresponde al retiro pendiente. Por lo tanto la interpolación se debe hacer entre estos períodos y con los valores de 3.182.336 y 4.027.863.

Vamos a interpolar entre estos valores:

$\Delta n = 1$
Variación de "n"

Para n = 17 el acumulado es: 3.182.336

Para n buscado el v/r debe ser: 4.000.000

Para n = 18 el acumulado es: 4.027.863

Diferencia = –817.664

Diferencia = –845.527

Interpolación Lineal:

Para un $\Delta n = 1$ hay diferencia de –845.527

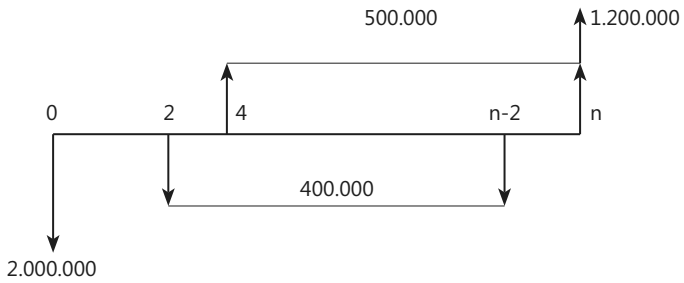
Cuánto vale Δ n si la diferencia es –817.664

Regla de tres. $\Delta n = \dfrac{-817.664}{-845.527} = 0.97$

Por lo tanto n = 17 + 0,97 = 17,97 años

Problemas de aplicación

1. Calcular el valor de n en el siguiente flujo de caja. Tasa 2,32% mensual. (Ver gráfico página siguiente).



Respuesta: n = 26 meses

2. Cuántos años se requieren para que:
   a) Una inversión de $12.000 se convierta en $18.600 con una tasa de interés del 27.5% anual.

Respuesta: 1,80 años

   b) Una inversión de $10.000 se convierta en $23.400 con una tasa del 28% anual.

Respuesta: 3,44 años

TASA INTERNA DE RETORNO (TIR)

La TIR es la tasa que garantiza que la inversión se recupera a través del tiempo. Es un índice que mide la rentabilidad de un proyecto de inversión. Matemáticamente, la TIR es la tasa que hace que todos los flujos de caja, ingresos y egresos trasladados al período cero, tengan un valor algebraico de cero.

Valor neto presente VNP = 0 = Ingresos - Egresos

1. Cuando se tiene capacidad de invertir en un proyecto nuevo, por ejemplo: crear una fábrica, una empresa de servicios, un almacén, una distribuidora, etcétera, o se quiere ampliar una empresa o crear nuevas agencias o sucursales, normalmente es posible conocer, mediante estudios previos, las necesidades de equipos, construcciones, maquinaria, materia prima, costo de mano de obra, impuestos y, en general, los ingresos y egresos que tendrá la nueva inversión.

   Una de las necesidades más frecuentes en la evaluación de este tipo de proyectos es llegar a conocer la tasa interna de retorno de los mismos, porque si la TIR obtenida en una evaluación de un proyecto es inferior a la tasa representativa del mercado –por ejemplo, DTF–, lo más probable es que el proyecto, tal como está configurado, no se recomiende su ejecución.

   Para estos casos podríamos afirmar que si se utiliza el método de la TIR para evaluar un proyecto de inversión, los criterios para definir la viabilidad de la ejecución del proyecto serían:

a) Si la TIR obtenida del análisis de los flujos de caja, trasladados todos a un período determinado, por ejemplo, presente, es mayor que una tasa predeterminada como tasa mínima aceptable —podría ser una tasa representativa en el mercado como la DTF— el proyecto se considera viable y se recomendaría su ejecución.
b) Si la TIR obtenida es igual a la mínima predeterminada, es indiferente económicamente realizar o no el proyecto. En este caso la decisión se podrá tomar por análisis de otros factores no económicos.
c) Si la TIR obtenida es menor que la tasa mínima predeterminada, el proyecto debe rechazarse por ser inconveniente económicamente.

2. Si se dispone de la información de distintos planes de crédito de diversas entidades financieras, en las cuales se dan los valores de los créditos, los plazos y los valores de las cuotas, es necesario estudiar cada plan para conocer la tasa de interés que cobra cada entidad y poder seleccionar la más conveniente para el usuario.
3. También será interesante o necesario conocer la tasa de interés que debo lograr para acumular o capitalizar cierta cantidad de dinero que utilizaré en el futuro y conociendo previamente la capacidad de ahorro.

Procedimiento para calcular la TIR

Al igual que en el cálculo de los períodos desconocidos (n), en la mayoría de los casos es imposible despejar de las fórmulas a *i*% para tener un algoritmo sencillo y utilizable como en los demás elementos: P, F, A, etcétera.

El único método conocido es el de ensayo (suponer valores de *i*%) y error (verificación).

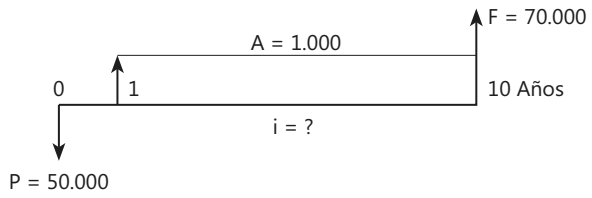
Este método es análogo al descrito en el cálculo de *n*.

Problema 3

Una empresa quiere aumentar su producción, para ello decide comprar una máquina que cuesta $50.000 y tendrá un valor de recuperación (valor de salvamento) de $70.000 a los 10 años. Los ingresos adicionales por la nueva máquina serán de $1.000 anuales.

¿Cuál es la tasa de retorno de esta inversión?

Solución:



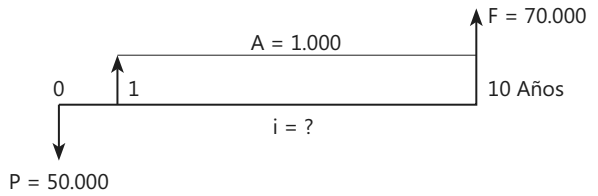
Resolver el problema utilizando los programas de las calculadoras financieras.

Cuando el flujo de caja involucra un pago único *P*, colocado en cero, una serie *A*, colocada desde el primer período hasta el último, y un pago único *F*, colocado en el último período, o sólo dos elementos de los anteriores, se puede resolver el problema en las calculadoras financieras. En la *Hewlett Packard 19B II*:

Iniciamos con modo FIN, luego VDT. En la parte superior de la pantalla debe aparecer un pago por año (entiéndase como un pago por período) y modo final. De no ser así, debe entrar por OTRO y oprimir 1 y P/AÑO, luego FINAL. Oprima EXIT para regresar al menú anterior. No olvide que los ingresos son positivos y para los egresos debe anteponer el signo negativo.

N	%IA	VA	PAGO	VF	OTRO
10	? 5,16%	–50.000	1.000	70.000	

Solución por el método de *pruebas de ensayo y error:*



Solución:

Partimos de la ecuación: Ingresos = Egresos I = E o

0 = I – E

Primero transformamos todos los flujos a valor presente o a series. En este caso utilizamos el valor presente:

Ingresos: 1.000 (P/A, i%, 10) + 70.000 (P/F, i%, 10)
Egresos: 50.000
0 = 1.000 (P/A , i%, 10) + 70.000 (P/F, i%, 10) – 50.000

Suponemos un valor de i% y luego comprobamos si hay error:

0 = 1.000 (P/A, 4%, 10) + 70.000 (P/F, 4%, 10) – 50.000

Si i = 4% 0 ≠ 1.000 x 8,1109 + 70.000 x 0,6756 – 50.000
0 ≠ 5.402 Si hay error porque no hubo igualdad. e = 5402

Supongamos un nuevo valor de i%:

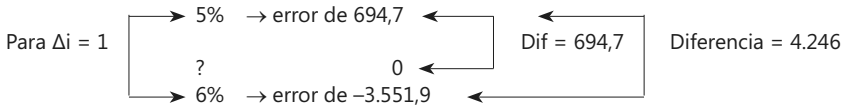
Si i = 5% 0 ≠ 1.000 (P/A, 5%, 10) + 70.000 (P/F, 5%, 10) – 50.000
0 ≠ 1.000 x 7,7217 + 70.000 x 0,6139 – 50.000
0 ≠ 694,7

De nuevo hay error (e = 694,7) porque no se logró la igualdad. Tampoco se obtuvo un valor inferior a cero para poder tener dos extremos que constituyan el rango dentro del cual esté el cero. Es decir, necesitamos un valor mayor a cero y otro inferior a cero.
Probemos otro valor de i:

Si i = 6% 0 ≠ 1.000 (P/A, 6%, 10) + 70.000 (P/F, 6%, 10) – 50.000
0 ≠ 1.000 x 7,3601 + 70.000 x 0,5584 – 50.000
0 ≠ – 3551,90 Este valor constituye el extremo inferior e = – 3551,90

Para i = 5% e i = 6%, se tienen dos valores extremos que fijan un rango dentro del cual está cero que es el resultado que estamos tratando de obtener.

Interpolación:
En este caso utilizaremos los valores de los errores.
Para i = 5% hay una diferencia de 694,7 e = 694,7
i = 6% hay una diferencia de –3551,90 e = –3551,9 Esquemáticamente tenemos:



Hacemos la regla de tres:

Para un i de 1 hay diferencia de 4.246
? hay para 694.7

? = 694.7/4.246 = 0.1636

Por lo tanto i = 5 + 0,1636 = 5,1636 i = 5,16% anual E. Esta es tasa de retorno de la inversión.

Comprobación:

0 ≠ 1.000 (P/A, 5.1636%, 10) + 70.000 (P/F, 5.1636%, 10) –50.000
0 ≠ 1.000 x 7,6608 + 70.000 x 0,6044 – 50.000
0 ≠ –31 Este valor constituye una excelente aproximación. El error es de $31 que se debe a que sólo se utilizaron 4 decimales

Solución con la calculadora financiera:
Las calculadoras financieras tienen otro programa para encontrar la TIR, cuando el flujo de caja reúne las condiciones anteriores o son flujos irregulares. Es decir, es un programa más genérico. Se llama *flujo de caja* (F.CAJ). Antes de empezar a utilizarlo es necesario elaborar una tabla que contenga el flujo neto en cada período (ingresos-egresos) y el número de veces que se repita el mismo flujo. En este problema el flujo es:

Período	Flujo neto	No. veces
0	–50.000	inicial
1 - 9	1.000	9
10	70.000 + 1.000 = 71.000	1

Entramos por FIN, enseguida VDT y luego F.CAJ, oprimimos CALC y aparece:

- INICIAL = –50.000 INPUT (digitamos 50.000 +/– INPUT), luego aparece:-50.000)
- F. CAJA (1) = 1.000 INPUT (digitamos 1000 INPUT),
- No. DE VECES = 9 INPUT (digitamos 9 INPUT)
- F. CAJA (2) = 71.000 INPUT
- No. VECES = 1 INPUT, como ya terminamos de digitar el flujo de caja, oprimimos CALC (calcular) y en el menú que aparece oprimimos TIR y obtenemos la respuesta:

TIR = 5,157% anual E

Solución utilizando la TIR del programa financiero de Excel:
Elaboramos un tablero con los flujos de caja así:

n	Ingresos	Egresos	Flujo Neto
0		50.000	–50.000
1	1.000		1.000
2	1.000		1.000
3	1.000		1.000
4	1.000		1.000
5	1.000		1.000
6	1.000		1.000
7	1.000		1.000
8	1.000		1.000
9	1.000		1.000
10	71.000		71.000

TIR = 5,16%

En Excel entramos a *Insertar Función*, luego *Financieras* y buscamos la TIR. Señalamos el rango desde el periodo cero hasta el final de la columna *Flujo Neto* y *Aceptar*. Aparece el valor de la TIR.

Problema 4

El distribuidor de Motos Ltda. le ofrece una moto que vale $4.000.000 y le presenta dos planes:

I) De contado le dan un descuento del 8%.

II) A crédito debe pagar una cuota inicial de $800.000 y el saldo de $3.200.000 en 12 cuotas mensuales de $266.667 cada una. Es decir, sin intereses, aparentemente.

a) ¿Qué tasa de interés realmente le están cobrando?

b) Si usted tuviera la oportunidad de conseguir un crédito en un banco para pagar la moto de contado (se supone que usted tiene $800.000 que necesitaría

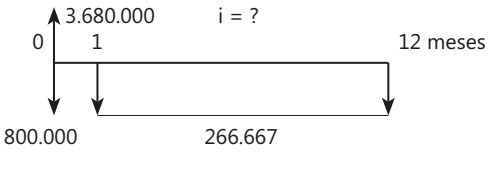
en la cuota inicial), a una tasa de interés del 1,8% mensual, ¿cuál será su decisión? ¿Utilizar el plan de crédito de Motos Ltda. o el préstamo en el banco?

Solución: I) Si sobre al precio de compra le hacen un descuento del 8% ($320.000) es porque la moto tiene un precio real de $3.680.000 si no se compra de contado; esta diferencia constituye los intereses totales si adopta la modalidad del crédito, los cuales son generados por una tasa de interés no manifestada (aparentemente se dice que no se cobran intereses).

Valor real: $3.680.000

Saldo real a financiar: 3.680.000 – 800.000 (cuota inicial) = $2.880.000

Valor de las cuotas (sin intereses aparentes): 3.200.000/12 = 266.667 que corresponden al valor real de la moto a crédito menos la cuota inicial repartido en doce cuotas iguales.



Ingresos = Egresos

3.680.000 = 800.000 + 266.667(P/A; i%, 12)

Con esta ecuación se hacen los ensayos de prueba y error para calcular la TIR.

Utilizando el programa de la calculadora: Modo FIN, luego VDT e ingresamos: 12 es N, 2.880.000 es VA; -266.667 es PAGO, oprimimos% *i* y aparece *i* = 1,659% mensual.

Si el banco cobra el 1,8% mensual, es mejor plan el del distribuidor.

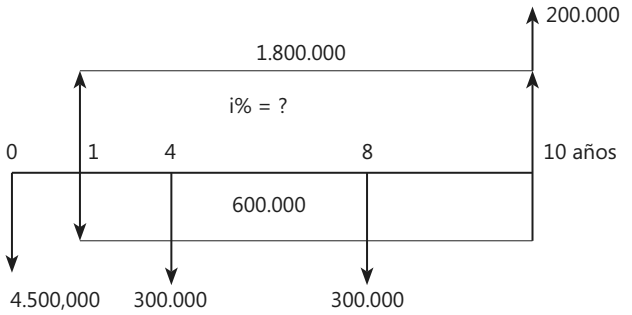
Cuadro de pagos y de interés acumulado:

Mes	Cuota	Interés	Amortización	Saldo	Interés acumulado
0	0	0	0	2.880.000	0
1	266.667	47.791	218.876	2.661.124	47.791
2	266.667	44.159	222.509	2.438.615	91.949
3	266.667	40.466	226.201	2.212.414	132.416
4	266.667	36.713	229.954	1.982.460	169.129
5	266.667	32.897	233.770	1.748.690	202.026
6	266.667	29.018	237.649	1.511.040	231.043
7	266.667	25.074	241.593	1.269.447	256.117
8	266.667	21.065	245.602	1.023.845	277.183
9	266.667	16.990	249.678	774.168	294.172
10	266.667	12.847	253.821	520.347	307.019
11	266.667	8.635	258.033	262.314	315.654
12	266.667	4.353	262.314	0	**320.006**

Observe que el interés acumulado en el mes 12 corresponde al descuento si la moto se comprara de contado.

Problema 5

Una inversión tiene el siguiente flujo de caja: costo inicial $4.500.000; ingresos anuales de $1.800.000; gastos anuales de $600.000; reparación general cada cuatro años por un valor de $300.000. Se calcula que a los 10 años el equipo se venderá por $200.000. ¿Cuál es la tasa interna de retorno de la inversión?



Para hacer las pruebas de ensayo y error formulamos la ecuación de Ingresos = Egresos, llevando todos los flujos de caja al período cero.

Ecuación:

1.800.000(P/A, i%, 10) + 200.000(P/F, i%, 10) = 4.500.000 + 600.000(P/A, I%, 10) + 300.000(P/F, i%, 4) + 300.000(P/F, I%,8)

Si i% = 10 11.060.221 + 77.109 ≠ 4.500.000 + 3.686.740 + 204.904 + 139.952
11.137.330 ≠ 8.531.596 *diferencia o error = 2.605.734*

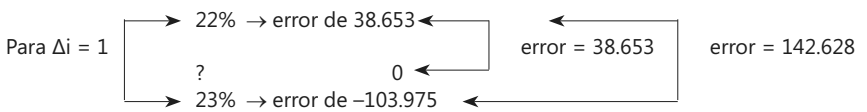
Si i% = 12 10.170.401 + 64.395 ≠ 4.500.000 + 3.390.134 + 190.655 + 121.165
10.234.796 ≠ 8.201.954 *diferencia o error = 2.032.842*

Si i% = 13 9.767.238 + 58.918 ≠ 4.500.000 + 3.255.746 + 183.996 + 112848
9.826.156 ≠ 8.052.590 *diferencia o error = 1.773.566*

Si i% = 22 7.089.112 ≠ 7.050.459 haga los cálculos Error: e = 38.653
Si i% = 23 6.863.920 ≠ 6.967.895 haga los cálculos Error: e = –103.975

El error pasó de positivo a negativo, lo que indica que la tasa interna está entre 22 y 23%.

Interpolación:



Hacemos la regla de tres:

Para un Δi de 1 hay diferencia de 142.628 ? hay para 38.853	? = 38.853/142.628 = 0.2724

Por lo tanto i% = 22 + 0,2724 = 22,2724% anual V/r de la tasa de retorno de la inversión.

Compruebe esta respuesta en la ecuación inicial.

Solución empleando la calculadora *Hewlett Packard 19B* y el programa de *flujo de caja:*

N	Ingresos	Egresos	F. neto	No. veces	No. del flujo
0		4.500.000	-4.500.000	Inicial	Inicial
1 a 3	1.800.000	600.000	1.200.000	3	1
4	1.800.000	900.000	900.000	1	2
5 a 7	1.800.000	600.000	1.200.000	3	3
8	1.800.000	900.000	900.000	1	4
9	1.800.000	600.000	1.200.000	1	5
10	2.000.000	600.000	1.400.000	1	6

TIR = 22,27% anual

Entramos por FIN, enseguida VDT y luego F.CAJ, oprimimos CALC y aparece:

- INICIAL = –4.500.000 INPUT (digitamos 4.500.000 +/– INPUT), aparece: –4.500.000
- F. CAJA (1) = 1.200.000 INPUT (digitamos 1.200.000 INPUT),
- No. DE VECES = 3 INPUT (digitamos 3 INPUT)
- F. CAJA (2) = 900.000 INPUT
- No. VECES = 1 INPUT
- F. CAJA (3) = 1.200.000 INPUT
- No. VECES = 3 INPUT
- F. CAJA (4) = 900.000 INPUT
- No. VECES = 1 INPUT
- F. CAJA (5) = 1.200.000 INPUT
- No. VECES = 1 INPUT
- F. CAJA (6) = 1.400.000 INPUT
- No. VECES = 1 INPUT

Como ya terminamos de digitar el flujo de caja, oprimimos CALC (calcular) y en el menú que aparece oprimimos TIR y obtenemos la respuesta: TIR = 22,26% anual. Esta respuesta es más exacta porque la calculadora opera con nueve decimales.

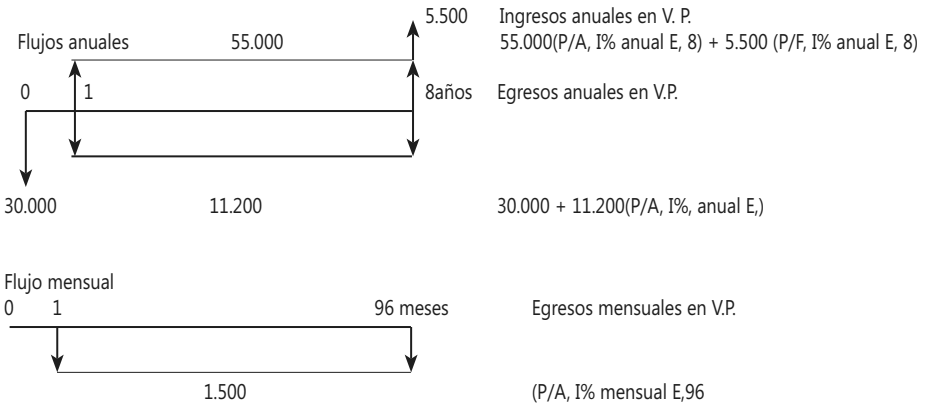
PROBLEMAS CON SERIES Y CON PERÍODOS DIFERENTES

Problema 6

Un piloto profesional está planeando dedicarse a negocios propios. Por medio de una investigación de mercados, predice que si compra una avioneta de 30.000 dólares podrá obtener ingresos brutos anuales de 55.000 dólares, gastos anuales de 11.200 dólares por concepto de mantenimiento, combustibles, impuestos, etcétera. Así mismo, planea fijarse un salario mensual de 1.500 dólares. Considera que la avioneta tendrá una vida útil de 8 años, con el 18,333% de recuperación. Si se supone que los ingresos y los egresos serán uniformes durante ese periodo, ¿cuál es la tasa de rendimiento de la inversión?

Nota: Los salarios son egresos para el negocio.

Utilicemos diagramas diferentes para cada tipo de período.



55.000(P/A, I% anual E, 8) + 5.500(P/F, I% anual E, 8) = 30.000 + 11.200(P/A, I% anual E, 8) + 1.500(P/A, I% mensual E, 96)

Pruebas de ensayo y error:

Por tener períodos anuales y mensuales, es necesario que una vez supongamos la tasa para hacer el ensayo, la transformemos a su equivalente en el otro período. Es decir, si suponemos una tasa mensual efectiva, de ella debemos obtener la anual E.

Si i% = 3% mensual E, la equivalente anual es: 42,576% anual E. Con estas dos tasas hacemos los ensayos en la ecuación general:

55.000(P/A, 42,576 anual E, 8) + 5.500(P/F, 42,576 anual E, 8) = 30.000 + 11.200(P/A, 42.576 anual E, 8) + 1.500(P/A, 3 mensual E, 96)
121.615 322 24.765 47.072

121.937 ≠ 101.837 Error: 20.100

Si i% = 4% mensual E, la equivalente anual es: 60,103% anual E. Con estas dos tasas hacemos los ensayos en la ecuación general:

55.000(P/A, 60,103 anual E, 8) + 5.500(P/F, 60,103 anual E, 8) = 30.000 + 11.200(P/A, 60,103 anual E, 8) + 1.500(P/A, 4 mensual E, 96)
89.390 127 18203 36.631

89.517 ≠ 84.834 Error: 4.683

Como el error disminuyó, debemos seguir aumentando la tasa.

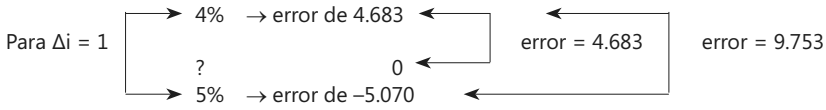
Si i% = 5% mensual E, la equivalente anual es: 79,586% anual E. Con estas dos tasas hacemos los ensayos en la ecuación general:

55.000(P/A, 79,586 anual E, 8) + 5.500(P/F, 79,586 anual E, 8) = 30.000 + 11.200(P/A, 79,586 anual E, 8) + 1.500(P/A, 5 mensual E, 96)
68.469 127 13.943 29.723

68.596 ≠ 73.666 Error: –5.070

El error pasó de positivo a negativo, quiere decir que la tasa buscada está entre 4 y 5%.

Interpolación



Para un Δi de 1 hay diferencia de 9.753

? hay para 4.683

? = 4.683/9.753 = 0.4802

Por lo tanto i% = 4 + 0.4802 = 4,48% mensual V/r de la tasa de retorno de la inversión.

Tasa anual: 69,199% anual E.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Suponga que una pareja invierte $10.000 hoy y $500 dentro de tres años, y que recibirá $500 dentro de un año, $600 dentro de 2 años, $700 anuales del cuarto al duodécimo año. También recibirá pagos únicos dentro de 5 años de $5.000 y de $2.000 dentro de 10 años. Calcule la tasa de retomo de su inversión.

Respuesta: 5,05% anual.

2. Si una compañía gasta $6.000 hoy y $900 anuales durante 15 años, con el primer desembolso dentro de cinco años, ¿qué tasa de retorno recibirá la compañía si los ingresos recibidos fueron $5.000 al final del tercer año y $1.200 anuales de allí en adelante?

Respuesta: 10,49% anual.

3. Una inversión tiene como presupuesto de ingresos y egresos el siguiente flujo: costo inicial de $5.000.000; ingresos anuales de $2.000.000; gastos anuales de $800.000; reparación general de $500.000 cada tres años. La vida útil estimada es de 10 años, al cabo de los cuales su valor de salvamento será el 10% de la inversión inicial. ¿Qué rentabilidad ofrece este proyecto?

Respuesta: 17,36% anual.

4. Si una compañía gasta $12.000 ahora y $5.000 anualmente durante 10 años, efectuando el primer gasto de $5.000 dentro de cuatro años, ¿qué tasa de retorno obtendría si su ingreso fuera de $4.000 anuales, empezando en el octavo año y continuando hasta el año 25? Resuelva el problema por *prueba de ensayos y error* o utilizando el flujo neto. Debe mostrar el procedimiento.

Respuesta: $1,57%.

5. Un ingeniero compró un cargador con el fin de ofrecer un servicio de movimientos de tierra. Pagó US$34.000 por el cargador y su valor de salvamento a los cinco años fue de US$3.000. Sus gastos de operación y mantenimiento fueron US$3.500 anuales. A los tres años fue necesaria una reparación de motor por US$900. Las ventas por servicios fueron de US$15.000 cada año. ¿Cuál fue su tasa de retorno? Resuelva el problema por *prueba de ensayos y error* o utilizando el flujo neto. Debe mostrar el procedimiento.

Respuesta: 21,39% anual E.

6. Un club de recreación compró un pequeño balneario en US$90.000 y su explotación generó US$1.000 mensuales durante los dos primeros años. Al final del segundo año, el club hizo remodelaciones por valor de US$8.000 y decidió vender el balneario. A los seis meses pudo venderlo por US$105.000, utilizando una agencia de finca raíz, que cobró una comisión de US$5.000. ¿Qué tasa de retorno obtuvo el club? Resuelva el problema por *prueba de ensayos y error* o utilizando el flujo neto. Debe mostrar el procedimiento.

Respuesta: 0,96% mensual, 12,15% anual E.

7. Suponga que un portafolio de inversiones ofrece que se invierta $10.000.000 hoy y $5.000.000 dentro de tres años. El inversionista recibirá $4.000.000 dentro de un año, $6.000.000 dentro de dos años y $700.000, cada año, de allí en adelante y hasta el final del décimo año. También recibirá pagos únicos dentro de cinco años de $1.000.000, y de $2.000.000 dentro de 10 años. Calcule la tasa de retomo de este plan de inversión.

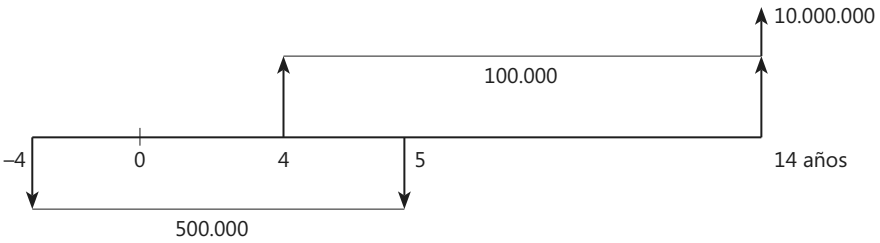
Respuesta: 8,393% anual E.

8. Si una compañía gasta $12.000 ahora, y $5.000 anualmente durante 10 años, y efectúa el primer gasto de $5.000 dentro de cuatro años, ¿qué tasa de retorno obtendría si su ingreso fuera $8.000 anuales, empezando en el octavo año y continuando hasta el decimoquinto?

En el cuarto y noveno año tendrá ingresos adicionales de $6000 y $6.400, respectivamente. Resuelva el problema por *prueba de ensayos*.

Respuesta: 5,244% anual E.

9. En el siguiente flujo de caja, calcule el valor de i% para que los ingresos sean iguales a los egresos.



Respuesta: 6,257% anual E.

10. Dentro de 22 meses necesitaré $25.000.000. Hoy abro una cuenta con $1.500.000. A partir del próximo mes iniciaré 10 depósitos mensuales de $650.000 cada uno. Trimestralmente, empezando dentro de siete meses, depositaré $500.000 cada vez. Cada semestre depositaré $800.000. En total haré 3 depósitos semestrales. Adicional a esto, depositaré $750.000 cuatrimestralmente, empezando dentro de dos cuatrimestres. ¿Cuál es la tasa que me garantiza el retiro de los $25.000.000?

Respuesta: 3,185% mensual; 45,679% anual E.

Resolver los problemas anteriores utilizando el flujo neto en la calculadora.

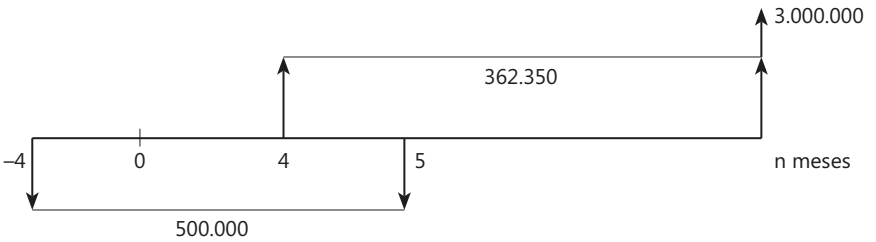
11. Una persona desea comprar un automóvil que cuesta $18.000.000. Debe pagar una cuota inicial de $6.000.000 y el resto lo difiere para cancelar en cuotas mensuales iguales de $500.000 cada una; además, adicional a la octava cuota, pagará $3.000.000 y la última cuota pagará en total $2.500.000. Si la tasa de interés es del 2,694% mensual, ¿cuántas cuotas debe pagar?

Respuesta: n = 23 meses.

12. Hace cuatro meses abrí una cuenta con $3.087.214. Hoy iniciaré seis depósitos mensuales de $400.000 cada uno. Dentro de ocho meses empezaré *X* retiros mensuales iguales de $900.000 cada uno. Si la tasa financiera es del 2,988% mensual, ¿cuántos retiros podré hacer?

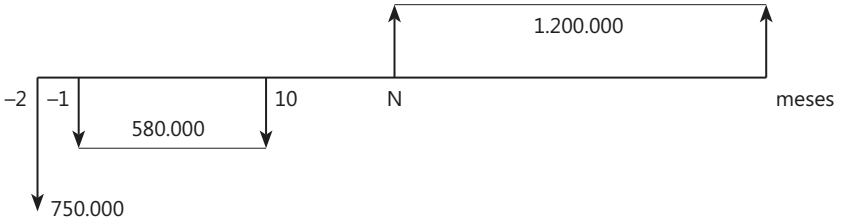
Respuesta: 9 retiros.

13. En el siguiente flujo de caja, calcule el valor de *n* para que los ingresos sean iguales a los egresos. La tasa financiera es del 3,210% mensual. (Ver gráfica página siguiente).



Respuesta: 11 retiros, el último retiro se hace en el mes 14.

14. En el siguiente diagrama, ¿cuántos meses transcurren entre el período 10 y el período *N* para que los ingresos sean iguales a los egresos? En total se harán 11 retiros iguales. La tasa financiera es del 3,18% mensual.



Respuesta: Seis meses. En estos meses ni se hacen depósitos ni retiros, pero se acumulan intereses. El primer retiro se hace al final del mes 17. El último retiro se hace en el mes 27.

15. Un supermercado lanzó una promoción para vender un combo de nevera y lavadora por un valor de $5.000.000. La financiación es así: cuota inicial del 15% del valor de la compra; cuotas mensuales iguales a partir del tercer mes y por un valor de $180.000 cada una. Dos cuotas extras adicionales de $600.000 en el cuarto mes y otra al final del plazo por un valor de $700.000. Si la tasa financiera es del 1,808% mensual, ¿cuántas cuotas mensuales de $180.000 se deben pagar?

Respuesta: plazo: 25 meses; número de cuotas mensuales: 23.

16. Un conductor compró un taxi para generar sus ingresos. El costo del taxi fue de $25.000.000. Estima que sus gastos mensuales en combustibles y mantenimiento en promedio serán de $1.480.000. Considera que tendrá que hacer reparación de motor a los 3 años por un valor $2.500.000. Los ingresos mensuales en promedio los estima en $4.000.000, pero se iniciarán en el segundo mes porque el primer mes lo dedicará a acondicionar el vehículo. Si piensa vender el taxi a los cinco años por un valor del 50% del valor de compra, ¿cuál es la tasa interna de retorno que logrará?

Respuesta: 8,72% mensual.

17. Una industria metalmecánica compró un torno y una fresadora con el fin de mejorar los servicios que presta. Pagó $5.500.000 por el tormo y $4.800.000 por la fresadora. Sus gastos de operación y mantenimiento fueron $7.800.000 anuales. Hizo mantenimiento preventivo al torno a los tres años y a la fresadora a los cuatro años por un valor $700.000 y $500.000, respectivamente. Los ingresos anuales de las dos máquinas fueron en total de $12.000.000 anuales. Se espera vender estas máquinas a los ocho años por el 30% del valor de la compra. ¿Cuál fue su tasa interna de retorno?

Respuesta: 38.88% anual E.

18. Un concesionario de carros ofrece el siguiente plan de financiamiento: cuota inicial del 20% del valor de la compra; cuotas mensuales iguales desde el tercer mes y hasta el final de $500.000 cada una; dos cuotas extras adicionales: una de $2.000.000 en el quinto mes y otra extra adicional de $2.500.000 al final del plazo. El valor del carro es de $20.000.000. Si la tasa de interés es del 1,8822% mensual, ¿cuántas cuotas de $500.000 se deben pagar?

Respuesta: Plazo: 40 meses; cuotas mensuales: 38.

19. Una buseta cuesta $123.000.000 y se compra a crédito. La forma de pago es así: hoy se paga una cuota inicial de $33.000.000; dentro de tres meses se pagarán $18.500.000; las cuotas mensuales se empezarán a pagar dentro de seis meses y por un valor de $6.000.000. Adicional a la última cuota, se pagará otra cuota extra de $20.000.000. Si la tasa financiera es del 13,8% anual E. ¿Cuál es el plazo total del crédito?

20. Hoy se abre una cuenta con $1.000.000. Se proyecta ahorrar cada mes y durante 15 meses la cantidad de $340.000. Además, a los 6 y 12 meses se ahorrarán, adicionalmente, $3.500.000 y $4.000.000, respectivamente. A partir del mes 14 iniciará 10 retiros mensuales iguales de $2.000.000. ¿Qué tasa de interés debe lograrse en esta cuenta?

Capítulo 7

Fórmulas que involucran series aritméticas. Gradiantes aritméticos crecientes y decrecientes

En la Gráfica 1 del primer capítulo se representaron los diferentes flujos de caja. Hasta ahora hemos estudiado los pagos únicos y las series uniformes. En los dos siguientes capítulos nos ocuparemos de las series no uniformes, pero en las cuales las variaciones se harán en pesos o en porcentajes constantes.

Una serie con gradiente aritmético o lineal, creciente o decreciente, es una serie de pagos o de ingresos que crecen en una cantidad uniforme en pesos (creciente) o decrecen en cada período. La cantidad constante que se adiciona o se disminuye en cada período se llama *Gradiente*.

SERIADOS CRECIENTES O DECRECIENTES ARITMÉTICAMENTE

Son los pagos mensuales, trimestrales, semestrales, anuales, etcétera, de cuotas u obligaciones, iniciando con valor determinado. Cada pago se aumenta o disminuye en una cantidad fija de pesos.

Problema 1

Pagar o recibir 5 cuotas mensuales empezando con 200 y cada vez aumentar o disminuir en 20:

Creciente:	200	220	240	260	280
Decreciente:	200	180	160	140	120

Estas series de pagos crecientes o decrecientes, también se utilizan (como en el caso de pagos uniformes), en amortizaciones o capitalizaciones.

Problema 2

Proyectar seis pagos mensuales crecientes, empezando con un primer pago de $100.000 y a partir del segundo período y los sucesivos posteriores se deben incrementar en $20.000 cada uno, con respecto al anterior (en lugar de incrementar podría disminuir).

La serie propuesta para seis pagos sería: 100.000, 120.000, 140.000, 160.000, 180.000, 200.000. El gradiente es 20.000 (G = 20.000).

Veamos el ejemplo en un cuadro de cuotas:

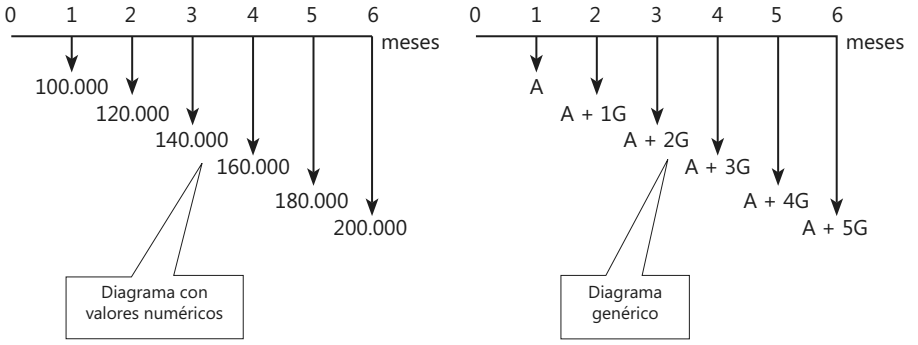
No. pago n	Valor de las cuotas	Otra forma de calcular los mismos valores	Si cambiamos los valores numéricos por valores literales
1	100.000	100.000	A
2	100.000 + 20.000 = 120.000	100.000 + 1 x 20.000 = 120.000	A + 1G
3	120.000 + 20.000 = 140.000	100.000 + 2 x 20.000 = 140.000	A + 2G
4	140.000 + 20.000 = 160.000	100.000 + 3 x 20.000 = 160.000	A + 3G
5	160.000 + 20.000 = 180.000	100.000 + 4 x 20.000 = 180.000	A + 4G
6	180.000 + 20.000 = 200.000	100.000 + 5 x 20.000 = 200.000	A + 5G

Primera cuota. Observe que forma una serie uniforme (A) en todos los períodos

Nro. del período menos uno (n – 1)

Gradiente

Representación gráfica de esta serie creciente:



VALOR PRESENTE DEL GRADIENTE ARITMÉTICO CRECIENTE

Problema tipo o modelo:

Se obtiene un crédito de $\$P$ a una tasa del $i\%$ anual y a n años, para pagarlo en cuotas anuales así: la primera cuota se pagará dentro de un año y tendrá un valor de $\$A$ y cada cuota posterior se incrementará en $\$G$ con respecto a la anterior. Elaborar el diagrama.

Nomenclatura:

P: Valor presente
A: Primera cuota
G: Gradiente. Valor incremental de cada pago. Cantidad fija en pesos.

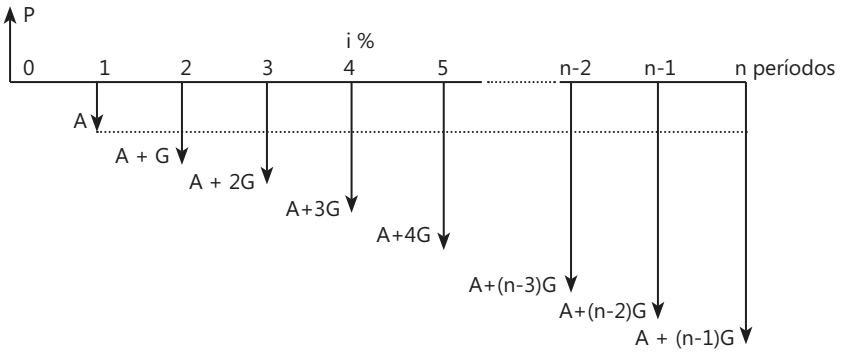


Gráfico 15 Flujo de un crédito (a).

Observe que el primer pago es A; el segundo se incrementa en una cantidad constante de (G) pesos, el tercero también se incrementa en la misma cantidad constante *G* con respecto al anterior, y así sucesivamente. De manera similar, debe tenerse en cuenta que, según el diagrama anterior, los pagos posteriores al primero tienen como base inicial el primer pago *A*.

De acuerdo con esta secuencia de pagos, el último tendrá un valor de:

Última cuota U = A + (n – 1) G
Despejando a G de esta ecuación es posible conocer el crecimiento G
G = (U – A) / (n – 1)

Esto nos permite calcular cuál puede ser el incremento de las cuotas a través de los *n* períodos, si se supone la capacidad de pago en la primera cuota y en la última.

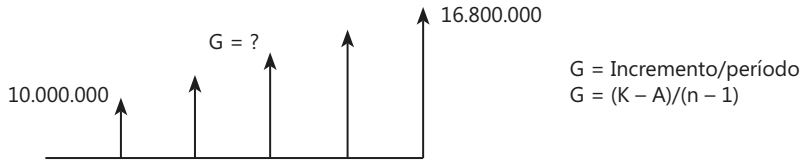
Visto desde otro ángulo, por ejemplo ingresos por ventas, si conocemos o suponemos el primer ingreso por ventas en el primer período, *A*, y se fija una meta de llegar a unos ingresos totales de *K* pesos en n años, el incremento por período necesario para alcanzar la meta propuesta será:

G = Incremento/período = (K – A)/(n – 1)

Ejemplo

El departamento de ventas de una empresa planificó un total de ventas para el próximo año de $10.000.000. Espera alcanzar, al final del quinto año, un total de ventas por $16.800.000. ¿En cuánto deben aumentar las ventas en promedio cada año, si el crecimiento debe ser lineal?

Solución:



G = (16.800.000 – 10.000.000) / (5 – 1) = 1.700.000 Incremento por año

MANEJO DEL GRADIENTE CRECIENTE

La gráfica anterior del problema tipo la podemos esquematizar para facilitar el dibujo del diagrama y visualizar con más comodidad los flujos de caja.

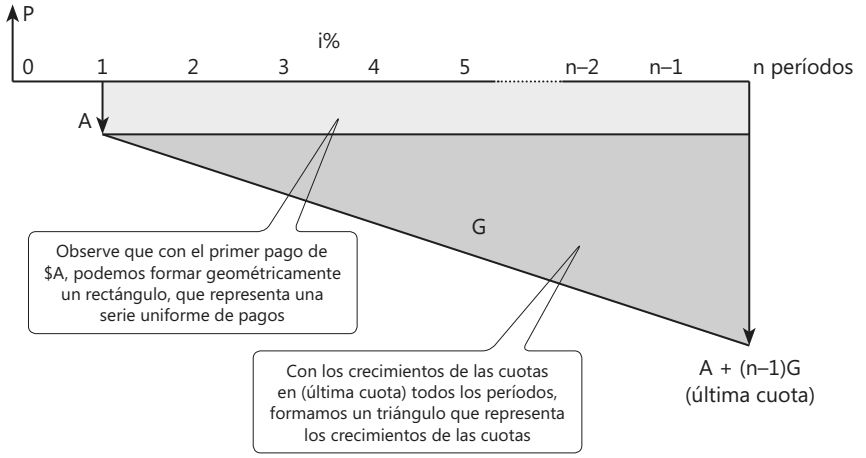
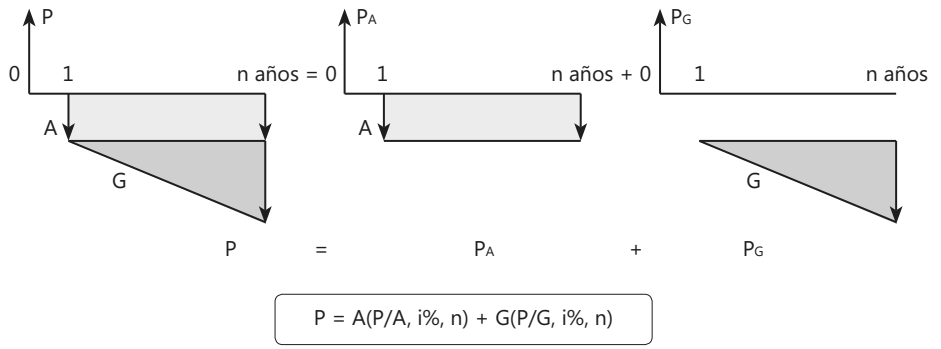


Gráfico 16 Flujo de un crédito (b).

Geométricamente, el área total del trapecio (formado por el flujo de caja) es igual a la suma de las áreas del rectángulo y del triángulo.

Vamos a separar estas dos áreas:



Conclusión: para calcular el valor presente de un *gradiente aritmético creciente* lo hacemos separando la serie gradiente en dos partes: la serie uniforme, A, formada por la primera cuota o primer flujo, la transformamos en valor presente utilizando el factor (P/A, i%, n), y los crecimientos (gradientes) los transformamos en valor presente utilizando el factor (P/G, i%,n).

Recordemos que el V.P. de una serie uniforme tiene por fórmula (ver capítulo 3):

$$P = A\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n};\ P = A\ (P/A, I\%, n)$$

El valor presente de un gradiente aritmético tiene por fórmula:

FÓRMULA:

$$P = G\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

Presentación del factor:

Pg = G(P/G; í%; n)

Nota: El primer crecimiento está en el segundo período y el último en el período *n*. El *P* de esta serie quedará ubicado dos períodos antes del primer gradiente (en este caso en el período cero) y se logrará mediante la fórmula anterior.

Por lo tanto, el valor presente total del flujo presentado en la gráfica anterior será:

$$P = P_A + P_g$$

$$P = \left\{A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} + G\frac{1}{i}\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]\right\}$$

P = {A (P/A, i, n) + G (P/g, i, n)}

Nota: Tanto el valor presente que corresponde a la serie *A* como el del gradiente *G*, son coincidentes en el mismo período, y por ello es posible sumarlos.

Nota importante: Las dos fórmulas: P/A y P/G, que se utilizan, se deben encerrar entre dos signos de agrupación por ser ellas partes separadas de un solo flujo (gradiente aritmético), pero que matemáticamente deben hacer los mismos recorridos a través del tiempo, cuando sus valores sean llevados de un período a otro.

Nota recordatoria (ver capítulo 3): Para el cálculo del valor de *n*, que se utilizará en la fórmula de cualquier serie, se hace la siguiente operación: número del período donde está la última cuota menos el período donde está el *P* (el presente *P* de cualquier serie se ubica un período antes de la primera cuota).

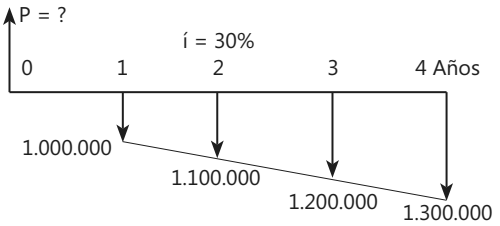
Problema 3

Se desea hacer un crédito a cuatro años y a una tasa de 2,5% mensual. El primer pago, dentro de un año, será de $1.000.000, y en cada año posterior las cuotas se incrementarán en $100.000. ¿Cuál puede ser el valor del crédito?

Haga un cuadro de pagos.

n = 4
i = 30% años
G = $100.000
Primera cuota (A) = 1.000.000

Tasa anual: 30% anual E.



Verifique que la última cuota se calcule así: U = A + g (n – 1)

U = 1.000.000 + 100.000 (4 – 1) = 1.300.000

Primer crecimiento (o gradiente: 100.000) está en el segundo año y el P de un gradiente aritmético queda dos períodos antes del período donde está el primer G (en el período cero en este caso).

Aplicando la formula anterior:

P = 1.000.000 (P/A, 30%, 4) + 100.000 (P/g, 30%, 4)
P = 1.000.000 x 2,166241 + 100.000 x 2,552432
P = 2.421.484

Valor del factor (P/g, 30%, 4)

El valor del factor del gradiente se obtuvo utilizando la fórmula del presente:

$$P = G\,\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] \quad P_G = 1\,\frac{1}{0.30}\left[\frac{(1+0.30)^4 - 1}{0.30(1+0.30)^4} - \frac{4}{(1+0.30)^4}\right] \quad P_G = 2,552432$$

Para encontrar el valor de PG, le dimos el valor a G = 1

Cuota No.	Valor cuota	Interés	Amortización	Saldo
0	0	0	0	2.421.484
1	1.000.000	726.445	273.555	2.147.929
2	1.100.000	644.379	455.621	1.692.308
3	1.200.000	507.692	692.308	1.000.000
4	1.300.000	300.000	1.000.000	0

Cuadro de pagos

Con base en el problema anterior, asumamos que desconocemos el valor del incremento de las cuotas. Su cálculo sería:

2.421.484 = 1.000.000 (P/A, 30%, 4) + G (P/g, 30%, 4)
2.421.484 = 1.000.000 x (2,166241) + G x (2,552432)
Despejando a G obtendríamos:
G = 100.000

PROGRAMACIÓN DE LA CALCULADORA FINANCIERA

Ni las calculadoras financieras ni Excel tienen el programa para calcular en forma directa el *factor del gradiente*: PG = G (P/G; i%, n).

Vamos a elaborar el programa y a programar la calculadora *Hewlett Packard 19 BII* o *17B II* para este caso.

Inicialmente le damos una presentación algebraica diferente a la fórmula para simplificar los pasos en el programa.

$$P = G\,\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] \longrightarrow P/G = G\left[\frac{(1+i)^n - 1 - in}{i^2(1+i)^n}\right]$$

Calculadora:

FIN	COM	SUMA	CALEN	RESOL	TEXTO

↑ Clic

Programa: en un renglón en blanco de la vista de la pantalla que nos muestre la calculadora escribimos el siguiente programa:

P/G = G x (((1+i%) ^ n) -1 - (i% x n)) ÷ ((i%^2) x (1+i%)^n)

Luego hacemos clic en CALC (calcular). La calculadora verifica la fórmula, y si está correctamente escrita aparece el siguiente menú, y en él escribimos los datos de la fórmula:

P/G	G	I%	N

Digitamos 1 y clic en G, 30% y clic en I%, 4 y clic en N; luego hacemos clic en P/G y aparece el valor del factor antes calculado con la fórmula:

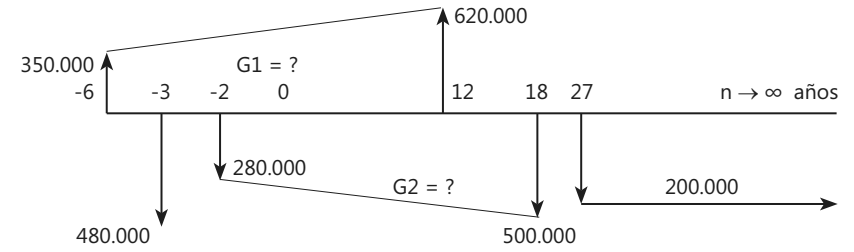
2,552432.

Si deseamos que la calculadora multiplique el factor por el valor de G, digitamos el valor de G y hacemos clic en el G del menú y el valor que veremos será:

100.000 x 2.552432 = 255.243,20

Problema 4

Calcular el valor presente del siguiente flujo de caja. La tasa del 10,5% anual E.



Antes de formular la ecuación de valor presente, debemos calcular los valores de G1 y G2. Utilizamos la fórmula de última cuota:

Última cuota = A + (n - 1) G

Para G1: 620.000 = 350.000 + (19 - 1) G1 G1 = 15.000

Para G2: -500.000 = -280.000 + (21 -1) G2 G2 = 11.000

Se usan signos negativos (-) por ser egresos.

El valor presente se fórmula en el período cero: P = Ingresos - Egresos P = I – E

P = {350.000(P/A, 10.5%, 19) + 15.000(P/G, 10.5%, 19)} (F/P, 10,5%, 7) – 480.000(F/P, 10.5%, 3)
8,09515 49,95226 2,01157 1,34923

- {280.000(P/A, 10,5%, 21) + 11.000(P/G, 10,5%, 21)} (F/P, 10,5%, 3) - (200.000/0,105)(P/F, 10,5%, 26)
8,35376 54,98869 1,34923 0,07457

P = $2.444.919

Problema 5

Una fábrica tiene costos fijos de $600.000 mensuales (haya o no producción), y costos variables de $150 por unidad. Durante los primeros seis meses no hay producción porque este tiempo se dedicará a pruebas y ajustes.

En el séptimo mes se iniciará la producción con 300 unidades, y cada mes la producción aumentará en 200 unidades hasta llegar a un tope de 2.500 al mes. A partir de este momento permanecerá constante.

Si se espera vender la fábrica al final del tercer año, ¿cuál es el costo total de la producción en estos tres años en pesos de hoy?

Asuma una tasa de interés del 36% anual M.V.

Costos fijos durante los 36 meses = $600.000 cada uno.

Costos variables	Mes 7	300 x 150 = $ 45.000
	Mes 8	500 x 150 = $ 75.000
	Mes 9	700 x 150 = $105.000
	Mes 10	900 x 150 = $135.000
	Mes 11	1.100 x 150 = $165.000
	Mes 12	1.300 x 150 = $195.000
	Mes 13	1.500 x 150 = $225.000
	Mes 14	1.700 x 150 = $255.000
	Mes 15	1.900 x 150 = $285.000
	Mes 16	2.100 x 150 = $315.000
	Mes 17	2.300 x 150 = $345.000
	Mes 18	2.500 x 150 = $375.000
Valor del gradiente = $30.000		
Costo del mes 19 en adelante = $375.000		

Ecuación del último pago para la producción de unidades

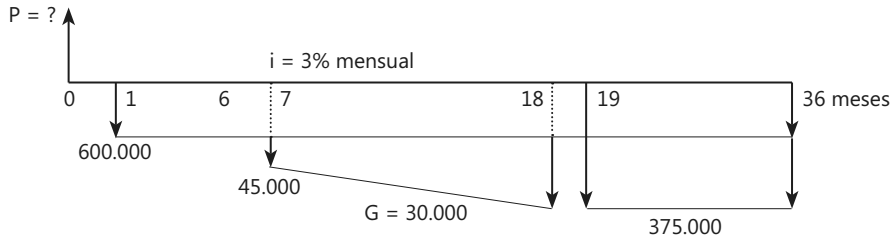
U = A + (n - 1) G

2.500 = 300 + (n - 1) 200

n = ((2.500 - 300)/200) + 1

n = 12 meses (la producción se estabiliza en el mes 18)

Mes 18: 2500 x 150 = $375.000 De este mes en adelante el costo es constante hasta el mes 36. Valor del gradiente: G = $30.000



P = 600.000(P/A, 3%, 36) + {45.000 (P/A, 3%, 12) + 30.000 (P/G, 3%, 12)} (P/F, 3%, 6) +
(21,83225) (9.954) (51.24818) (0.83748)
375.000(P/A; 3%, 18) (P/F, 3%, 18)
(13.75351) (0.58739)
P = $ 17.791.600

Mes	Produc.	Costo total	Mes	Produc.	Costo total	Mes	Produc.	Costo total
1	0	600000	13	1500	825000	25	2500	975000
2	0	600000	14	1700	855000	26	2500	975000
3	0	600000	15	1900	885000	27	2500	975000
4	0	600000	16	2100	915000	28	2500	975000
5	0	600000	17	2300	945000	29	2500	975000
6	0	600000	18	2500	975000	30	2500	975000
7	300	645000	19	2500	975000	31	2500	975000
8	500	675000	20	2500	975000	32	2500	975000
9	700	705000	21	2500	975000	33	2500	975000
10	900	735000	22	2500	975000	34	2500	975000
11	1100	765000	23	2500	975000	35	2500	975000
12	1300	795000	24	2500	975000	36	2500	975000

Cuadro de costos totales CT = Costo fijo + Costo variable total

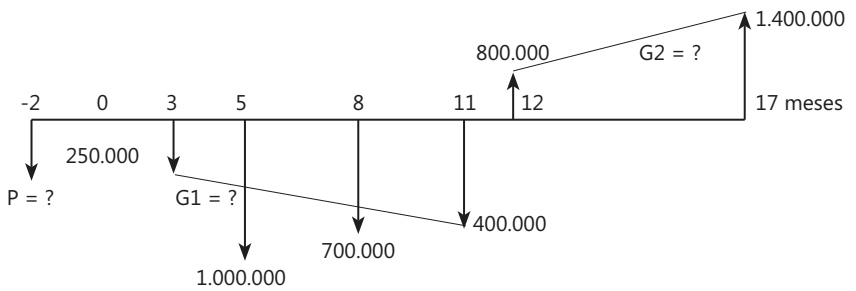
Problema 6

Un estudiante necesita disponer de dinero para asegurar su permanencia en el exterior durante seis meses. Con este fin, hace dos meses abrió una cuenta con cierta cantidad y planea hacer depósitos mensuales, e inicia dentro de tres meses con $250.000, pero cada mes aumentará el depósito en cierta cantidad de pesos. En total hará nueve depósitos. El último depósito mensual será de $400.000 Además, en el quinto y octavo mes depositará $1.000.000 y $700.000, respectivamente. El dinero acumulado lo retirará cada mes, e iniciará dentro de un año, pero cada vez el retiro debe ser mayor al anterior. El primer retiro será de $800.000, y el último será de $1.400.000. Si la tasa financiera es del 30,4518% anual E, ¿cuál debe ser el incremento de los depósitos, el incremento de los retiros y cuál el depósito inicial?

Solución:

Primero transformamos la tasa anual a mensual

Tasa = 30,4518% anual E. i% = 2,24% mensual



Para calcular los incrementos de los depósitos, G1, y de los retiros, G2, utilizamos la fórmula de la última cuota.

Última cuota U = A + (n - 1) G

G1 = ? - 400.000 = - 250.000 + (9 - 1) G1 → G1 = 18.750

G2 = ? 1.400.000 = 800.000 + (6 -1) G2 → G2 = 120.000

Formulamos la ecuación de equilibrio: Ingresos = Egresos I = E

Retiros llevados al período cero:

P (retiros) = {800.000(P/A, 2,24%, 6) + 120.000(P/G, 2,24%, 6)} (P/F, 2,24%, 11)

P (retiros) = $4.756.433

Depósitos llevados al período cero:

P (depósitos) = P(F/P, 2,24%, 2) + {250.000(P/A, 2,24%, 9) + 18.750(P/G, 2,24%, 9)} (P/F, 2,24%, 2) + 1.000.000 (P/F, 2,24%, 5) + 700.000 (P/F, 2,24%, 8)

P (depósitos) = 1,0453 P + 3.969.042

I = E 4.756.433 = 1,0453 P + 3.969.042 → P = $753.267

Verificación con un cuadro de pagos elaborado en Excel.

n	Saldo	Depósito	Dep. extra	Interés	Retiro
-2	753.267	753.267			
-1	770.140			16.873	
0	787.391			17.251	
1	805.029	0	0	17.638	0
2	823.061	0	0	18.033	0
3	1.091.498	250.000	0	18.437	0
4	1.384.698	268.750	0	24.450	0
5	2.703.215	287.500	1.000.000	31.017	0
6	3.070.017	306.250	0	60.552	0
7	3.43.785	325.000	0	68.768	0
8	4.585.124	343.750	700.000	77.589	0
9	5.050.331	362.500		102.707	0
10	5.544.708	381.250		113.127	0
11	6.068.910	400.000		124.201	0
12	5.404.853			135.944	800.000
13	4.605.922			121.069	920.000
14	3.669.095			103.173	1.040.000
15	2.591.282			82.188	1.160.000
16	1.369.327			58.045	1.280.000
17	0			30.673	1.400.000

Problema 7

Un ingeniero mecánico está planeando comprar equipos para montar un taller propio. Por medio de una investigación de mercado de servicios, predice que si hace una inversión de 40.000 dólares podrá obtener ingresos brutos anuales de 65.000 dólares el primer año, pero cada año estos ingresos deben aumentar en 6.000 dólares cada vez, con gastos anuales de 11.200 dólares por concepto de mantenimiento y combustibles y lubricantes. Los impuestos serán en promedio de 1.200 dólares semestrales. Considera que los equipos los utilizará durante cuatro años, con el 70% de recuperación al venderlos. Planea fijarse un salario mensual de cierta cantidad con incrementos de 50 dólares mensuales.

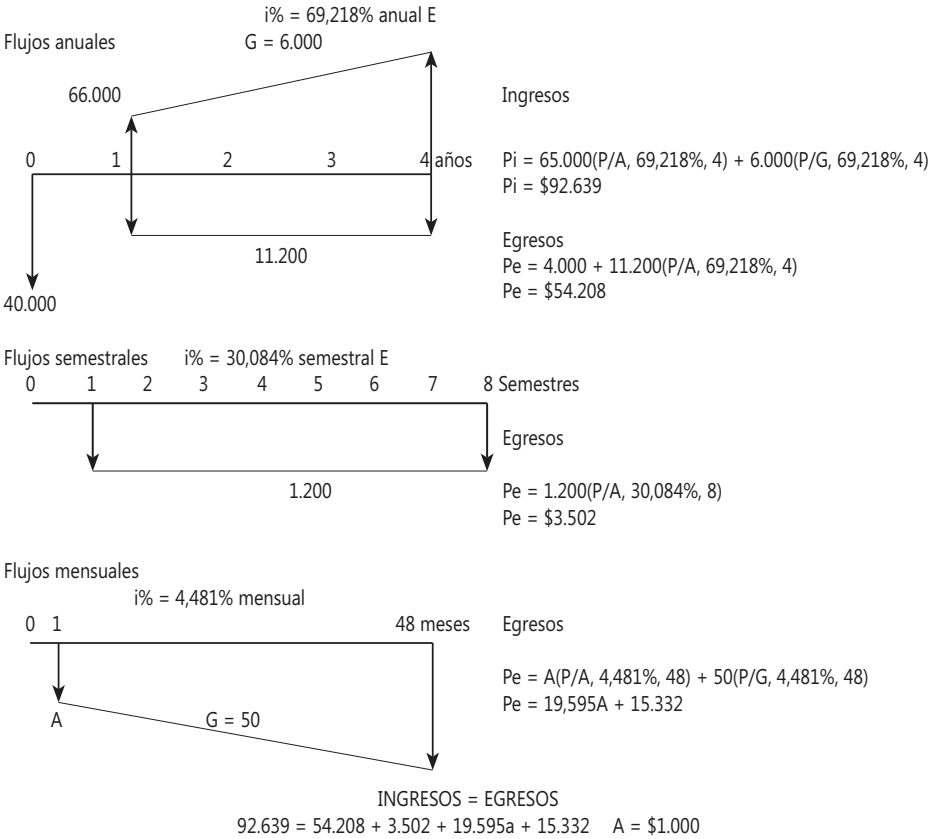
Si la tasa financiera es del 4,481% mensual, ¿cuál es el valor de su primer salario mensual en este proyecto?

Solución:

Los períodos de pagos son mensuales, semestrales y anuales. Primero debemos convertir la tasa financiera para estos períodos:

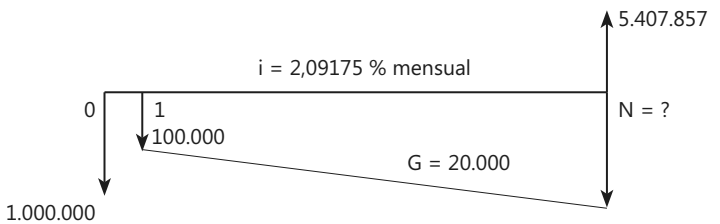
i% = 4,481% mensual → 30,084% semestral E → 69,218% anual E.

Diagramas para cada tipo de período:



Problema 8

Hoy se abre una cuenta de ahorros con $1.000.000. Cada mes posterior se ahorrarán $100.000, pero también, cada mes, estos depósitos se incrementarán en $20.000. Se pretende acumular una cantidad de $5.407.857. ¿A los cuántos meses habrá acumulado este dinero, si la tasa que le reconoce el banco es del 2,09175% mensual?



1.000.000 + 100.000(P/A; 2,09175%; N) + 20.000(P/G; 2,09175%; N) = 5.407.857(P/F; 2,09175%; N)

Con esta ecuación se hacen los ensayos de prueba y error:

Si N = 14 meses: 1.000.000 + 100.000(12,02844) + 20.000(74,14415) ≠ 5.407.857 (0,74840)
3.685.827 ≠ 4.047.240 e = 361.413

Si N = 16 meses: 1.000.000 + 100.000(13,47954) + 20.000(95,17763) ≠ 5.407.857 (0,71804)
4.251.507 ≠ 3.883.058 e = -368.449

Para un N = 14 → el error es = 361.413

Dif. 361.413

error es = 0

Dif. 729.862

Para un N = 16 → el error es = -368.449

Para un ΔN = 2	hay una dif. de 729.862
?	Para una dif. de 361.413

? = 0,99 → N = 14 + 0.99 = 15 meses

Programa para la calculadora *Hewlett Packard 19B* (vamos a hacer un programa genérico utilizable con diferentes valores):

Sea: P: Ahorro inicial (apertura de la cuenta)
A: Primer ahorro (período uno)
G: Crecimiento o decrecimiento aritmético de los ahorros.
F: Valor acumulado
i: Tasa de interés del período
N: Número de períodos

$$P + A\left(\frac{(1+i)^N - 1}{i(1+i)^N}\right) + G\frac{1}{i}\left(\frac{(1+i)^N - 1}{i(1+i)^N} - \frac{N}{(1+i)^N}\right) = \frac{F}{(1+i)^N}$$

Multiplicando toda la ecuación por i^2 y simplificando obtenemos:

$$P(1+i)^N + A\left(\frac{(1+i)^N - 1}{i}\right) + G\left(\frac{(1+i)^{N-1}}{i^2} - \frac{N}{i}\right) = F$$

Multiplicando toda la ecuación por y simplificando:

$$P(1+i)^N i^2 + Ai\left((1+i)^N - 1\right) + G\left(\left((1+i)^N - 1\right) - iN\right) = Fi^2$$

Programa:

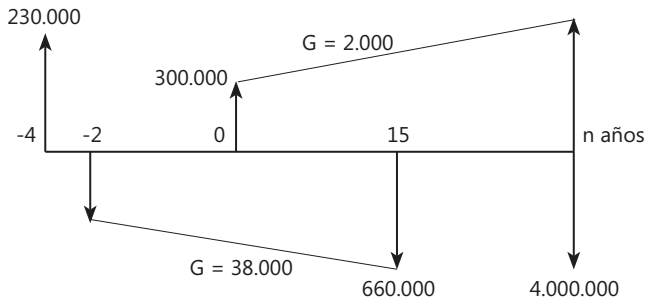
P * (((1+i) ∧ N)*(i ∧ 2)) + A * i * (((1+i) ∧ N) –1) + G * ((((1+i) ∧ N) – 1) * (i *N)) = F * (i ∧ 2)

Al introducir los valores correspondientes en la calculadora se obtiene N = 15 meses

Vea los problemas con gradientes resueltos en Excel en el complemento virtual al libro.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular el valor de *n* del siguiente flujo de caja para que los ingresos sean iguales a los egresos. Tasa financiera del 8,5% anual E.

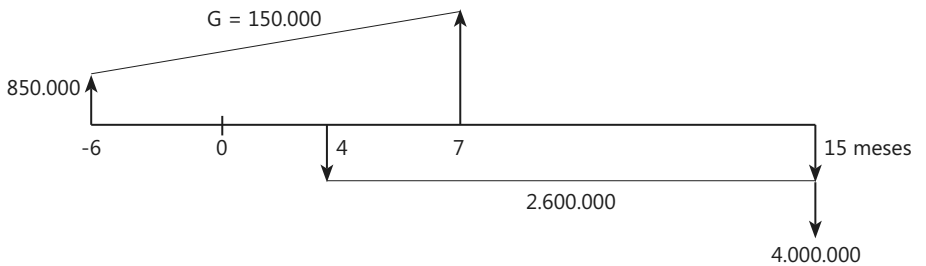


Respuesta: 21,15 años.

2. Para financiar las cinco matrículas semestrales de una especialización, hace un año abrí una cuenta de ahorros con $2.100.000. A partir de hoy, y durante cuatro semestres (total cuatro depósitos), depositaré $500.000 e incrementos semestrales de $100.000 cada vez. La especialización la iniciaré dentro de tres años, que es cuando debo pagar la primera matrícula semestral. Cada matrícula subirá en cada semestre $150.000. La tasa financiera es del 11,44% anual C.S. ¿Cuál es el valor de las matrículas?

Respuestas: $1.184.584; $1.334.584; $1.484.584; $1.634.584; $1.784.584.

3. En el siguiente flujo de caja, calcule el valor de i% para que los ingresos sean iguales a los egresos.



Respuesta: i% = 3,93% mensual; 58,81% anual E.

4. Un técnico en ebanistería está planeando montar su propio taller. Gracias a su experiencia, predice que si compra maquinaria y equipo por valor de $30.000.000 podrá obtener ingresos uniformes mensuales de $7.000.000, con gastos semestrales de $2.500.000 el primer semestre, por conceptos de mante-

nimiento, combustibles, imprevistos, impuestos, etcétera. Pero en cada semestre posterior estos gastos aumentarán $250.000. Así mismo, planea fijarse un salario promedio trimestral equivalente de $5.800.000. Considera que el taller en esas condiciones le durará 6 años, al cabo de los cuales lo podrá vender por el 30% de su costo inicial. A una tasa del 15% anual E, ¿es rentable este taller?

Respuestas: Tasas equivalentes en los diferentes períodos: tasa anual = 15% anual E; mensual = 1,1715%; trimestral E = 3,5558% y semestral E = 7,2380%. V.P. del proyecto = $191.719.309. Es rentable.

5. El proyecto de montaje de una fábrica contempla el siguiente flujo de caja: maquinaria y equipos por US$35.000; gastos de mano de obra por US$1.200 mensuales, hasta el final de la vida útil, que es de cinco años, al cabo de los cuales podrá vender la fábrica por el 50% del valor de adquisición. Los ingresos operacionales se contabilizarán semestralmente y se iniciarán dentro de un año con un valor de US$98.000. Cada semestre debe crecer US$7.000.

   A partir del quinto trimestre tendrá ingresos trimestrales no operacionales por valor de US$2.500, pero cada trimestre aumentará en US$1.200.

   La empresa debe hacer mantenimiento preventivo cada semestre por un valor de US$1800. Si la tasa financiera es del 19% anual efectiva, ¿cuál es el valor presente de esta inversión?

Respuestas: tasas en los diferentes períodos: tasa anual E = 19%; mensual = 1,4602%; trimestral E = 4,4448%; semestral E = 9,0871%.

Tenga en cuenta que el mantenimiento, aunque sea preventivo, se debe hacer al final del último semestre por la reventa que se hará en este período.

Valor presente del proyecto: $–679.674. Genera pérdidas. No es rentable.

6. Usted compra un apartamento por $50.000.000. Paga una cuota inicial del 25% y el saldo lo financian a cinco años. Los pagos los pacta así: cada tres meses debe pagar las cuotas ordinarias, las cuales se incrementarán a partir de la segunda en $100.000, trimestralmente.

   Al final del segundo y el cuarto año debe pagar cuotas extraordinarias (además de las ordinarias) de $14.000.000 y $18.000.000, respectivamente. Si la tasa financiera pactada fue del 19,8% anual E, ¿cuál será el valor de las cuotas ordinarias trimestrales en cada uno de los años?

Respuestas: Tasa trimestral E: 4,6200%

Cuotas trimestrales: $674.533; $774.533; $874.533; $974.533, etcétera.

TRANSFORMACIÓN DE UNA SERIE GRADIENTE CRECIENTE EN UNA SERIE UNIFORME

La serie gradiente anterior se transformó a un valor equivalente en valor presente. Sin embargo, en algunas ocasiones, es más conveniente transformarla en otra serie

uniforme, A, equivalente. Para ello sólo sería suficiente multiplicar el factor P_T (proveniente de $P_T = P_A + P_G$) por el factor A/P.

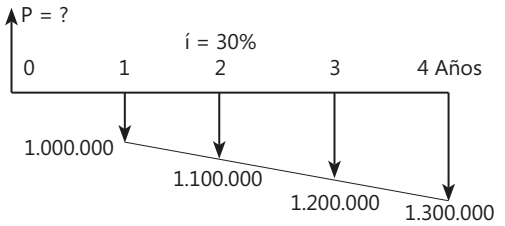
Tomemos el PROBLEMA 3 de este capítulo:

Se desea hacer un crédito a cuatro años y a una tasa de 30% anual. Si el primer pago dentro de un año será de $1.000.000, y en cada año posterior las cuotas se incrementarán en $100.000, ¿cuál puede ser el valor del crédito?

Haga un cuadro de pagos.

n = 4
i = 30% años
G = $100.000
Primera cuota (A) = 1.000.000

Tasa anual: 30% anual E.



En este problema tenía la siguiente ecuación:

$$\underbrace{P = 1.000.000(P/A, 30\%, 4)} + \underbrace{100.000(P/G, 30\%, 4)}$$

$$P = 2.166.240 \quad + \quad 255.243$$
$$P = 2.421484$$

Si quisiéramos transformar este valor en una serie uniforme equivalente, bastaría multiplicarla por el factor (A/P, i%, n): A = 2.421.484 (A/P, 30%, 4)

$$A = 2.421.484 \times 0,461629 = \$1.117.828 \text{ anuales.}$$

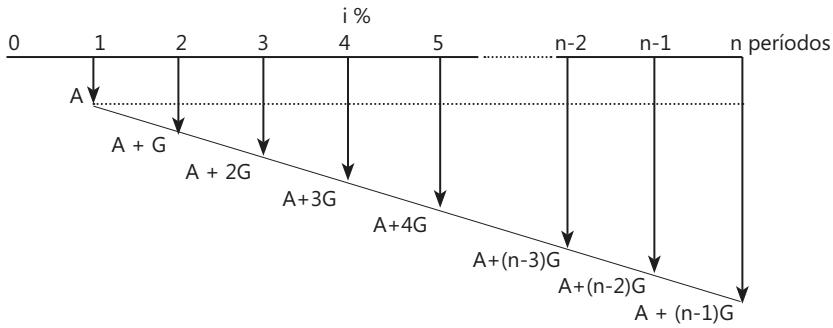
Este valor quiere decir que la serie gradiente (en este caso creciente) de pagos que se proyecta pagar para cubrir un crédito, tiene como alternativa pagar el mismo crédito otorgado hoy, por un valor de $2.421.484, con cuatro pagos iguales de $1.117.828, cada año.

n	Saldo	Interés	Cuota	Amortización
0	2.421.484			
1	2.030.101	726.445	1.117.828	391.383
2	1.521.304	609.030	1.117.828	508.798
3	859.867	456.391	1.117.828	661.437
4	0	257.960	1.117.828	859.868

Cuadro de pagos.

Un segundo método para llegar al mismo resultado, consiste en obtener, mediante deducción algebraica, una ecuación que realice más rápidamente la operación.

Nomenclatura:
A: Primera cuota
G: gradiante. Valor incremental de cada pago. Cantidad fija en pesos.



Observe que el primer pago es A; el segundo se incrementa en una cantidad constante de G pesos; el tercero también se incrementa en la misma cantidad constante G, y así sucesivamente. También debe tenerse en cuenta que, según el diagrama anterior, los pagos posteriores al primero tienen como base inicial el primer pago A. Explicación gráfica:

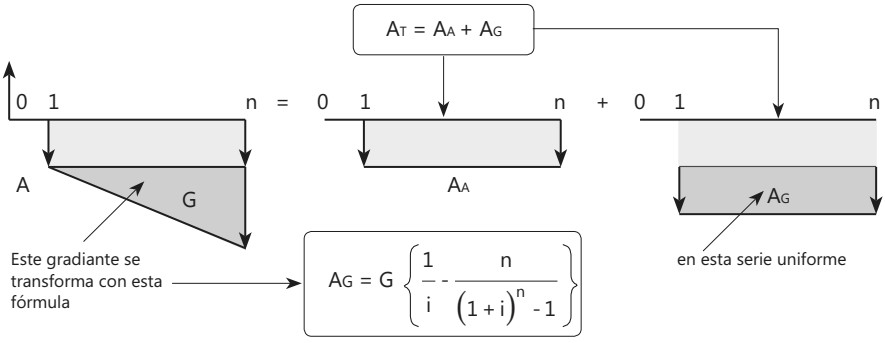


Gráfico 17 Transformación de un gradiente.

Por lo tanto, el valor anual proveniente del gradiente creciente será:

FÓRMULA:

$$A_T = A + G\left\{\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right\}$$

Factor:

$$A_T = A + G\ (A/G, i\%, n)$$

Resolviendo de nuevo el problema anterior y utilizando las fórmulas anteriores, obtendríamos:

A = 1.000.000 + 100.000 (A/G, 30%, 4) = 1.000.000 + 100.000 x 1,178277 = $1.117.828.

TALLER: Elaborar el programa para la calculadora *Hewlett Packard 19 BII* para calcular A/G.

Problema 9

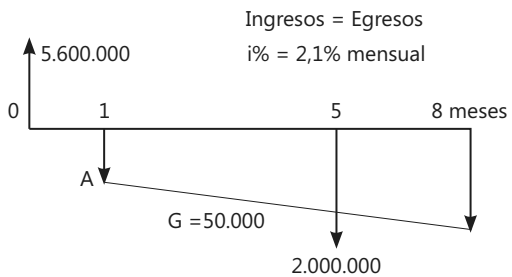
Aprovechando una promoción de temporada, un cliente compra varios electrodomésticos a crédito y por valor de $8.000.000. Le proponen dos planes de financiamiento:

a) Cuota inicial del 30%. El saldo restante lo financian a ocho meses a una tasa del 2,1% mensual. Las cuotas mensuales serán crecientes cada mes en $50.000. Además, deberá pagar una cuota extra adicional en la quinta cuota de $2.000.000.

b) Cuota inicial del 30%. El saldo restante lo financian a 8 meses a una tasa del 2,1% mensual. Las cuotas mensuales serán constantes. Además, deberá pagar una cuota extra adicional en la quinta cuota de $2.000.000.

¿Cuál es el valor de las cuotas mensuales en cada plan? Haga un cuadro de pagos para cada plan. Analice los resultados.

Plan 1 (primer método)



5.600.000 = A(P/A, 2,1%, 8) + 50.000(P/G, 2,1%, 8) + 2.000.000(P/F, 2,1%, 5)
7,2940 24,73357 7,2940
5.600.000 = 7,2940A + 1.236.678 + 1.802.600 → A = $351.071

Plan 1 (segundo método)

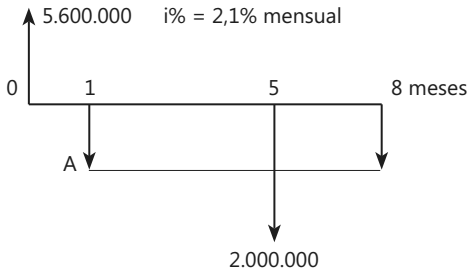
En la ecuación de Ingresos = Egresos, vamos a utilizar la conversión de un gradiente aritmético creciente en una serie uniforme, también debemos convertir el valor presente en una serie uniforme. La cuota extra debemos llevarla al presente o al futuro y lugo convertirla en una serie uniforme.

La cuota extra debemos llevarla al presente o al futuro y luego convertirla en una serie uniforme:

$$5.600.000\underset{0,1371}{(A/P\ 2,1\%,\ 8)} = A + 50.000\underset{3,3909}{(A/G,\ 2,1\%,\ 8)} + 2.000.000\underset{0,9013}{(P/F,\ 2,1\%,\ 5)}\underset{0,1371}{(A/P,\ 2,1\%,\ 8)}$$

$$767.760 = A + 169.545 + 247.136 \rightarrow A = \$351.071$$

Plan b) (Resolvemos utilizando la fórmula serie uniforme)



$$5.600.000 = A\underset{7,2940}{(P/A,\ 2,1\%,\ 8)} + 2.000.000\underset{7,2940}{(P/F,\ 2,1\%,\ 5)}$$

5.600.000 = 7,2940A + 1.802.600A = $520.620 cuotas constantes durante todo el crédito

PLAN 1. CUOTAS CRECIENTES					
n	Saldo	Interés	Cuota	Extra	Amortización
0	5.600.000				
1	5.366.529	117.600	351.071		233.471
2	5.078.156	112.697	401.071		288.374
3	4.733.726	106.641	451.071		344.429
4	4.332.064	99.408	501.071		401.662
5	1.871.967	90.973	551.071	2.000.000	2.460.097
6	1.310.207	39.311	601.071		561.759
7	686.651	27.514	651.071		623.556
8	0	14.420	701.071		686.651

PLAN 2. CUOTAS CONSTANTES					
n	Saldo	Interés	Cuota	Extra	Amortización
0	5.600.000				
1	5.196.980	117.600	520.620		403.020
2	4.785.497	109.137	520.620		411.483
3	4.365.372	100.495	520.620		420.125
4	3.936.425	91.673	520.620		428.947
5	1.498.470	82.665	520.620	2.000.000	2.437.955
6	1.009.318	31.468	520.620		489.152
7	509.893	21.196	520.620		499.424
8	-19	10.708	520.620		509.912

Analice las cuotas en cada plan y obtenga conclusiones.

GRADIENTE ARITMÉTICO CRECIENTE INFINITO

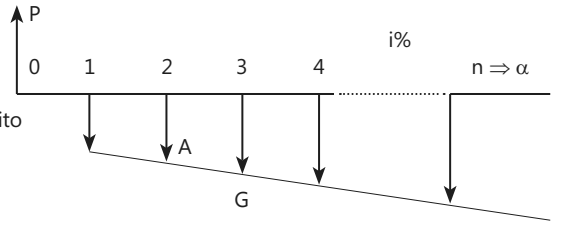
En las secciones anteriores se trató el caso de series uniformes (pagos o ingresos) por períodos (anualidades) finitos.

Las series no siempre son uniformes, como es el tema que estamos tratando con el gradiente creciente, pero además pueden involucrar vidas infinitas o perennes.

Vamos a tratar el caso de un gradiente creciente con vida infinita o perenne, y daremos la ecuación que lo transforma en su valor presente equivalente. Si la transformación necesaria fuese la equivalencia en una serie uniforme infinita, bas-

taría encontrar primero el valor presente y luego, mediante la ecuación A = P x i, encontraríamos la serie infinita.

P = valor presente
A = primer pago anual
G = crecimiento constante en pesos
i % = tasa de interés
n = número de períodos (tiende a infinito



En este caso, al igual que en el gradiente creciente pero finito, la transformación se debe hacer a su valor presente equivalente. Esta se hace en dos partes: el valor presente P_A de la serie *A*, y el valor presente del gradiente P_g.

$$P = \frac{A}{i} + \frac{G}{i^2}$$

Note que el primer sumando de la fórmula (A/i) corresponde al valor presente de una serie uniforme infinita.

Ejemplo:
En cierta actividad comercial se estima que se tendrán utilidades crecientes cada año. Si la utilidad del primer año será de $2.000.000, y cada año posterior se incrementa en una cantidad fija de $1.500.000, ¿cuál será el valor de todas las utilidades hoy (valor presente) a una tasa del 30% anual, si se considera una vida infinita?

$$P = \frac{2.000.000}{0.30} + \frac{1.500.000}{0.30^2} = \$23.333.333$$

GRADIENTE ARITMÉTICO DECRECIENTE. EQUIVALENCIA EN VALOR PRESENTE

Una serie con gradiente aritmético o lineal decreciente es una serie de pagos o de ingresos que decrecen o disminuyen en una cantidad uniforme en pesos en cada período. La cantidad constante que se disminuye en cada período se llama Gradiente.

Ejemplo:

Proyectar seis pagos mensuales decrecientes, empezando con un primer pago de $100.000, y a partir del segundo período y los sucesivos posteriores se diminuirán en $10.000, cada uno con respecto al anterior.

La serie propuesta para seis pagos sería: 100.000, 90.000, 80.000, 70.000, 60.000, 50.000. El gradiente es – 10.000 (G = -10.000)-

Veamos el ejemplo en un cuadro de cuotas:

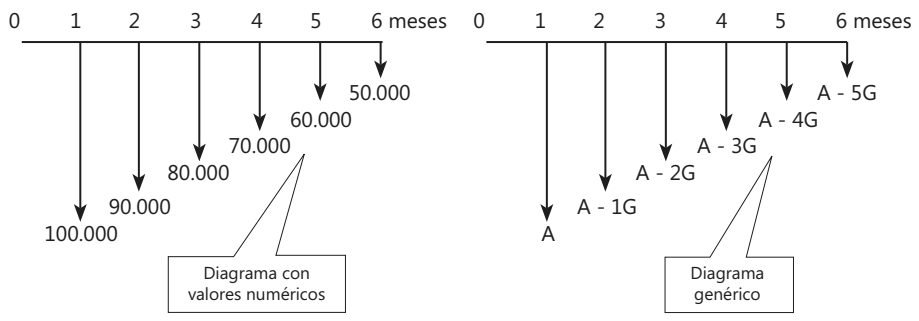
No. pago n	Valor de las cuotas	Otra forma de calcular los mismos valores	Si cambiamos los valores numéricos por valores literales
1	100.000	100.000	A
2	100.000 - 10.000 = 90.000	100.000 - 1 x 10.000 = 90.000	A - 1G
3	90.000 - 10.000 = 80.000	100.000 - 2 x 10.000 = 80.000	A - 2G
4	80.000 - 10.000 = 70.000	100.000 - 3 x 10.000 = 70.000	A - 3G
5	70.000 - 10.000 = 60.000	100.000 - 4 x 10.000 = 60.000	A - 4G
6	60.000 - 10.000 = 50.000	100.000 5 x 10.000 = 50.000	A - 5G

Primera cuota. Observe que forma una serie uniforme (A) en todos los períodos

Nro. del período menos uno (n – 1)

Gradiente

Representación gráfica de esta serie decreciente:



Problema tipo o modelo

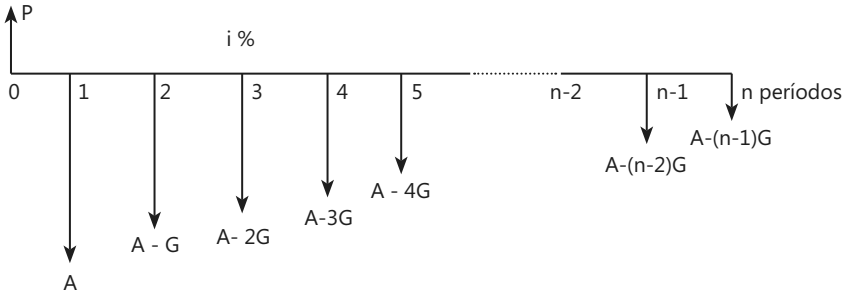
Se obtiene un crédito de $\$P$ a una tasa del i% anual y a n años, para pagarlo en cuotas anuales así: la primera cuota se pagará dentro de un año y tendrá un valor de $\$A$; cada cuota posterior se disminuirá en $\$G$ con respecto a la anterior. Elaborar el diagrama.

Nomenclatura:

P: Valor presente

A: Primera cuota

G: Gradiente. Decrecimiento de cada pago (cantidad fija en pesos)



Este caso es de mucha aplicación, especialmente en créditos hipotecarios para vivienda en UVR, cuando las cuotas deben ser decrecientes en unidades de valor real.

Observe que el primer pago es A; el segundo disminuye en una cantidad constante de *G* pesos; el tercero también disminuye en la misma cantidad constante *G*, con respecto al anterior, y así sucesivamente. También debe tenerse en cuenta que, según el diagrama anterior, los pagos posteriores al primero, tienen como base inicial el primer pago *A*.

Última cuota U = A - (n - 1) G
Despejando a G de esta ecuación es posible conocer el decrecimiento G
G = (A - U)/(n -1)

De acuerdo con esta secuencia de pagos, el último tendrá un valor de:

Análisis geométrico para el procedimiento:

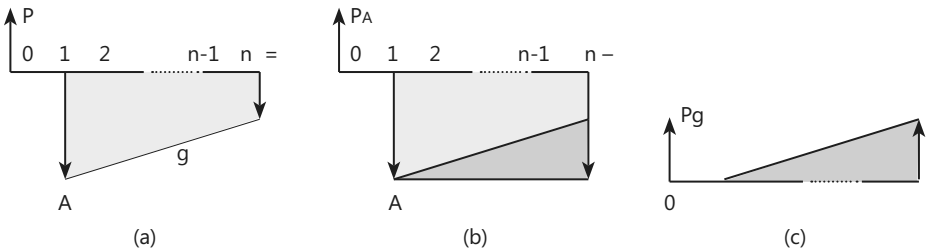


Gráfico 18 Crédito anual.

La figura a) tiene un área que corresponde a la de un trapecio (gradiente decreciente). Esta área se puede calcular por partes, como se indica en las figuras b) y c). La figura b) corresponde al área de un rectángulo que tiene por base a n (número de períodos) y por altura el primer pago A. Obviamente, esta área no corresponde al área original del trapecio, porque se le agregó el área del triángulo sombreado;

por lo tanto, es necesario restar esta adición, figura c), que es el área del triángulo que tiene por base n y por altura el último pago. Además, esto es equivalente a un gradiente creciente (caso anterior). Por lo tanto, el valor presente del gradiente decreciente será:

$$P = P_A - P_G$$

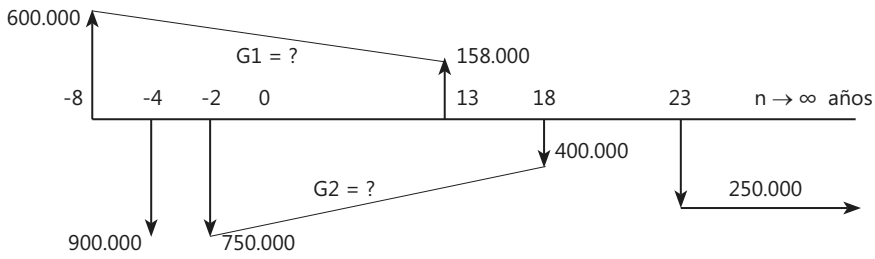
$$P = \{A(P/A, i, n) - G(P/G, i, n)\}$$

Las fórmulas serán iguales al caso de los gradientes crecientes, pero al presente de la serie se le resta el presente del gradiente.

$$P = \left\{ A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] - G \frac{1}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \right\}$$

Problema 10

Calcular el valor presente del siguiente flujo de caja. La tasa es del 17,9% anual E.



Primero calculemos los valores de G1 y G2 utilizando la fórmula de última cuota.

G1 = ? U = A - (n - 1) G 158.000 = 600.000 – (22 – 1) G1 G1 = 21.048
G2 = ? -4000.000 = -750.000 – (21 – 1) G2 G2 = -17.500

Los signos negativos (-) indican egresos

Presente = Ingresos – Egresos P = I - E

P = { 600.000(P/A, 17,9%, 22) – 21.048(P/G, 17,9%, 22) } (F/P, 17,9%, 9) – 900.000(F/P, 17,9%, 4)
5,43737 27,09339 4,40174 1,93221

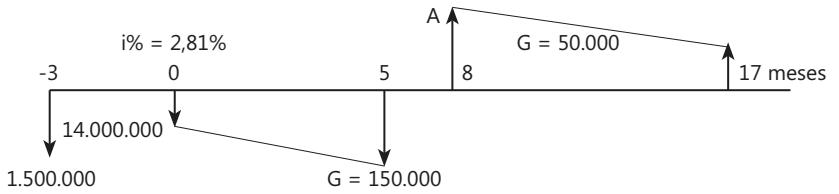
-{750.000(P/A, 17,9%, 21) – 17.500(P/G, 17,9%, 21)} (F/P,17,9%,3) – (250.000/0,179)(P/F, 17,9%, 22)
5,41066 26,53245 1,63886 0,02671

P = $-4.184.401,81

Problema 11

Hace tres meses abrí una cuenta con $1.500.000. Hoy iniciaré seis depósitos mensuales empezando con $1.400.000, pero cada mes posterior aumentaré el ahorro en $150.000. Dentro de ocho meses empezaré 10 retiros mensuales, e iniciaré con una cantidad no determinada, pero cada mes posterior disminuiré el retiro en $50.000 cada vez.

Si la tasa financiera es del 2,81% mensual, ¿cuál es el valor de los retiros?



Por ser problema de capitalización, formulamos la ecuación: Ingresos = Egresos.

{A (P/A, 2,81%, 10) – 50.000(P/G, 2,81%, 10)} (P/F, 2,81%, 7) = 1.500.000 (F/P, 2,81%, 3) + {1.400.000(P/A, 2,81%, 6) + 150.000(P/G, 2,81%, 6) }(F/P, 2,81%, 1)

Busque el valor de cada factor en la calculadora y realice las operaciones para encontrar el valor de A.

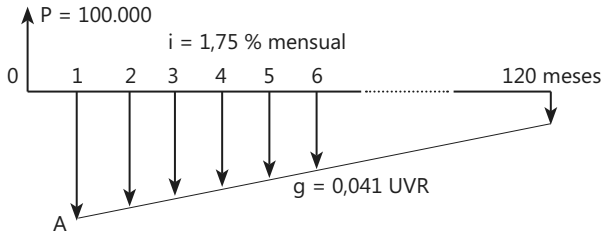
Respuesta: A = $1.835.980 primer retiro.

n	Depósito	Retiro	Interés	Saldo
-3	1.500.000			1.500.000
-2			42.150	1.542.150
-1			43.334	1.585.484
0	1.400.000		44.552	3.030.037
1	1.550.000		85.144	4.665.181
2	1.700.000		131.092	6.496.272
3	1.850.000		182.545	8.528.817
4	2.000.000		239.660	10.768.447
5	2.150.000		302.594	13.221.071
6			371.512	13.592.583
7			381.952	13.974.535
8		1.835.980	392.684	12.531.240
9		1.785.980	352.128	11.097.388
10		1.735.980	311.837	9.673.245
11		1.685.980	271.818	8.259.084
12		1.635.980	232.080	6.855.184
13		1.585.980	192.631	5.461.836
14		1.535.980	153.478	4.079.334
15		1.485.980	114.629	2.707.983
16		1.435.980	76.094	1.348.098
17		1.385.980	37.882	0

Problema 12

Los créditos de las CAV se hacen en UVR y las cuotas pueden ser decrecientes cada mes (puede ser una modalidad de crédito). Si se hace un crédito de 100.000 UVR a 10 años, pagaderos en cuotas mensuales decrecientes cada mes en 0,041 UVR y la tasa pactada es del 21% anual M.V., ¿cuál será el valor de la primera cuota en UVR?

P = 100.000 UVR
g = 0,041 UVR
n = 10 x 12 = 120 meses
Tasa mensual = 1,75%



100.000 = A (P/A, 1,75%, 120) – 0,041 (P/g, 1,75%, 120)

100.000 = A x 50,01709 - 0,041 x 2.003,026 Despejando a A obtenemos:

A = 2.000,96 UVR

Si suponemos que la UVR se cotizará a $120 dentro de un mes, el valor de la primera cuota será:

2.000,96 x 120 = $240.115

MANEJO DEL SIGNO DEL GRADIENTE

Cuando se quiere calcular: A, U o N usando la fórmula U = A ± (n – 1) G

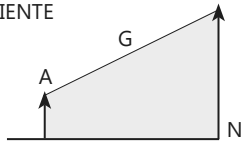
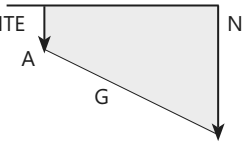
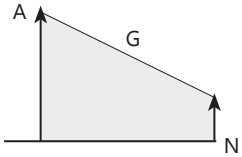
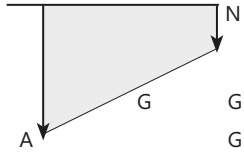
SI SE TRATA DE INGRESOS	SI SE TRATA DE EGRESOS
CRECIENTE  G > 0 G positivo	CRECIENTE  G < 0 G negativo
DECRECIENTE  G > 0 G positivo	DECRECIENTE  G < 0 G negativo

Gráfico 19 Representación del gradiente.

TALLER SOBRE GRADIENTES ARITMÉTICOS. CÁLCULO DE i% Y DE *n*

1. Una deuda de $13.442.153 se pretende pagar en cuotas mensuales así: dentro de dos meses se pagarán $4.000.000; a partir del cuarto mes se iniciarán cuotas mensuales, la primera será de $500.000, y cada mes aumentará la cuota en $40.000. Además de la última cuota mensual, en ese mes se pagará $1.000.000 adicional. Si la tasa mensual es del 2,3% mensual, ¿cuál es el plazo del crédito?

Solución utilizando Excel:

n	Saldo	Interés	Pagos	Amortización	
0	13.442.153				
1	13.751.323	309.170		-309.170	
2	10.067.603	316.280	4.000.000	3.683.720	
3	10.299.158	231.555		-231.555	
4	10.036.038	236.881	500.000	263.119	
5	9.726.867	230.829	540.000	309.171	
6	9.370.585	223.718	580.000	356.282	
7	8.966.109	215.523	620.000	404.477	
8	8.512.329	206.221	660.000	453.779	
9	8.008.113	195.784	700.000	504.216	
10	7.452.299	184.187	740.000	555.813	
11	6.843.702	171.403	780.000	608.597	
12	6.181.107	157.405	820.000	662.595	
13	5.463.273	142.165	860.000	717.835	
14	4.688.928	125.655	900.000	774.345	
15	3.856.774	107.845	940.000	832.155	
16	2.965.479	88.706	980.000	891.294	
17	2.013.685	68.206	1.020.000	951.794	
18	0	46.315	2.060.000	2.013.685	18 meses

Resolver el problema por pruebas de ensayo y error.

2. Hoy se abre una cuenta de ahorros con $1.000.000. Cada mes posterior se ahorrarán $100.000, pero también, cada mes, estos depósitos se incrementarán en $20.000. Se pretende acumular una cantidad de $5.000.000. ¿A los cuántos meses se habrá acumulado este dinero, si la tasa que le reconoce el banco es del 2,78% mensual?

Solución utilizando un cuadro de pagos: (ver cuadro página siguiente).

n	Saldo	Interés	Depósito
0	1.000.000		1.000.000
1	1.127.800	27.800	100.000
2	1.279.153	31.353	120.000
3	1.454.713	35.560	140.000
4	1.655.154	40.441	160.000
5	1.881.168	46.013	180.000
6	2.133.464	52.296	200.000
7	2.412.774	59.310	220.000
8	2.719.849	67.075	240.000
9	3.055.461	75.612	260.000
10	3.420.403	84.942	280.000
11	3.815.490	95.087	300.000
12	4.241.561	106.071	320.000
13	4.699.476	117.915	340.000
14	5.190.122	130.645	360.000

n	Saldo		
13	4.699.476	d = -300.524	d = -490.646
Δn = ?			
	5.000.000		
14	5.190.122		

Variación	de n	Hay una dif	
	1	-490.646	
	X	-300.524	
	X =	0,61250678	
	n =	13,6125068	meses

Resolver el problema por pruebas de ensayo y error.

3. Usted desea capitalizar sus ahorros para hacer uso de ellos en el futuro. Hoy abre una cuenta que le pagará el 29,76% anual M.V. La cuenta la abre con cierta cantidad. Sus depósitos serán así: primer depósito mensual lo hará en el cuarto mes, iniciando con $480.000, y cada mes posterior aumentará sus depósitos en $40.000. Hará un total de cinco depósitos mensuales. En el segundo y séptimo mes depositará, de manera adicional, $1.000.000 y $1.500.000, respectivamente. Del décimo al duodécimo mes hará retiros, que iniciará con $8.000.000, pero cada mes posterior disminuirá el retiro en $500.000. ¿Con cuánto debe abrir la cuenta y cuál es el cuadro de pagos?

Respuesta: $12.581.200

n	Saldo	Interés	Depósito	Dep. extra	Retiros
0	12.581.200		12.581.200		
1	12.893.214	312.014			
2	14.212.966	319.752		1.000.000	
3	14.565.447	352.482			
4	15.406.670	361.223	480.000		
5	16.308.756	382.085	520.000		
6	17.273.213	404.457	560.000		
7	19.801.589	428.376	600.000	1.500.000	
8	20.932.668	491.079	640.000		
9	21.451.798	519.130			
10	13.983.803	532.005			8.000.000
11	6.830.601	346.798			7.500.000
12	0	169.399			7.000.000

4. Se desea constituir un fondo para realizar un paseo de vacaciones. Para lograrlo, se abre una cuenta de ahorros con $500.000, y en cada uno de los meses posteriores se pretende ahorrar $100.000 el primer mes, y cada mes posterior se incrementarán estos ahorros en $30.000 mensuales cada vez. El paseo tendrá un costo de $4.500.000. ¿A los cuántos meses se podrá realizar? La tasa es del 2,50% mensual.

n	Saldo	Interés	Depósito
0	500.000		
1	612.500	12.500	100.000
2	757.813	15.313	130.000
3	936.758	18.945	160.000
4	1.150.177	23.419	190.000
5	1.398.931	28.754	220.000
6	1.683.904	34.973	250.000
7	2.006.002	42.098	280.000
8	2.366.152	50.150	310.000
9	2.765.306	59.154	340.000
10	3.204.439	69.133	370.000
11	3.684.550	80.111	400.000
12	4.206.663	92.114	430.000
13	4.500.000	105.167	188.170

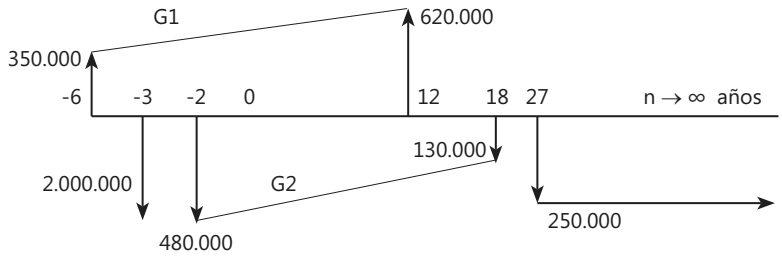
Respuesta: A los 13 meses, haciendo un depósito de $188.170 en el tredécimo mes.

5. Una persona desea comprar un automóvil que cuesta $18.000.000. Debe pagar una cuota inicial de $6.000.000 y el resto lo difiere para cancelar en cuotas mensuales así: el primer mes pagará $500.000 y cada mes posterior incrementará sus pagos en $30.000 cada vez; adicional a la última cuota, pagará $2.000.000. Si la tasa de interés es del 39,0681% anual C.M, ¿cuántas cuotas debe pagar?

n	Saldo	Interés	Cuota	Extra	Amortización
0	12.000.000				
1	11.890.681	390.681	500.000		109.319
2	11.747.802	387.122	530.000		142.878
3	11.570.272	382.470	560.000		177.530
4	11.356.963	376.690	590.000		213.310
5	11.106.708	369.746	620.000		250.254
6	10.818.306	361.598	650.000		288.402
7	10.490.515	352.209	680.000		327.791
8	10.122.052	341.537	710.000		368.463
9	9.711.593	329.541	740.000		410.459
10	9.257.770	316.178	770.000		453.822
11	8.759.173	301.403	800.000		498.597

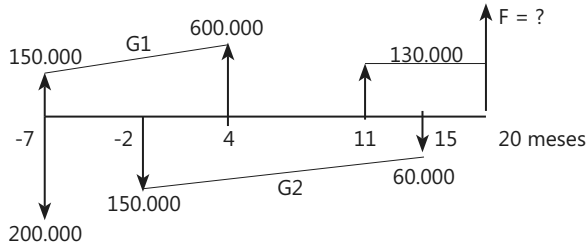
12	8.214.343	285.170	830.000		544.830
13	7.621.775	267.432	860.000		592.568
14	6.979.915	248.140	890.000		641.860
15	6.287.159	227.243	920.000		692.757
16	5.541.848	204.689	950.000		745.311
17	4.742.272	180.424	980.000		799.576
18	3.886.665	154.393	1.010.000		855.607
19	2.973.202	126.537	1.040.000		913.463
20	0	96.798	1.070.000	2.000.000	2.973.202

6. Calcular el valor presente del siguiente flujo de caja. La tasa es del 9,5% anual E.



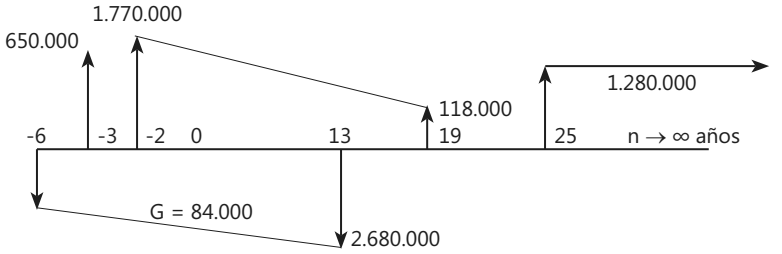
Respuesta: G (creciente): 15.000 G (decreciente): 17.500 V.P: $172.816.

7. Calcular el valor futuro en el vigésimo mes del siguiente flujo de caja. La tasa es del 2,8% mensual.



Respuesta: VP = 2.802.134; VF en periodo 20 = $6.071.502 y no es ingreso, es depósito.

8. Calcular el valor presente del siguiente flujo de caja. La tasa es del 8,7% anual E.



Respuesta: $10.108.183

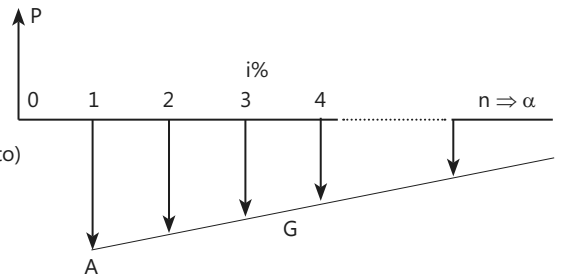
GRADIENTE ARITMÉTICO DECRECIENTE INFINITO

Al igual que el gradiente infinito creciente tratado anteriormente, puede presentarse un gradiente decreciente durante una vida infinita. Aunque su importancia práctica puede ser poca, podría, eventualmente, encontrarse casos de la vida real que hagan necesaria su aplicación.

Su tratamiento para transformarlo en su equivalente en valor presente sigue el mismo procedimiento que el desarrollado en el gradiente creciente normal, es decir, al valor presente de la serie uniforme A se le resta el valor presente proveniente del gradiente.

P = valor presente
A = primer pago anual
G = crecimiento constante en pesos
i = tasa de interés

n = número de períodos (tiende a infinito)



Utilizando la ecuación dada en el gradiente creciente, basta restar el valor presente del gradiente:

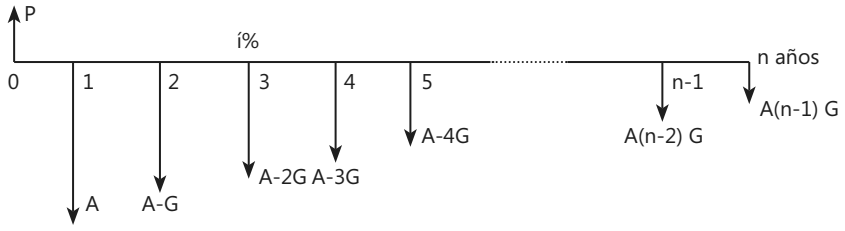
$$P = \frac{A}{i} - \frac{G}{i^2}$$

Es importante observar que en este caso la serie decreciente llegará necesariamente a un valor de cero. De ahí que con el aumento de *n* se limitará y no tendrá la

tendencia de infinita. Si no se limita el crecimiento de *n*, una vez la serie en el período enésimo tenga el valor de cero, de allí en adelante el flujo de caja tendrá signo contrario al de los períodos anteriores. Es decir, si se tenían egresos, después de alcanzar el egreso igual a cero (punto de equilibrio), los posteriores serán ingresos. Este caso se tratará más adelante como un gradiente que de decreciente pasa a creciente.

TRANSFORMACIÓN DEL GRADIENTE DECRECIENTE A UNA SERIE UNIFORME

Anteriormente se transformó una serie gradiente creciente en una serie uniforme equivalente. En este caso seguiremos el mismo procedimiento, con la diferencia de que a la serie formada por el primer pago, A, le restaremos la serie proveniente de la transformación del gradiente en serie.



El primer pago es A; el segundo se disminuye en una cantidad constante de G pesos; el tercero también se disminuye en la misma cantidad de G pesos, y así sucesivamente. Todos los pagos posteriores al primero tienen como base el primer pago A.

Explicación gráfica:

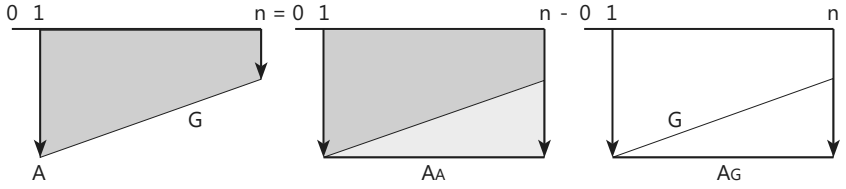


Gráfico 20 Transformación de un gradiente decreciente.

$$A_T = A_A - A_G$$

FÓRMULA:

$$A_T = A - G\left\{\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right\}$$

Factor:

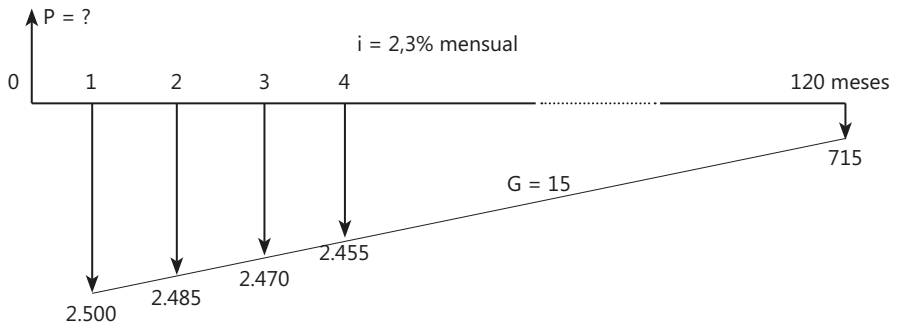
$$A_T = A - G\ (A/G,\ i\%,\ n)$$

Problema 13

Un préstamo para la compra de vivienda se pretende pagar en 120 meses, mediante cuotas en UVR y decrecientes cada mes en 15 UVR. La primera cuota será de 2.500 UVR. La tasa financiera es del 2,3% mensual.

a) Elabore el diagrama correspondiente.
b) ¿Cuál es el valor del préstamo?
c) Si le ofrecen cuotas constantes en UVR durante 120 meses, ¿cuál será su valor?

a)



Recuerde que la última cuota se calcula así:

Última = 2.500 - (120 - 1)1 5 = 715 UVR

b) P = 2.500 (P/A, 2,3%, 120) - 15(P/G, 2,3%, 120) = 2.500 x 40.63906 - 15 x 1.426,21155

P = 80.204,48 UVR

c) A = 2.500 - 15(A/G, 2,3%,120) = 2.500 - 15 x 35.0946 = 1.973,58 UVR mensuales

Como método alterno para calcular las cuotas uniformes mensuales y en UVR, podemos transformar el valor presente (préstamo) en una serie así:

A = 80.204,48 (A/P, 2,3 %,120) = 80.204,48 x 0,024607 = 1.973,58 UVR.

Este segundo método nos muestra que el uso de la fórmula anterior (A/G, i%, n) puede ser sustituida si se utiliza este procedimiento descrito.

Presentación del cuadro de pagos de la parte b) en Excel:

CUADRO DE PAGOS - AMORTIZACIÓN
Gradiante aritmético decreciente

Valor del préstamo en U.V.R.	80.204,477
Tasa de interés mensual	2,30%
Plazo total en meses	120
Decrecimiento de las cuotas en U.V.R.	-15

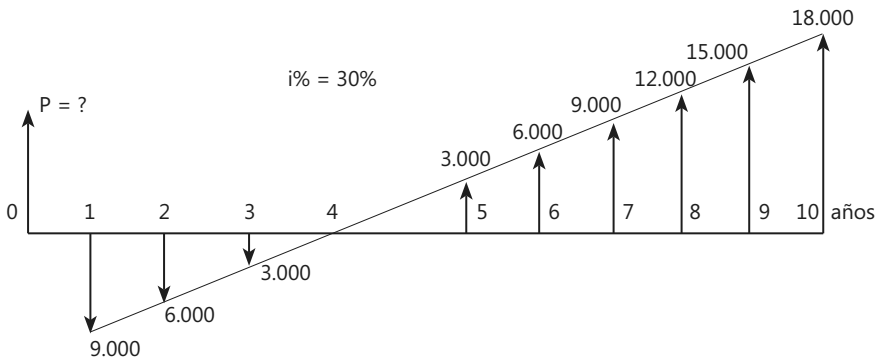
No. Período	Saldo de la deuda	Interés mensual	Valor de la cuota	Amortización
0	80.204,48			
1	79.549,18	1.844,70	2.500,00	655,30
2	78.893,81	1.829,63	2.485,00	655,37
3	78.238,37	1.814,56	2.470,00	655,44
4	77.582,85	1.799,48	2.455,00	655.52
5	76.927,26	1.784,41	2.440,00	655,59
6	76.271,58	1.769,33	2.425,00	655,67
7	75.615,83	1.754,25	2.410,00	655,75
17	69.053,44	1.603,33	2.260,00	656,67
18	68.396,67	1.588,23	2.245,00	656,77
19	67.739,79	1.573,12	2.230,00	656,88
23	65.111,18	1.512,68	2.170,00	657,32
24	64.453,73	1.497,56	2.155,00	657,44
25	63.796,17	1.482,44	2.140,00	657,56
58	42.006,43	981,41	1.645,00	663,59
59	41.342,58	966,15	1.630,00	663,85
60	40.678,46	950,88	1.615,00	664,12
61	40.014,06	935,60	1.600,00	664,40
62	39.349,39	920,32	1.585,00	664,68
63	38.684,42	905,04	1.570,00	664,96
82	25.985,68	613,12	1.285,00	671,88
83	25.313,35	597,67	1.270,00	672,33
86	23.293,54	551,25	1.225,00	673,75
87	22.619,29	535,75	1.210,00	674,25
117	2.093,64	64,16	760,00	695,84
118	1.396,80	48,15	745,00	696,85
119	698,92	32,13	730,00	697,87
120	0,00	16,08	715,00	698,92

CASO ESPECIAL DE LOS GRADIENTES ARITMÉTICOS DECRECIENTES

En el caso del gradiente decreciente infinito dijimos que la serie decreciente llegará necesariamente a un valor de cero, en la medida que aumente n. Una vez la serie llegue a valor de cero, en un periodo determinado, el flujo de caja cambiará de signo. Es decir, si se tenían egresos, después de alcanzar el egreso igual a cero, los posteriores serán ingresos.

Problema 14

Supongamos que una empresa pronostica que los primeros tres años de funcionamiento producirá pérdidas anuales decrecientes así: el primer año perderá $9.000; el segundo perderá $6.000; el tercero perderá $3.000; el cuarto estará en el punto de equilibrio, es decir, tendrá utilidades de $0.00; del quinto año en adelante empezará a ganar $3.000; el sexto ganará $6.000, y así sucesivamente hasta el décimo año. Asumamos una tasa del 30% anual E y calculemos el valor presente de estos rendimientos.



Primero verifiquemos mediante la fórmula de último pago (o ingreso) que el valor obtenido es correcto.

U = A ± (n – 1) G, en este tipo de flujo el G es negativo

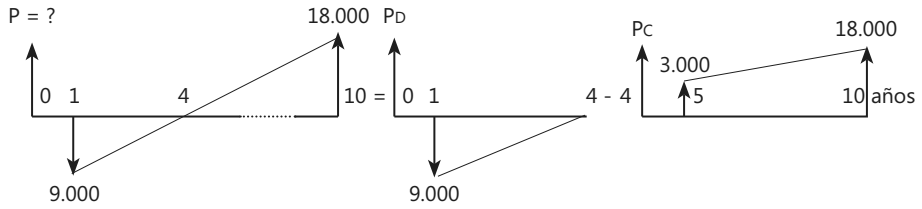
Último ingreso = A - (n-1) g = - 9.000 - (10 - 1) (- 3.000) = 18.000

Es importante notar que en este cálculo se manejó el gradiente como si fuera sólo uno. Aplicando el procedimiento para los gradientes decrecientes obtenemos:

P = 9.000 (P/A, 30% 10) - 3.000 (P/G, 30%, 10) = 9.000 x 3,091539 - 3.000 x 7,887193
P = $4,162

Para comprobar este resultado vamos a utilizar un método más largo, pero que es consistente con el manejo separado de los dos gradientes que se tienen

(uno decreciente hasta el cuarto año, y otro creciente desde el quinto hasta el décimo año).



P = PD - PC PD: Presente el gradiante decreciente
PC: Presente el gradiante creciente

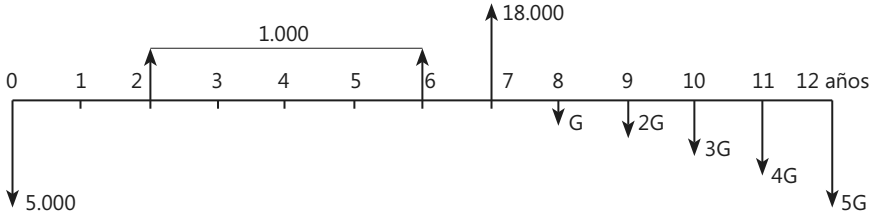
PD = 9.000 (P/A, 30%, 4) - 3.000 (P/G, 30%, 4) = 9.000 x 2,166241 - 3.000 x 2,552432
PD = 11.839

PC = {3.000 (P/A, 30 %, 6) + 3.000 (P/g, 30%, 6)} (P/F, 30%, 4)
PC = {3.000 x 2,642746 + 3.000 x 4,665629} (0,350128) = $ 7.677
P = 11.839 - 7.677 = $ 4.162

Problemas propuestos

Problema 15

Encuentre el valor de G en el siguiente diagrama que haría el flujo de ingresos equivalente al flujo de desembolsos, usando una tasa de interés del 18% anual E.



Respuesta: 1.257.95

Problema 16

Hoy se inician depósitos semestrales y durante seis años de $1.345.000. Al final de cada año usted depositará $990.000. Trimestralmente, empezando en el cuarto trimestre y hasta el final del cuarto año, depositará $300.000 la primera vez y cada trimestre aumentará el depósito en $60.000. Si la tasa pactada es del 27% anual E, ¿cuál será el saldo al final del sexto año?

Respuesta: $69.999.054

Problema 17

Taller El Torno compra una dobladora a crédito y queda debiendo $15.000.000 a una tasa de interés de un 18,5% anual C.M. El crédito lo pagará por medio de 13 pagos trimestrales, crecientes cada vez en $120.000; el primer pago sería hecho un año después de comprar la maquina. Además, al final del segundo y tercer año hará abonos extraordinarios adicionales de $2.200.000 y $1.700.000, respectivamente. ¿Cuál sería el monto del primer pago trimestral?

Respuesta: $855.549

PROBLEMAS CON GRADIENTES ARITMÉTICOS Y PERIODOS DIFERENTES

Problema 18

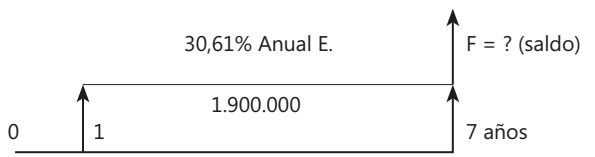
Durante siete años, y desde hoy, usted deposita la cantidad de $2.300.000 cada semestre. Al final de cada año usted retirará $1.900.000. Trimestralmente, empezando en el cuarto trimestre y hasta el final del cuarto año, depositará $200.000 la primera vez y cada trimestre aumentará el depósito en $60.000. Si la tasa pactada es del 27% anual capitalizable mensualmente, ¿cuál será el saldo al final del séptimo año?

Solución: Utilizamos diferentes diagramas de flujos.

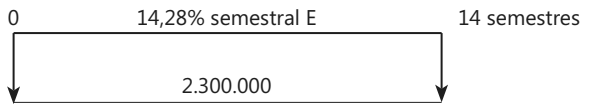
Un diagrama por cada período de pago.

Conversión de tasas: 27% Anual C.M. → 30,61% Anual E.
14,28% Semestral E.
6,90% Trimestral E

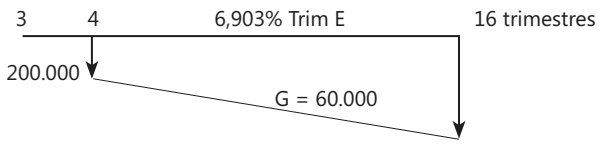
Períodos anuales:



Períodos semestrales:



Períodos trimestrales:



Ingresos llevados al período cero:

PI = 1.900.000(P/A, 30,61%, 7) + F(P/F, 30,61%, 7) = 5.249.806 + 0,1542F

Egresos llevados al periodo cero:

PE = 2.300.000 + 2.300.000(P/A,14,28%,14) + {200.000(P/A,6,90%,13) + 60.000(P/G, 6,90%, 13)} (P/F, 6,90%, 3) = 19.390.448
PI = PE 5.249.806 + 0,1542 F = 19.390.447
F = $91.703.249

Solución en Excel:

n	Saldo	Depósitos sem.	Depósitos trim.	Retiros	Interés
0	2.300.000	2.300.000			
1	2.458.769	0	0	0	158.769
2	4.928.498	2.300.000	0	0	169.729
3	5.268.712	0	0	0	340.214
4	6.232.411	2.300.000	200.000	1.900.000	363.699
5	6.922.635	0	260.000	0	430.223
6	10.020.504	2.300.000	320.000	0	477.869
7	11.092.219	0	380.000	0	691.715
8	12.697.915	2.300.000	440.000	1.900.000	765.696
9	14.074.452	0	500.000	0	876.537
10	17.906.012	2.300.000	560.000	0	971.559
11	19.762.064	0	620.000	0	1.236.052
12	22.206.239	2.300.000	680.000	1.900.000	1.364.175
13	24.479.136	0	740.000	0	1.532.897
14	29.268.931	2.300.000	800.000	0	1.689.795
15	32.149.365	0	860.000	0	2.020.434
16	35.688.636	2.300.000	920.000	1.900.000	2.219.271
17	38.152.222	0		0	2.463.587
18	43.085.870	2.300.000		0	2.633.648
19	46.060.088	0		0	2.974.218
20	49.639.615	2.300.000		1.900.000	3.179.528
21	53.066.238	0		0	3.426.623
22	59.029.400	2.300.000		0	3.663.162
23	63.104.200	0		0	4.074.800
24	67.860.283	2.300.000		1.900.000	4.356.083
25	72.544.678	0		0	4.684.395
26	79.852.437	2.300.000		0	5.007.759
27	85.364.651	0		0	5.512.214
28	91.657.373	2.300.000		1.900.000	5.892.722

La diferencia que se presenta en el valor futuro en la solución manual y la obtenida en Excel, se debe al manejo de los decimales en la calculadora. En la práctica, esta diferencia es despreciable por su monto.

Problema 19

Un individuo obtiene en préstamo $8.000.000 a una tasa de interés del 12% anual C.T., y desea reembolsar el dinero efectuando diez pagos semestrales decrecientes cada semestre en $100.000; el primer pago sería hecho dos años después de recibir el dinero. Además, al final del tercer año pagará una cuota adicional extra de $1.800.000 ¿Cuál sería el monto de los pagos semestrales?
Respuestas: 10 cuotas de: $1.499.229, $1.399.229, $1.299.229, $1.199.229, etc.

Problema 20

Un individuo obtiene en préstamo $16.000.000 a una tasa de interés del 23,5% anual C.M., y desea pagar el dinero efectuando 13 pagos trimestrales crecientes cada vez en $80.000; el primer pago sería hecho año y medio después de recibir el dinero. Además, al final del segundo y tercer año hará abonos extraordinarios adicionales de $2.500.000 y $3.000.000, respectivamente. ¿Cuál sería el monto de los tres primeros pagos trimestrales?
Respuesta: Tasa: 5,9908% Trimestral E; Cuotas (3): $1.538.423, $1.618.423 y $1.698.423.

Problema 21

Hace seis meses abrí una cuenta de ahorros con $2.000.000. Hoy iniciaré 12 depósitos mensuales, y lo empezaré con cierta cantidad, pero cada mes aumentaré el depósito en $30.000. Dentro de dos años haré un primer retiro de $3.000.000 y un semestre más tarde retiraré el resto del dinero que será de $4.000.000. Calcular el valor del primer depósito hoy si la tasa financiera es del 23% anual efectiva.
Respuesta: $37.702

Problema 22

Juan necesita disponer de dinero para pagar una deuda dentro de cierto tiempo. Para tal efecto, inicia hoy una cuenta de ahorros con $200.000 en una entidad financiera que le reconoce una tasa de interés del 19,8% anual efectivo, y cada mes puede aumentar sus depósitos en $35.000. ¿Cuánto dinero acumulará en 10 meses? Haga un cuadro de capitalización.
Respuesta: $4.389.985

Problema 23

Se proyecta hacer un deposito hoy de US$50.000 y 10 depósitos anuales a partir del primer año, así: primer deposito de US$10.000; segundo depósito de US$10.200; tercer depósito de US$10.400, y así sucesivamente. Dos años después (final del año) del último depósito se iniciarán retiros iguales y trimestrales y de por vida. Si

la tasa de interés es del 16% anual y la capitalización tanto durante los depósitos como durante los retiros será mensual, ¿qué valor tendrán los retiros?
Respuesta: US$26.027

GRADIENTE ARITMÉTICO ESCALONADO

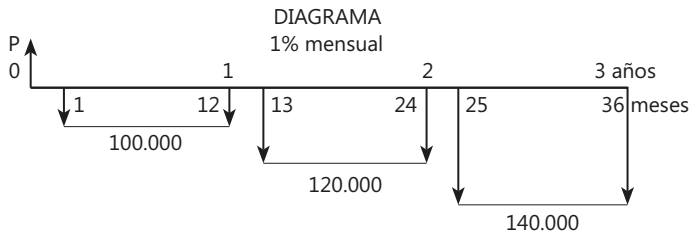
Aunque son pocas las operaciones financieras que utilizan esta modalidad de gradiente aritmético, es conveniente conocer su manejo matemático.

Existen flujos de caja de pagos de créditos (amortizaciones), ahorros programados (capitalizaciones) o, en general, flujos de ingresos o egresos que durante los 12 meses del año permanecen constantes, pero cada año aumentan o disminuyen una cantidad constante en pesos.

Este flujo de caja se llama *gradiente aritmético escalonado: creciente*, si cada año aumenta o *decreciente* si cada año disminuye.

Problema 24

Se proyecta pagar una deuda en cuotas mensuales durante tres años. Las cuotas mensuales del primer año serán de $100.000 cada una, pero en el segundo año las cuotas serán de $120.000 cada una, y en el tercer año serán de $140.000 cada una.



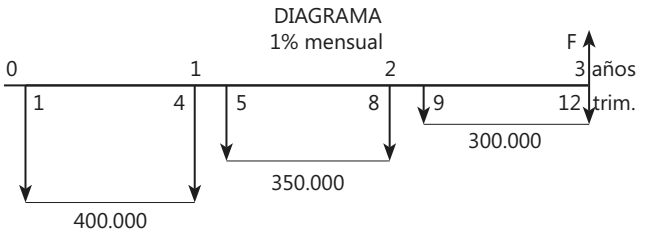
CUADRO DE CUOTAS

No. Cuota	Valor	No. Cuota	Valor	No. Cuota	Valor
1	100.000	13	120.000	25	140.000
2	100.000	14	120.000	26	140.000
3	100.000	15	120.000	27	140.000
4	100.000	16	120.000	28	140.000
5	100.000	17	120.000	29	140.000
6	100.000	18	120.000	30	140.000
7	100.000	19	120.000	31	140.000
8	100.000	20	120.000	32	140.000
9	100.000	21	120.000	33	140.000
10	100.000	22	120.000	34	140.000
11	100.000	23	120.000	35	140.000
12	100.000	24	120.000	36	140.000

Gradiente aritmético escalonado creciente: en este caso el valor del gradiente o crecimiento de cada año fue de $20.000.

Problema 25

Se desea hacer una serie de ahorros trimestrales durante tres años. Los ahorros trimestrales del primer año serán de $400.000 cada uno, pero durante el segundo año los ahorros trimestrales serán de $350.000 cada uno y los del tercer año serán de $300.000 cada uno. El dinero será retirado al final del tercer año en un solo retiro. Elaborar el diagrama y el cuadro de ahorros o depósitos.



No. Cuota	Valor
1	400.000
2	400.000
3	400.000
4	400.000
5	350.000
6	350.000
7	350.000
8	350.000
9	300.000
10	300.000
11	300.000
12	300.000

Gradiente Aritmético escalonado decreciente: valor del gradiente o decrecimiento cada año: $50.000.

MANEJO MATEMÁTICO DE LOS GRADIENTES ARITMÉTICOS ESCALONADOS

En los gradientes aritméticos sencillos (no escalonados), estudiados al comienzo del capítulo, vimos que para calcular el valor presente solo es necesario conocer el primer pago, A, y el valor del gradiente, G. Recordemos las fórmulas:

$$P = A\ (P/A,\ i\%,\ n) \pm G\ (P/G,\ i\%,\ n)$$

En el gradiente escalonado el valor de *A* ocurre durante los subperiodos, por ejemplo meses, como se ve en el diagrama del PROBLEMA 24 anterior. Podemos multiplicar el valor de *A* mensual, en este caso $100.000 por el factor (F/A, $i\%_{mensual}$, 12 meses) para obtener un nuevo valor de A (anual) que sería el primer pago de un gradiente sencillo, es decir, no escalonado.

Lo mismo ocurre con el gradiente de $20.000 que se paga 12 veces en un año. Si de igual manera lo multiplicamos por el mismo factor (F/A, i%mensual, 12 meses), lo convertimos en un nuevo gradiente anual para utilizarlo en el gradiente sencillo.

Aplicando este procedimiento obtenemos la ecuación del valor presente de un gradiente creciente o decreciente aritmético escalonado:

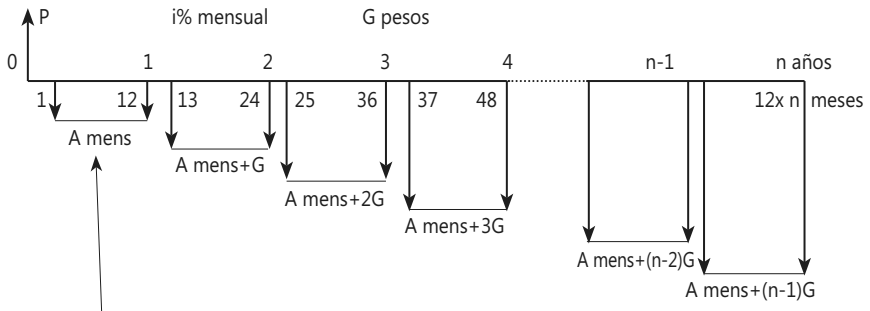


Gráfico 21 Diagrama general del gradiente aritmético escalonado.

Con este factor, la serie mensual del primer año la convertimos en pago único futuro, colocado al final del primer año. Si aplicamos el factor a cada serie mensual de cada año, en cada caso se convierte en pago único futuro al final de su respectivo año. Este es un factor común.

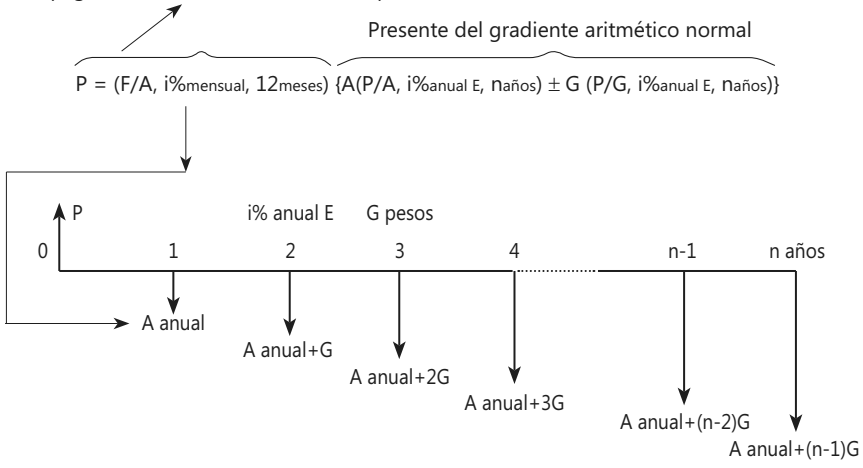


Gráfico 22 Diagrama equivalente en años.

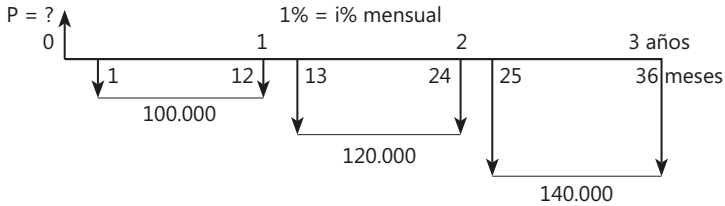
Recuerde que el G (P/G, i% anual E, n años) se suma si el gradiente es creciente y se resta si es decreciente.

Problema 26

En el PROBLEMA 24 anterior se tomó un crédito de $P para pagarlo en tres años en cuotas mensuales. Las cuotas del primer año son constantes y de $100.000 cada una. Las del segundo año se aumentarán en $20.000 y serán constantes durante los

doce meses, y las del tercer año serán constantes y valdrán $140.000 cada una. Si la tasa financiera es del 1% mensual, ¿cuál es el valor del crédito?

DIAGRAMA



Primero la tasa mensual la llevamos a la tasa anual E

i% mensual:	1%
Anual nominal >	12%
Anual E	12,68%

P = (F/A, i%$_{mensual}$, 12$_{meses}$) {100.000(P/A, 12,6825%$_{anual\ E}$, 3 años) + 20.000(P/G, 12,6825%$_{anual\ E}$, 3 años)}

12,6825 2,37394 2,18542

P = 3.565.080

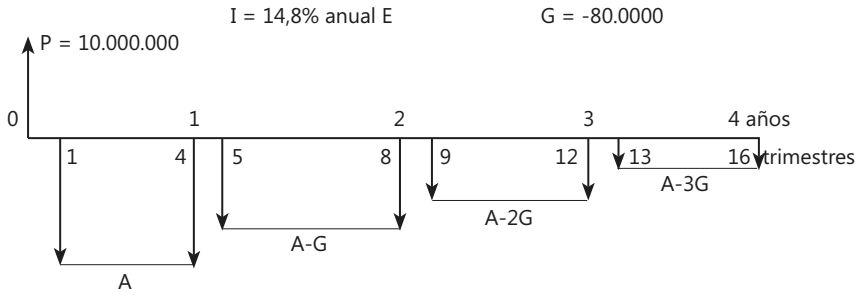
CUADRO DE CUOTAS

N	Saldo	Interés	Cuota	Amortización
0	3.565.080			
1	3.500.731	35.651	100.000	64.349
2	3.435.738	35.007	100.000	64.993
3	3.370.095	34.357	100.000	65.643
4	3.303.796	33.701	100.000	66.299
5	3.236.834	33.038	100.000	66.962
6	3.169.203	32.368	100.000	67.632
7	3.100.000	31.692	100.000	68.308
8	3.031.904	31.009	100.000	68.991
9	2.962.223	30.319	100.000	69.681
10	2.891.845	29.622	100.000	70.378
11	2.820.763	28.918	100.000	71.082
12	2.748.971	28.208	100.000	71.792
13	2.656.461	27.490	120.000	92.510
14	2.563.025	26.565	120.000	93.435
15	2.468.656	25.630	120.000	94.370
16	2.373.342	24.687	120.000	95.313
17	2.277.076	23.733	120.000	96.267
18	2.179.846	22.771	120.000	97.229
19	2.081.645	21.798	120.000	98.202
20	1.982.461	20.816	120.000	99.184
21	1.882.286	19.825	120.000	100.175
22	1.781.109	18.823	120.000	101.177

23	1.678.920	17.811	120.000	102.189
24	1.575.709	16.789	120.000	103.211
25	1.451.466	15.757	140.000	124.243
26	1.325.981	14.515	140.000	125.485
27	1.199.241	13.260	140.000	126.740
28	1.071.233	11.992	140.000	128.008
29	941.945	10.712	140.000	129.288
30	811.365	9.419	140.000	130.581
31	679.478	8.114	140.000	131.886
32	546.273	6.795	140.000	133.205
33	411.736	5.463	140.000	134.537
34	275.853	4.117	140.000	135.883
35	138.612	2.759	140.000	137.241
36	-2	1.386	140.000	138.614

Problema 27

Se toma un crédito de $10.000.000 a cuatro años para pagarlo en cuotas trimestrales. Las cuotas de cada año son constantes, pero cada año decrecen en $80.000. Si la tasa financiera es del 14,6% anual efectivo, ¿cuál será el valor de las cuotas trimestrales?



Primero transformemos la tasa anual a trimestral: i = 14,8% anual E.

i = 3,5107% trimestral

10.000.000 = (F/A, 3,5107%trimestral, 4 trimestres) {A (P/A; 14,8% anual E, 4 años) - 80.000(P/G, 14,8% anual E, 4 años)}

4,21562 2,86657 3,80794

10.000.000 = 12,08437 A – 1.284226 A = $933.788 Cuotas del primer año

CUADRO DE CUOTAS

N	Saldo	Interés	Cuota	Amortización
0	10.000.000			
1	9.417.287	351.075	933.788	582.713
2	8.817.117	33.618	933.788	603.170
3	8.189.771	309.442	933.788	624.346
4	7.543.506	287.523	933.788	646.265
5	6.954.552	264.834	853.788	588.954
6	6.344.921	244.157	853.788	609.631
7	5.713.887	222.755	853.788	631.033
8	5.060.700	200.601	853.788	653.188
9	4.464.580	177.669	773.788	596.119
10	3.847.533	156.740	773.788	617.048
11	3.208.822	135.077	773.788	638.711
12	2.547.688	112.654	773.788	661.134
13	1.943.343	89.443	693.788	604.345
14	1.317.781	68.226	693.788	625.562
15	670.257	46.264	693.788	647.524
16	0	23.531	693.788	670.257

Problema 28

Una empresa ha calculado que si hace una inversión de $50.000.000 en nuevos equipos podrá incrementar sus ventas en los próximos tres años, así: los primeros 12 meses venderá cada mes $4.500.000, en el segundo año las ventas mensuales serán iguales pero se incrementan con respecto al año anterior en $430.000, y las del tercer año se incrementan con respecto al segundo año en $430.000.

Además, debido a su incremento en ventas, podrá lograr ingresos financieros de $1.200.000 cada semestre por sus ahorros.

Los gastos mensuales en la nueva sección serán decrecientes cada año en $300.000, pero constantes durante los 12 meses de cada año. El primer año estos gastos serán de $2.800.000.

A una tasa financiera del 16% anual E, ¿cuál es el valor presente del proyecto de inversión? ¿Es rentable?

Respuesta: $23.683.853. Es rentable.

Problema 29

Una empresa hace su presupuesto de ingresos y egresos para los próximos dos años y ha determinado el posible flujo de caja: Los ingresos mensuales serán de $4.900.000 el primer año. Los del segundo tendrán un incremento de $800.000 y serán constantes durante los 12 meses.

Los ingresos no operativos trimestrales, que inician el primer trimestre, serán de $650.000, y cada trimestre se incrementarán en $150.000.

Los gastos por mano de obra serán mensuales y constantes durante los 12 meses de cada año. El primer año tendrán un costo de $3.200.000 mensuales, y para el segundo año tendrán un incremento igual al IPC que se estima en un 10%. Serán constantes durante los doce meses.

La materia prima se comprará semestralmente. Hoy se comprará la M.P. para el primer semestre por un valor de $5.000.000, y cada semestre el valor se incrementará en $1.150.000. (NOTA: la última M.P. la comprará en el tercer semestre).

A una tasa financiera del 14% anual E, ¿cuál es el valor presente de este presupuesto?

Respuesta: $24.256.577

Capítulo 8

Gradiantes geométricos (escalera, porcentuales)

Los gradientes geométricos pueden ser crecientes o decrecientes. Son aquellos flujos de caja (ingresos o egresos) que crecen o decrecen en cada período en una cantidad fija porcentual (gradiente porcentual); más que los gradientes aritméticos, los geométricos tienen mucha aplicación en créditos de vivienda.

Nomenclatura:

P: Valor presente
C1: Valor de la primera cuota
G%: Porcentaje del crecimiento

Problema 1

Si usted adquiere un préstamo de $P para pagar en 5 cuotas, de tal manera que la primera cuota sea de $200, y en cada período posterior le aumentan la cuota en un 20%, el flujo de pagos será:

C_1 = 200 primera cuota; G = 20% (Incremento anual en cada cuota)

Cuota No.	Valor cuota		Valor cuota en función de la primera	
1		= 200	200 (1 + 0.2)0	= 200
2	200 + 200 x 0.2	= 240	200 (1 + 0.2)1	= 240
3	240 + 240 x 0.2	= 288	200 (1+ 0.2)2	= 288
4	288 + 288 x 0.2	= 345,60	200 (1 + 0.2)3	= 345,60
5	345,60 + 345,60 x 0.2	= 414,72	200 (1 + 0.2)4	= 414,72

Observe en el cuadro anterior que cada cuota tiene como factor la primera cuota (200) y como segundo factor la expresión $(1 + 0{,}20)^n$. El valor de n es igual al número del período menos 1.

Por ejemplo, la cuarta cuota es igual a $200\ (1 + 0{,}2)^3$, la quinta es igual a $200\ (1 + 0{,}2)^4$.

En general, el valor de una cuota cualquiera es: $C_1\ (1 + G)^{n-1}$

Si el crédito fuera a 15 años, la cuota 13 sería: cuota 13 = $200\ (1 + 0{,}2)^{12}$ = 1.783.22

Esto nos induce a formular la ecuación para el valor de la cuota K:

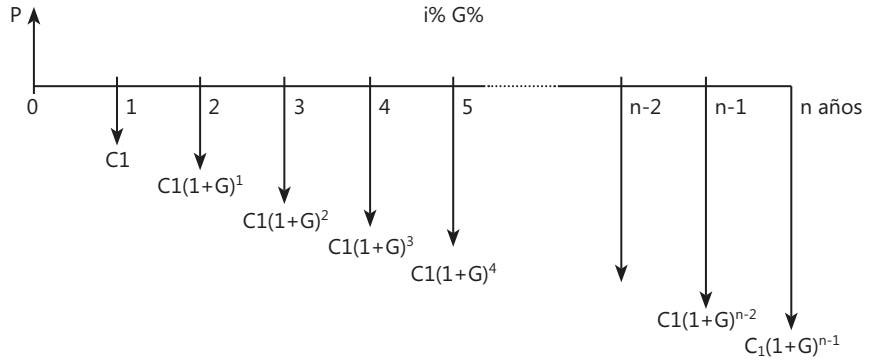
$$\text{Cuota } K = C_1\ (1 + G)^{K - 1}$$

G: porcentaje de crecimiento expresado en número índice.

DIAGRAMA DEL GRADIENTE PORCENTUAL CRECIENTE

Problema tipo o modelo

Se toma un crédito de $P a una tasa i% anual, para pagarlo en n cuotas anuales crecientes cada año en G%. La primera cuota será de $C1. Elaborar el diagrama de flujo de caja.



C_1: Primera cuota

FÓRMULA PARA CALCULAR EL P DE UNA SERIE CRECIENTE PORCENTUAL (Fórmula 1)

FÓRMULA:

$$P = C1 \left\{ \frac{1 - \left(\frac{1 + G}{1 + i} \right)^n}{i - G} \right\} \qquad \text{para } i \neq G \ (1)$$

Presentación con factor:

$$P = C_1(P/C1, 1\%, G\%, n)$$

En caso de i = G se presenta una indeterminación que es necesario eliminar aplicando el método de L'Hopital para conocer su verdadero valor. Este procedimiento nos conduce a la siguiente ecuación:

$$P = C_1 \frac{n}{1 + G} \qquad \text{para } i = G \ (2)$$

Fórmula para calcular la primera cuota de una serie creciente porcentual (fórmula 2)

Mediante un simple despeje algebraico obtendremos las fórmulas para conocer el valor de la primera cuota (C_1) conociendo el valor del préstamo (P) y el crecimiento (G%) que tendrán las cuotas en cada período. Las fórmulas 1 y 2 serán:

FÓRMULA:

$$C1 = P \left\{ \frac{i - G}{1 - \left(\frac{1 + G}{1 + i} \right)^n} \right\} \quad \text{para } i \neq G$$

Presentación con factor:

$$C_1 = P\ (C_1/P,\ 1\%,\ G\%,\ n)$$

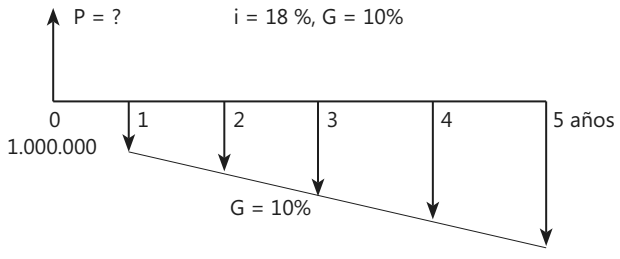
$$C1 = P\ \frac{1 + G}{n} \quad \text{para } i = G$$

Notas:

1. Observe que el *P* de un gradiente creciente porcentual queda un período antes de la primera cuota, o la primera cuota queda un período después del préstamo.
2. El valor de n en este gradiente es igual al número del período donde está la última cuota menos el valor del período donde queda el *P*.
3. Este tipo de problema (gradiente porcentual) no se transforma en serie más gradiente, como ocurre en el gradiente aritmético.

Problema 2

Se toma un crédito a 5 años con una tasa del 18% anual E, y con pagos en cuotas anuales. La primera cuota tendrá un valor de $1.000.000, y las posteriores tendrán un crecimiento del 10% cada una con respecto a la anterior. ¿Cuál es el valor del préstamo hoy?



Aplicación de la fórmula 1 para calcular el valor presente:

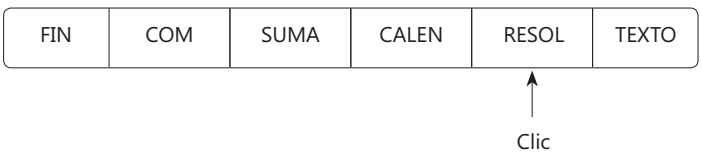
$$P = 1.000.000 = \left\{ \frac{1 - \left(\frac{1 + 0.10}{1 + 0.18} \right)^5}{0.18 - 0.10} \right\} = 1.000.000 \text{ X } 3.70039 = 3.700.390$$

Podemos comprobar este resultado utilizando un cuadro de pagos como se ha explicado anteriormente.

CUADRO DE PAGOS				
Mes	**Cuota**	**Interés**	**Amortización**	**Saldo**
0	0	0	0	3.700.390
1	1.000.000	666.070	333.930	3.366.460
2	1.100.000	605.963	494.037	2.872.423
3	1.210.000	517.036	692.964	2.179.460
4	1.331.000	392.303	938.697	1.240.763
5	1.464.100	223.337	1.240.763	-0

Para evitar la incomodidad de aplicar la fórmula, vamos a programar la calculadora *Hewlett Packard 19 BII* o *17 BII* para el gradiente porcentual.

Menú de la calculadora:



Programa: en un renglón en blanco de la vista de la pantalla que nos muestre la calculadora, escribimos el siguiente programa que es la presentación de la fórmula en lenguaje máquina:

P/C1 = C1 x ((1- (((1 + G) ÷ (1 + i))^N)) ÷ (i-G))

Luego hacemos clic en CALC (calcular). La calculadora verifica la fórmula, y si está correctamente escrita, aparece el siguiente menú y en él escribimos los datos de la fórmula:

Digitamos 1 y clic en C1, 0.10 y clic en G, 0.18 y clic en *i*, 5 y clic en N, luego hacemos clic en P/C1 y aparece el valor del factor antes calculado con la fórmula: 3.70039.

Si deseamos que la calculadora multiplique el factor (3.70039) por el valor de C1, digitamos el valor de C1 y hacemos clic en el C1 del menú y el valor que veremos será: 1.000.000 x 3,70039 = 3.700.390.

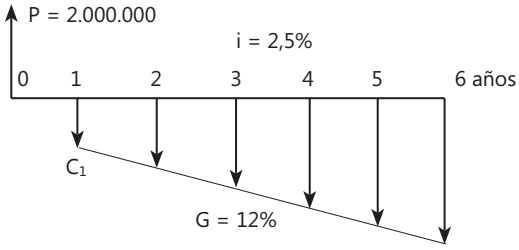
El mismo problema escrito con factores: P = 1.000.000 (P/C, 18%, 10%, 5)

P = 1.000.000 x 3,70039

P = 3.700.390

Problema 3

Si se toma un crédito de $2.000.000 para pagarlos en seis cuotas mensuales, a una tasa del 2,5% mensual, y cada cuota, con respecto a la anterior, crecerá en un 12%, ¿cuál es el valor de las cuotas?



$2.000.000 = C_1$ (P/C, 2,5%, 12%, 6)

$2.000.000 = C_1$ (7,3897)

$$C_1 = \frac{2.000.000}{7.3897} = 270.647$$

Explicación del procedimiento anterior: Volvemos al programa del gradiente porcentual.

P/C1	C1	G	I	N

Digitamos 1 y clic en C1; 0.12 y clic en G, 0.025 y clic en i, 6 y clic en N. Luego hacemos clic en P/C1 y aparece el valor del factor antes calculado con la fórmula: 7,3897.

Si deseamos que la calculadora divida los $2.000.000 por el factor (7,3897), digitamos el valor $2.000.000 y hacemos clic en P/C1 del menú, luego hacemos clic en C1 y el valor que veremos será: $270.647 que corresponde al valor de la primera cuota.

Podemos visualizar las cuotas mensuales utilizando el procedimiento explicado al comienzo del capítulo, de la siguiente forma (ver tabla página siguiente.

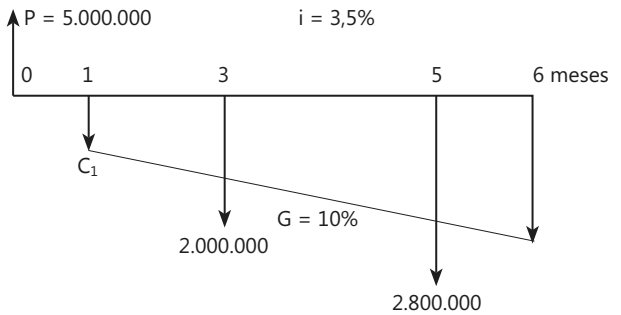
Problema 4

Hoy se adquiere una deuda de $5.000.000 para ser pagada en seis cuotas mensuales crecientes en cada mes. Después de la primera cuota, cada una de las posteriores crecerá un 10% con respecto a la anterior. Además, se tiene previsto hacer dos abonos

No. cuota	Valor de la cuota. Primer método		Cuota K = C_1 (1 + í)$^{K-1}$ Segundo método	
C_1	270.747	= 270.747	270.747 (1+ 0,12)$^{1-1}$	= 270.747
C_2	270.747 (1+ 0,12)	= 303.125	270.747 (1+ 0,12)$^{2-1}$	= 303.125
C_3	303.125 (1+ 0,12)	= 339.500	270.747 (1+ 0,12)$^{3-1}$	= 339.500
C_4	270.747 (1+ 0,12)	= 380.240	270.747 (1+ 0,12)$^{4-1}$	= 380.240
C_5	270.747 (1+ 0,12)	= 425.868	270.747 (1+ 0,12)$^{5-1}$	= 425.868
C_6	270.747 (1+ 0,12)	= 476.973	270.747 (1+ 0,12)$^{6-1}$	= 476.973

extras por valor de $2.000.000 y $2.800.000 en los meses 3 y 5, respectivamente. La tasa financiera pactada es del 3,5% mensual. Calcular el valor de la primera cuota.

Elaborar un cuadro de pagos que muestre las cuotas, el interés, la amortización y el saldo.



Ingresos = Egresos I = E Por ser un problema de amortización.
Vamos a formular la ecuación que traslade todos los flujos de caja al período cero.

5.000.000 = C1(P/C1, 3,5%, 10%, 6) + 2.000.000(P/F, 3,5%, 3) + 2.800.000(P/F, 3,5%, 5)

6,78717 0,90194 0,84197

Factores obtenidos en la calculadora

C_1 = $ 123,555

TABLA DE AMORTIZACIÓN					
n	Saldo	Interés	Cuota	Cuota extra	Amortización
0	5.000.000				
1	5.051.445	175.000	123.555		- 51.445
2	5.092.335	176.801	135.911		- 40.890
3	3.121.065	178.232	149.502	2.000.000	1.971.270
4	3.065.851	109.237	164.452		55.214
5	192.258	107.305	180.897	2.800.000	2.873.592
6	0	6.729	198.987		192.258

Las amortizaciones en las dos primeras cuotas son negativas porque las cuotas no alcanzan para pagar los intereses de esas cuotas y, por lo tanto, no abonan al capital adeudado; por el contrario, lo aumentan. Es como si el acreedor le hiciera un nuevo préstamo por la diferencia entre la cuota y el interés.

La tercera cuota tiene un valor mucho mayor (ordinaria más extra) que el interés; por lo tanto, tiene amortización positiva.

Un gradiente porcentual creciente tiene como efecto hacer que las primeras cuotas sean menores que las posteriores, y facilitar de esta manera el acceso a los créditos, especialmente cuando se trata de invertir el préstamo en una actividad que producirá rendimientos futuros crecientes.

Las cuotas extraordinarias también tienen como objetivo disminuir las cuotas ordinarias.

Sin embargo, es posible, como en el ejemplo anterior, que una gran disminución en los valores de las primeras cuotas sea tan alta, que con ellas no se cancele el valor de los intereses, como sucedió con las cuotas 1 y 2.

Esto quiere decir que en este tipo de crédito el saldo de la deuda inicialmente crece, pero cuando la cuota es lo suficientemente grande para cancelar los intereses, sobra algo para amortizar. El saldo insoluto empieza a disminuir.

Este fenómeno se llama capitalización de intereses, que fue cuestionado por La Corte Constitucional, al menos en los créditos de vivienda.

En las gráficas siguientes puede observar el efecto en los saldos, amortización y cuotas del gradiente porcentual y de las cuotas extras.

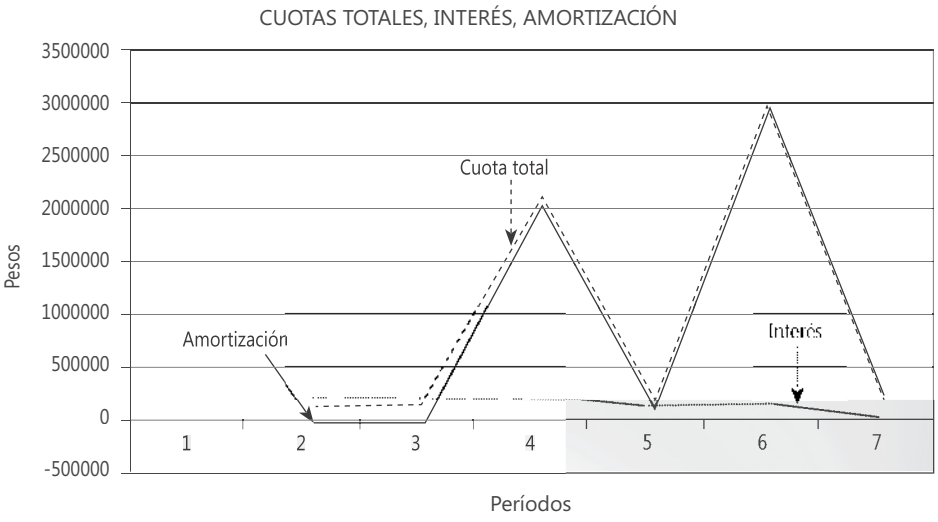


Gráfico 23 Cuotas totales, interés, amortización.

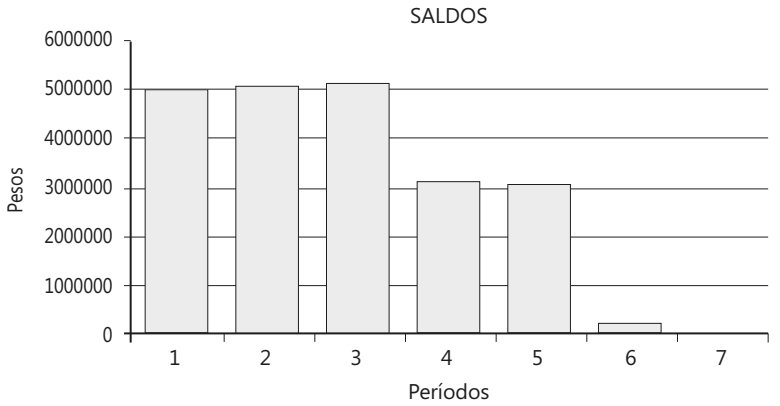


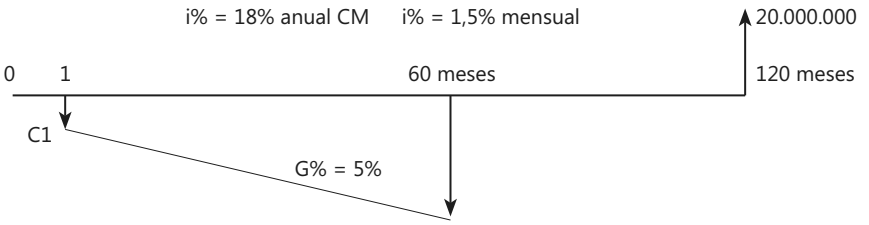
Gráfico 24 Efecto de los saldos.

Problema 5

Usted decide crear un fondo para hacer una inversión dentro de 10 años, la cual costará $20.000.000. Para lograr este propósito, hará depósitos mensuales, empezando dentro de un mes, y durante cinco años. Cada depósito será un 5% mayor que el anterior. Si la tasa que le pagan es del 18% anual, y será capitalizable mensualmente, ¿cuál es el valor del primer depósito?

Respuesta: $17.646 la primera cuota. Las posteriores crecerán un 5% cada mes.

Solución:



Trasladamos todos los flujos al período cero:

20.000.000 (P/F, 1,5%, 120) = C1 (P/C, 1,5%, 5%, 60)
0,1675 189,8662

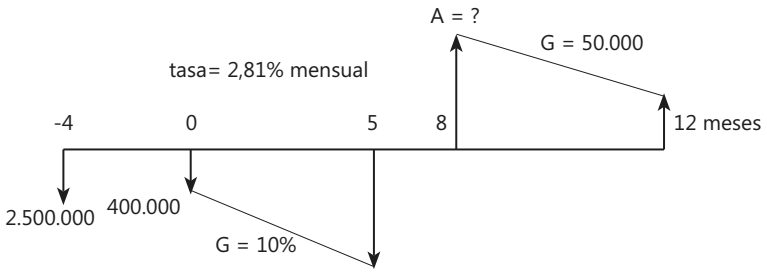
C_1 = $17.646 la primera cuota o depósito.

Problema 6

Hace cuatro meses abrí una cuenta con $2.500.000. Hoy iniciaré seis depósitos mensuales, empezando con $400.000, pero cada mes aumentaré el ahorro en un

10%. Dentro de 8 meses iniciaré cinco retiros mensuales con una cantidad no determinada, pero cada mes posterior disminuiré el retiro en $50.000, cada vez. Si la tasa financiera es del 2,81% mensual, ¿cuál será el valor de los retiros?
Respuestas: $1.587.961, $1.537.961, $1.487.961, $1.437.961, $1.387.961.

Solución:



En este problema tenemos una combinación del gradiente aritmético y el geométrico.

Por ser una cuenta de ahorro, formulamos la ecuación Ingresos = Egresos

{A (P/A, 2,81%, 5) - 50.000 (P/G, 2,81%, 5)} (P/F, 2,81%, 7) =
2.500.000 (F/P, 2,81%, 4) + 400.000 (P/C, 2,81%, 6) (F/P, 2,81%, 1)
A = $ 1.587.961

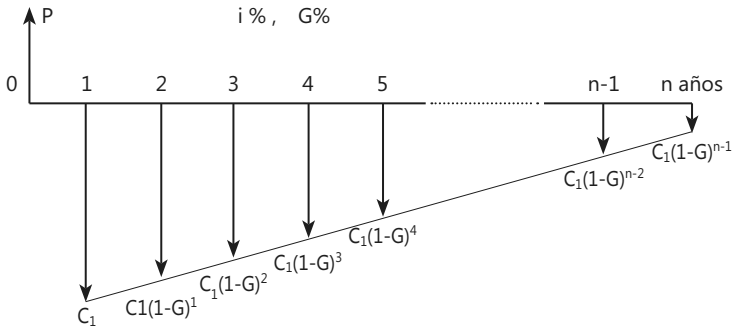
Cuadro de pagos:

n	Depósito	Retiro	Interés	Saldo
-4	2.500.000			2.500.000
-3			70.250	2.570.250
-2			72.224	2.642.474
-1			74.254	2.716.728
0	400.000		76.340	3.193.068
1	440.000		89.725	3.722.793
2	484.000		104.610	4.311.403
3	532.400		121.150	4.964.954
4	585.640		139.515	5.690.109
5	644.204		159.892	6.494.205
6			182.487	6.676.692
7			187.615	6.864.307
8		1.587.961	192.887	5.469.233
9		1.537.961	153.685	4.084.958
10		1.487.961	114.787	2.711.785
11		1.437.961	76.201	1.350.025
12		1.387.961	37.936	0

GRADIENTE PORCENTUAL DECRECIENTE (FÓRMULA 3)

Al igual que el anterior, es muy utilizado en créditos hipotecarios. Son aquellos pagos (o ingresos) que decrecen, generalmente, en una cantidad fija porcentual (gradiente porcentual).

Flujo:



Ejemplo:

Se toma un crédito de $*P* para pagar en cuatro cuotas decrecientes en cada período en un 10%. Si la primera cuota es de $200, el flujo de pagos será:

Cuota No.	Valor cuota		Valor cuota en función de la primera	
1	200	200	$200\ (1 - 0.1)^0$	200
2	200 - 200 x 0.1	180	$200\ (1 - 0.1)^1$	180
3	180 - 180 x 0.1	162	$200\ (1 - 0.1)^2$	162
4	162 - 162 x 0.1	145,80	$200\ (1 - 0.1)^4$	145,80

La fórmula para calcular el P de una serie decreciente porcentual es:

FÓRMULA:

$$P = C_1 \left\{ \frac{1 - \left(\frac{1 - G}{1 + i} \right)^n}{i + G} \right\}$$

Presentación con factor:

$$P = C_1(P/C_1, 1\%, G\%, n)$$

Mediante despeje algebraico podemos obtener la fórmula inversa, para calcular el valor de la primera cuota (C1) si se conoce el valor del préstamo (P).

FÓRMULA:

$$C_1 = P \left\{ \frac{i + G}{1 - \left(\frac{1 - G}{1 + i} \right)^n} \right\}$$

Presentación con factor:

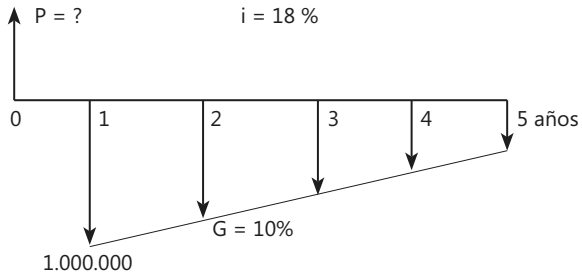
$$C_1 = P\ (C_1/P,\ 1\%,\ G\%,\ n)$$

$$\text{Cuota } K = C_1\ (1 - G)^{K - 1}$$

Las notas 1, 2 y 3 del caso anterior son válidas para este gradiente.

Problema 7

Se retoma el PROBLEMA 2 de este capítulo, pero cambiando el gradiente por uno decreciente: Se toma un crédito a cinco años a una tasa del 18% anual E, y con pagos en cuotas anuales. La primera cuota tendrá un valor de $1.000.000 y las posteriores tendrán un decrecimiento del 10% anual, cada una con respecto a la anterior. ¿Cuál es el valor del préstamo hoy?



$$P = 1.000.000 = \left\{ \frac{1 - \left(\frac{1 - 0{,}01}{1 + 0{,}018} \right)^5}{0{,}018 + 0{,}01} \right\}$$

$$P = 2.649{,}612$$

El programa que elaboramos para el gradiente porcentual creciente lo utilizamos teniendo en cuenta que el signo del gradiente, por ser decreciente, debe ser negativo.

Escribimos el problema utilizando los factores:

$$P = 1.000.000\ (P/C,\ 18\%,\ (-)10\%,\ 5)$$

$$P = 1.000.000 \times 2{,}64961$$

$$P = 2.649{,}612$$

Explicación del procedimiento:

Volvemos al programa del gradiente porcentual.

P/C1	C1	G	I	N

Digitamos 1 y clic en C1; -0.10 y clic en G, 0.18 y clic en i, 5 y clic en N. Luego hacemos clic en P/C1 y aparece el valor del factor antes calculado con la fórmula: 2.64961 que se debe multiplicar por 1.000.000

Si deseamos que la calculadora multiplique $1.000.000 por el factor (2,64961), digitamos el valor $1.000.000 y hacemos clic en C1 del menú. Luego hacemos clic en P/C1 y el valor que veremos será: $2.649.612 que corresponde al valor del préstamo.

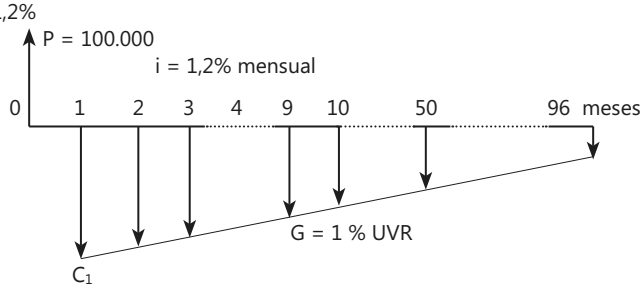
CUADRO DE PAGOS

Per	Cuota	Interés	Amortización	Saldo
0	0	0	0	2.649.612
1	1.000.000	476.930	523.070	2.126.542
2	900.000	382.778	517.222	1.609.320
3	810.000	289.678	520.322	1.088.997
4	729.000	196.020	532.980	556.017
5	656.100	100.083	556.017	-0

Problema 8

Entre los planes de crédito hipotecario que tienen las entidades financieras está el de cuotas decrecientes mensualmente en un porcentaje, y calculadas en UVR. Supongamos que se toma un crédito de 100.000 UVR para la compra de vivienda a 8 años, a una tasa del 14,4% anual C.M., pero las cuotas en UVR decrecerán cada mes en un 1%. ¿Cuál será el valor de las cuotas 1, 10 y 50 en UVR?

Tasa mensual = 14,4/12 = 1,2%
P = 100.000 UVR
G = (-) 1% de la UVR
n = 8 x 12 = 96 meses
i = 1,2 % mensual



Utilizando el factor: 100.000 = C_1 (P/ C1, 1,2%, (-) 1%, 96)

100.000 = C_1 x 39,94359 Despejando a C_1 obtenemos: C_1 = 2.503,53 UVR

Aplicando la fórmula, obtendríamos:

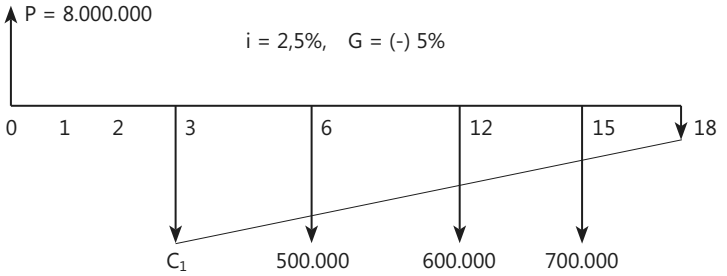
$$1.000.000 = C_1 \left\{ \frac{1 - \left(\frac{1 - 0{,}01}{1 + 0{,}012} \right)^{96}}{0{,}012 + 0{,}01} \right\} \rightarrow C_1 = 2.503.53 \text{ UVR}$$

CUADRO DE PAGOS				
Per	**Cuota**	**Interés**	**Amortización**	**Saldo**
0	0,00	0,00	0,00	100.000,00
1	2.503,53	1.200,00	1.303,53	98.696,47
2	2.478,50	1.184,36	1.294,14	97.402,33
3	2.453,71	1.168,83	1.284,88	96.117,45
4	2.429,17	1.153,41	1.275,76	94.841,69
5	2.404,88	1.138,10	1.266,78	93.574,90
6	2.380,83	1.122,90	1.257,93	92.316,97
7	2.357,02	1.107,80	1.249,22	91.067,75
8	2.333,45	1.092,81	1.240,64	89.827,11
9	2.310,12	1.077,93	1.232,19	88.594,91
10	2.287,02	1.063,14	1.223,88	87.371,04
11	2.264,15	1.048,45	1.215,70	86.155,34
29	1.889,46	799,40	1.090,06	65.526,73
30	1.870,57	786,32	1.084,25	64.442,48
48	1.561,01	561,43	999,58	45.786,35
49	1.545,40	549,44	995,97	44.790,39
50	1.529,95	537,48	992,47	43.797,92
51	1.514,65	525,58	989,08	42.808,84
91	1.013,26	68,28	944,98	4.745,31
94	983,16	34,22	948,94	1.902,67
95	973,33	22,83	950,50	952,17
96	963,60	11,43	952,17	0,00

Problema 9

Una deuda de $8.000.000 adquirida hoy se pretende pagar en 18 meses mensuales así: Los dos primeros meses no se pagan cuotas, pero se acumulan intereses (dos períodos de gracia). La primera cuota se paga en el tercer mes, y de allí en adelante cada cuota decrecerá en un 5% cada vez. En los meses 6, 12 y 15 se pagarán cuotas adicionales extras por valores de $500.000, $600.000 y $700.000, respectivamente. La tasa de interés es del 2,5% mensual.

¿Cuáles son las cuotas mensuales?



$$8.000.000 = C_1\,(P/C_{4,\,2,5\%,\,(-)\,5\%,\,16})(P/F;\,2,5\%;\,2) + 500.000(P/F,\,2,5\%,\,6) + 600.000(P/F,\,2,5\%,\,12) + 700.000(P/F,\,2,5\%,\,15)$$

9.380 0.952 0.862 0.743 0.690

C_1 = $743.536

La respuesta exacta es $742.430. El efecto del error mostrado en el siguiente cuadro fue causado por haber utilizado sólo tres decimales en el cálculo del valor de los factores. Compruebe utilizando cinco decimales en los factores.

CUADRO DE PAGOS

Mes	Cuota	Cuota extra	Cuota total	Interés	Amortización	Saldo
0						8.000.000
1	0		0	200.000	-200.000	8.200.000
2	0		0	205.000	-205.000	8.405.000
3	743.536		743.536	210.125	533.411	7.871.589
4	706.359		706.359	196.790	509.569	7.362.020
5	671.041	500.000	1.171.041	184.050	986.991	6.375.029
6	637.489		637.489	159.376	478.113	5.896.915
7	605.615		605.615	147.423	458.192	5.438.723
8	575.334		575.334	135.968	439.366	4.999.358
9	546.567		546.567	124.984	421.583	4.577.774
10	519.239		519.239	114.444	404.795	4.172.980
11	493.277		493.277	104.324	388.952	3.784.027
12	468.613	600.000	1.068.613	94.601	974.012	2.810.015
13	445.182		445.182	70.250	374.932	2.435.083
14	422.923		422.923	60.877	362.046	2.073.036
15	401.777	700.000	1.101.777	51.826	1.049.951	1.023.085
16	381.688		381.688	25.577	356.111	666.974
17	362.604		362.604	16.674	345.930	321.044
18	344.474		344.474	8.026	336.448	-15.403
Error por aproximaciones: 15,403						

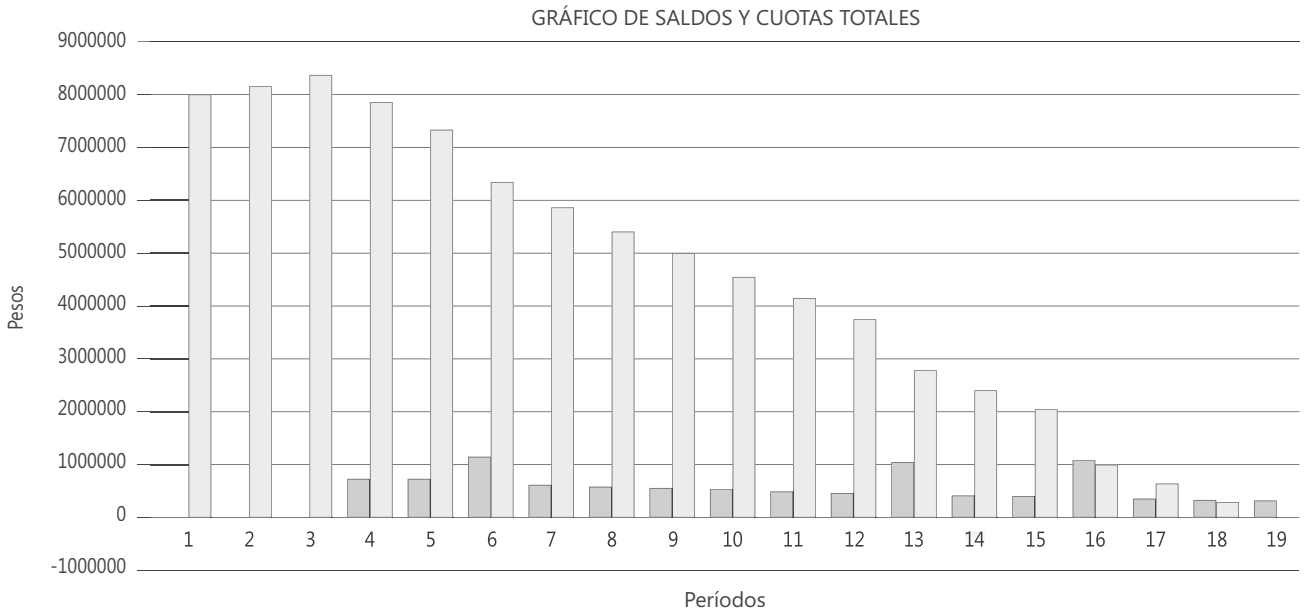


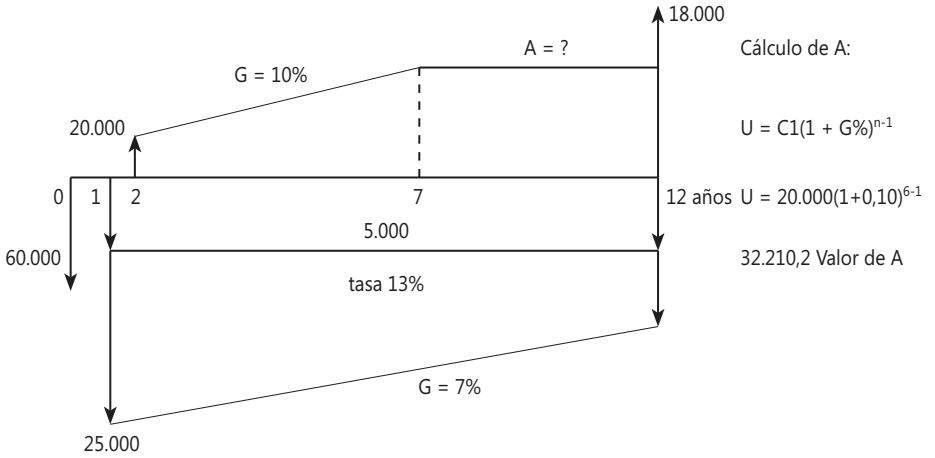
Gráfico 25 Saldos y cuotas totales.

Problema 10

Un proyecto de montaje de un taller contempla el siguiente flujo de caja: inversión en equipos US$60.000. Los ingresos anuales por venta de servicios se iniciarán dentro de dos años, empezando con US$20.000, y cada año se deben incrementar en un 10%. Este incremento se presentará hasta el séptimo año, y de allí en adelante permanecerán constantes.

Los gastos fijos serán de US$5.000 anuales. Los gastos variables iniciarán el primer año con US$25.000, pero cada año deben disminuir un 7%.

El valor de salvamento es del 30% del valor de la inversión. Vida útil: 12 años. A una tasa financiera del 13% anual E, determine si es rentable el proyecto.



Solución mediante el uso de la ecuación: P = I - E

P = 20,000(P/Ci, 13%, 10%, 6)(P/F, 13%, 1) + 32.210,20(P/A, 13%, 5)(P/F, 13%, 7) + 18,000 (P/F, 13%, 12)
4.96955 0.88496 3.51723 0.42506 0.23071
-60,000 - 5,000 (P/A, 13%, 12) - 25,000(P/Ci, 13%, -7%, 12)
5.91765 4.51714

P = -62.252 No es rentable el proyecto.

Problema 11

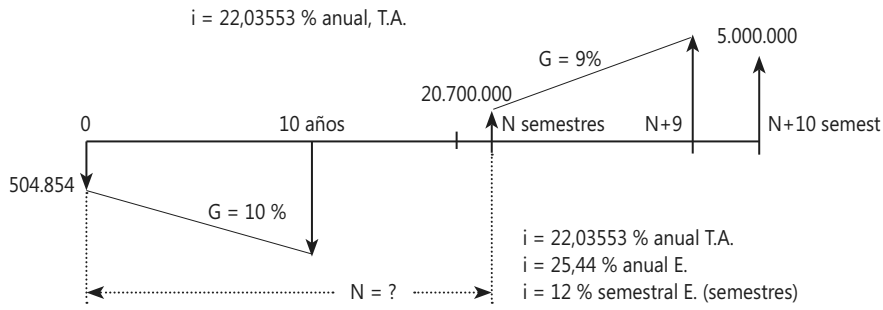
Un padre de familia desea crear un fondo para que su hijo, que acaba de nacer, tenga dinero en el futuro para sus estudios y gastos. Su plan de ahorros es el siguiente: depositar sus cesantías hoy en un fondo que paga una tasa del 22,07553% anual T.A. El primer depósito será de $504.854.

Cada año posterior también depositará sus cesantías que, se suponen, crecerán cada año en un 10% anual. El último depósito lo hará cuando su hijo cumpla 10 años.

Años más tarde, el hijo podrá hacer retiros crecientes semestrales para pagar las matriculas de la universidad y sus gastos personales. La carrera universitaria será de cinco años y sus matriculas serán semestrales, las cuales se deben pagar al comienzo de cada semestre. El primer retiro será de $20.700.000, y cada semestre posterior aumentará sus retiros en un 9%. Además, al culminar la carrera, también hará el último retiro de $5.000.000, para la excursión de final de carrera.

¿A qué edad empezará el hijo los estudios universitarios?

Respuesta: Transcurrirán 16 semestres entre el último depósito y el primer retiro. Edad: 18 años



Los depósitos anuales se trasladan al período cero.

$$504.854(P/C_1;\ 25{,}44\%;\ 10\%;\ 11)\ (F/P,\ 25{,}44\%;\ 1) = 3.134.497 \qquad (1)$$

Los retiros semestrales se trasladan al período cero.

$$20.700.000\ ((P/C_1;\ 12\%;\ 9\%;\ 10)\ (P/F;\ 12\%;\ (N - 1)) + 5.000.000\ (P/F;\ 12\%;\ (N+10))$$

$$164.062.856\ \ (P/F;\ 12\%;\ (N - 1)) + 5.000.000\ (P/F;\ 12\%;\ (N+10)) \qquad (2)$$

Egresos = Ingresos (1) = (2)

$$3.134.497 = 164.062.856\ (P/F;\ 12\%;\ (N - 1)) + 5.000.000\ (P/F;\ 12\%;\ (N+10))$$

Con esta ecuación se hacen los ensayos de prueba y error.

$$3.134.497 = 164.062.856\ (P/F,\ 12\%;\ (N-1)) + 5.000.000\ (P/F;\ 12\%;\ (N+10))$$

Si N = 30 $3.134.497 \neq 164.062.856 \times 0{,}0373833 + 5.000.000 \times 0{,}0107468$

$3.134.497 \neq 6.133.207 + 53733{,}99091$

$3.134.497 \neq 6.186.941$ error 3.052.444

Si N = 36 $3.134.497 \neq 164.062.856 \times 0{,}0189395 + 5000000 \times 0{,}0054447$

$3.134.497 \neq 3.107.273 + 27.223$

$3.134.497 = 3.134.497$ error = 0

No fue necesario interpolar.

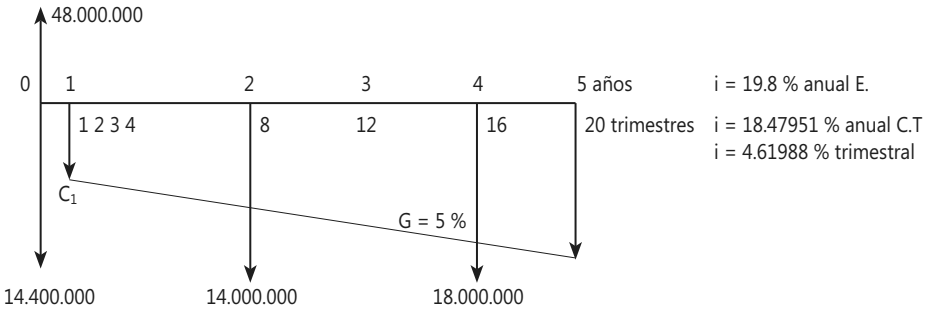
Problema 12

Usted compra un apartamento por $48.000.000. Paga una cuota inicial del 30% y el saldo lo financian a 5 años.

Los pagos los pacta así: cada tres meses debe pagar las cuotas ordinarias, las cuales se incrementarán a partir de la segunda en el 5% trimestral. Al final del segundo y cuarto año debe pagar cuotas extraordinarias (además de las ordinarias) de $14.000.000 y $18.000.000, respectivamente.

Si la tasa financiera pactada fue del 19,8% anual E, ¿cuál será el valor de las cuotas ordinarias en cada trimestre de cada año?

Respuesta: Primera cuota trimestre 1: $763.294. Cada una de las posteriores crece el 5%.



33.600.000 = C1 (P/ C_1; 4.61988%; 5%;20) + 14.000.000(PF; 19.8; 2) + 18.000.000(PF;19.8; 4)

C_1 = $ 763.294

Deuda inicial				33.600.000	
Tasa efectiva trimestral				0,0461988	
Número de periodos. (trimestres)				20	
Porcentaje crecimiento cuota				0,05	
Per.	**Saldo**	**Interes**	**Cuota**	**Amortización**	**Cuota extra**
0	33.600.000	0	0	0	
1	34.388.983	1.552.280	763.297	-788.983	
2	35.176.251	1.588.730	801.462	-787.268	
3	35.959.816	1.625.101	841.535	-783.566	
4	36.737.505	1.661.300	883.612	-777.689	
5	37.506.942	1.697.229	927.792	-769.436	
6	38.265.536	1.732.776	974.182	-758.594	
7	39.010.467	1.767.822	1.022.891	-744.931	
8	25.738.668	1.802.237	15.074.035	13.271.799	14.000.000
9	25.800.026	1.189.096	1.127.737	-61.358	
10	25.807.832	1.191.930	1.184.124	-7.806	
11	25.756.793	1.192.291	1.243.330	51.039	
12	25.641.229	1.189.933	1.305.497	115.564	
13	25.455.052	1.184.594	1.370.772	186.178	
14	25.191.73	4.175.993	1.439.310	263.317	
15	24.844.286	1.163.828	1.511.276	347.448	
16	6.405.223	1.147.776	19.586.839	18.439.063	18.000.000
17	5.034.955	295.94	1.666.181	1.370.268	
18	3.518.074	232.609	1.749.491	1.516.882	
19	1.843.639	162.531	1.836.965	1.674.434	
20	0	85.174	1.928.813	1.843.639	

Nota: Observe que la amortización en las 10 primeras cuotas es negativa porque con las cuotas no alcanza a cubrir el interés de cada periodo.

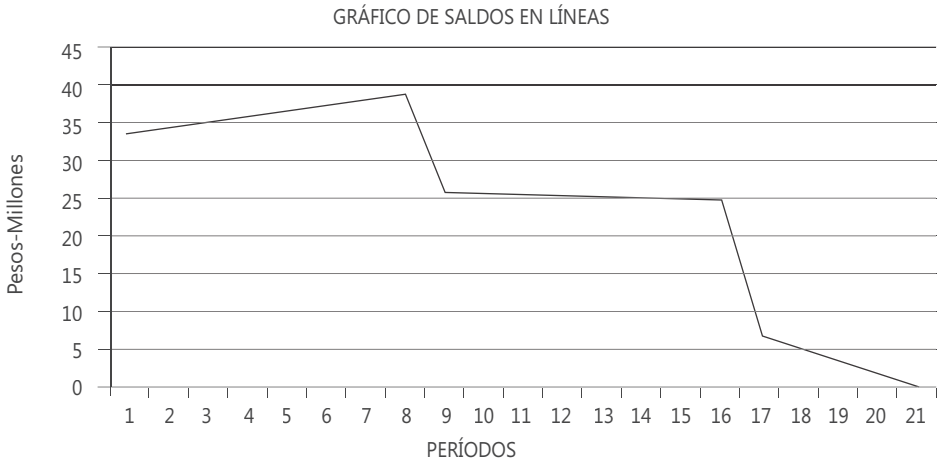


Gráfico 26 Saldos en línea.

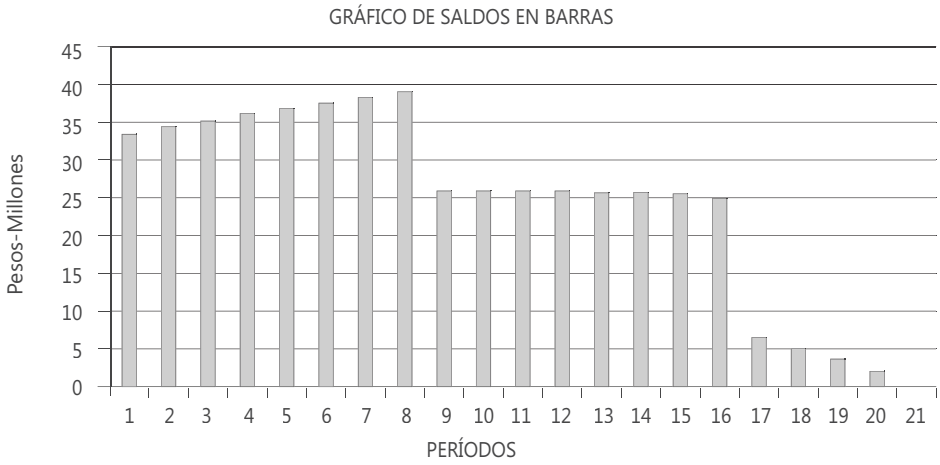


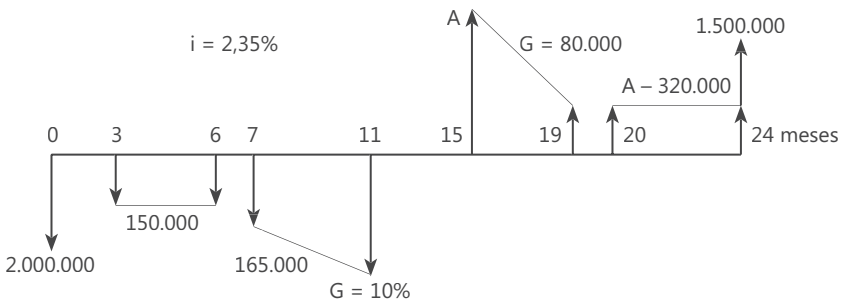
Gráfico 27 Saldos en barras.

Gráfico 28 Intereses de la amortización.

Problema 13

Hoy hice un depósito de $2.000.000. Dentro de tres meses iniciaré cuatro depósitos mensuales e iguales de $150.000. El sexto depósito tendrá un incremento del 10%, el mismo incremento para depósitos posteriores. Con esta modalidad haré en total cinco depósitos. Cuatro meses después del último depósito iniciaré una serie de retiros, empezando con una cantidad no determinada, pero cada mes posterior disminuiré el retiro en $80.000. De esta forma haré en total cinco retiros.

Los siguientes cinco retiros serán constantes y tendrán un valor igual al último retiro realizado en la modalidad anterior. Adicionalmente, en el último retiro haré un retiro extra de $1.500.000. Si la tasa financiera es del 2,35% mensual, ¿cuál es el valor del primer retiro? Elabore un cuadro con los saldos, los intereses, los depósitos y los retiros.



Cálculo del último retiro en el período 19 U = A – (n – 1) G U = A – (5 – 1) 80.000
U = A – 320.000 Este valor corresponde a la serie desde el periodo 20 hasta el 24.

[A(P/A; 2,35%, 5) –80.000(P/G; 2,35%,5)] (P/F, 2,35%, 14) + (A-320.000)(P/A, 2,35%, 5)
4,66596 9,11520 0,72239 4,66596

(P/F, 2,35%, 19) + 1.500.000 (P/F, 2,35%, 24) = 2.000.000 + 150.000(P/A, 2,35%, 4)
0,64318 0,57265 3,77561

(P/F, 2,35%, 2) +165.000 (P/C, 2,35%, 10%, 5) (P/F, 2,35%, 6)
0,95461 5,67213 0,86991

A = 625.097

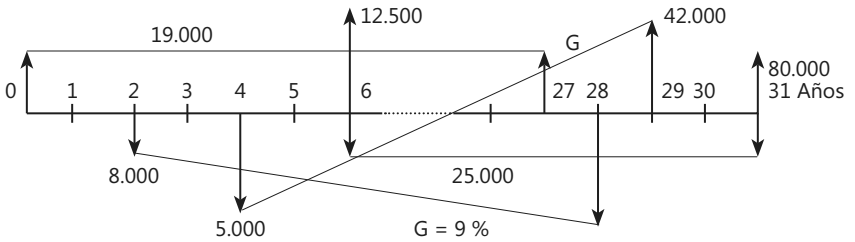
Mes	Saldo	Interés	Depósito	Retiro
0	2.000.000			
1	2.047.000	47.000		
2	2.095.105	48.105		
3	2.294.339	49.235	150.000	
4	2.498.256	53.917	150.000	
5	2.706.965	58.709	150.000	
6	2.920.579	63.614	150.000	
7	3.154.213	68.634	165.000	
8	3.409.837	74.124	181.500	
9	3.689.618	80.131	199.650	
10	3.995.939	86.706	219.615	
11	4.331.420	93.905	241.577	
12	4.433.208	101.788		
13	4.537.389	104.180		
14	4.644.017	106.629		
15	4.128.055	109.134		625.097
16	3.679.968	97.009		545.097
17	3.301.350	86.479		465.097
18	2.993.835	77.582		385.097
19	2.759.093	70.355		305.097
20	2.518.835	64.839		305.097
21	2.272.931	59.193		305.097
22	2.021.248	53.414		305.097
23	1.763.651	47.499		305.097
24	0	41.446		1.805.097

Ver problemas resueltos en Excel en el complemento virtual al libro.

PROBLEMAS PROPUESTOS GRADIENTES ARITMÉTICOS Y PORCENTUALES

Problema 14

Calcular el valor presente del siguiente flujo de caja. Interés = 18,3% anual E.



Respuesta: $18.896

Problema 15

Antonio está diseñando un plan de capitalización para tener dinero en el futuro y realizar una excursión. Necesitará disponer de $15.000.000 para realizarla dentro de 18 meses. Su plan consiste en abrir hoy una cuenta con $4.000.000. A partir del cuarto mes podrá hacer depósitos crecientes mensuales en un 5%, e iniciar estos depósitos con $200.000. En total hará cinco depósitos. Del décimo al decimosexto mes sus depósitos serán iguales y con un valor de $5.000.000. En el decimoséptimo mes no hará depósitos; en el decimoctavo tampoco, pero en este mes retirará todo el dinero acumulado. ¿Qué tasa financiera le garantiza este proyecto? Utilice el método de pruebas de ensayo y error y la interpolación lineal.

Respuesta: Tasa 4,4578% mensual.

COMPROBACIÓN CON UN CUADRO DE PAGOS				
n	**Saldo**	**Interés**	**Depósito**	**Retiro**
0	4.000.000		4.000.000	
1	4.178.311	178.311		
2	4.364.570	186.260		
3	4.559.133	194.563		
4	4.962.369	203.236	200.000	
5	5.393.580	221.211	210.000	
6	5.854.513	240.433	220.500	
7	6.347.019	260.981	231.525	
8	6.873.056	282.936	243.101	
9	7.179.441	306.385		
10	7.999.484	320.043	500.000	
11	8.856.083	356.599	500.000	
12	9.750.867	394.784	500.000	
13	10.685.538	434.671	500.000	
14	11.661.875	476.337	500.000	
15	12.681.735	519.860	500.000	
16	13.747.057	565.323	500.000	
17	14.359.870	612.812		
18	0	640.130		15.000.000

Problema 16

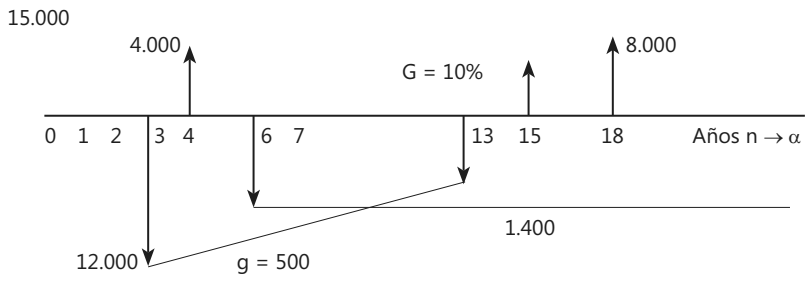
Un padre de familia desea que su hijo menor estudie su carrera de Ingeniería Civil en la Universidad de los Andes. Esta carrera tiene una duración de 8 semestres. La primera matrícula semestral costará $3.800.000, y crece por efecto de la inflación a razón del 3,4% semestral. Su hijo tiene pensado ingresar a la universidad dentro de tres años. Para lograr su objetivo, abre una cuenta de ahorros hoy con $2.500.000 en una entidad financiera que le reconoce una tasa del 5,50% semestral E. Además, hará depósitos semestrales crecientes de $700.000, cada vez, y los iniciará el primer semestre. ¿Cuál debe ser el valor del primer depósito en el primer semestre para tener el dinero disponible para toda la carrera? El último depósito lo hará cuando pague la primera matricula.

Comprobación con un cuadro de pagos, Tasa: 0,055

n	Saldo	Interés	Depósito	Retiro
0	2.500.000			
1	4.614.077	137.500	1.976.577	
2	7.544.428	253.774	2.676.577	
3	11.335.948	414.944	3.376.577	
4	16.036.001	623.477	4.076.577	
5	21.694.558	881.980	4.776.577	
6	24.564.336	1.193.201	5.476.577	3.800.000
7	21.986.174	1.351.038		3.929.200
8	19.132.621	1.209.240		4.062.793
9	15.983.987	1.052.294		4.200.928
10	12.519.347	879.119		4.343.759
11	8.716.464	688.564		4.491.447
12	4.551.713	479.406		4.644.156
13	0	250.344		4.802.058

Problema 17

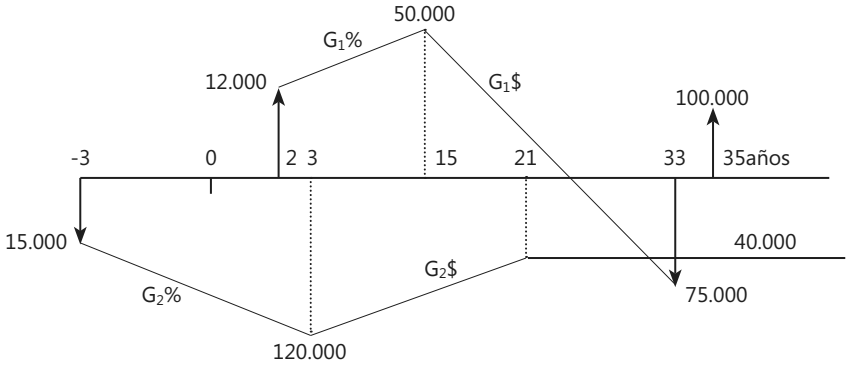
Calcule el valor presente del siguiente flujo de caja. i = 13,5% anual E.



Respuesta: $19.831

Problema 18

Calcule el valor presente del siguiente flujo de caja. i =15,5% anual E.



Respuesta: $G_1\%$ = 11,60%; $G_2\%$ = 41,42%; G_1 = $6.944,44; G_2 $=2.500; V.P. = - 644.108.

Problema 19

Si una compañía gasta $12.000 ahora y $5.000 anualmente durante 10 años, efectuando el primer gasto de $5.000 dentro de cuatro años, ¿qué tasa de retorno obtendría si su ingreso fuera de $4.000 anuales, empezando en el octavo año y continuando hasta el año 25, pero del segundo ingreso en adelante tendrá incrementos del 1,5% cada vez? Resuelva el problema por prueba de ensayos.
Respuesta: 2,85% anual.

Problema 20

Un empresario compró una retroexcavadora con el propósito de ofrecer servicio de movimientos de tierra. Pagó US$50.000 por la máquina y la vendió cinco años después por US$33.000. Sus gastos de operación y mantenimiento fueron de US$13.500 anuales. Además, le hizo mantenimiento al motor por US$900 al final del tercer año. Si su ingreso, mientras fue propietario de la máquina, fue de US$21.000 el primer año, y luego cada ingreso se incrementó en 15% cada año, ¿cuál fue su tasa de retorno? Resuelva el problema por prueba de ensayos y error.
Respuesta: 21,86% anual E.

Problema 21

Una familia compró una casa vieja por $25.000 con la idea de hacerle mejoras y luego venderla para negocio. En el primer año gastaron $5.000 en mejoras, $1.000 en el segundo y $3.000 en el tercero. Pagaron, además, impuestos de $1.800 pesos

anuales durante los tres años. Finalmente, la vendieron en $40.000. ¿Qué tasa de retorno obtuvieron de su inversión? Los ingresos anuales por arrendamiento fueron de $7.000 el primer año, e incrementos anuales sucesivos del 20%.
Respuesta: 28,30% anual E.

Problema 22

Para financiar las cinco matrículas semestrales de una especialización, hace un año abrí una cuenta de ahorros con $2.100.000. A partir de hoy, y durante cuatro semestres (total cuatro depósitos), depositaré $500.000, e incrementos semestrales de $100.000 cada vez. La especialización la iniciaré dentro de tres años, para lo cual debo pagar la primera matrícula semestral. Cada matrícula subirá en cada semestre un 4,67%. La tasa financiera es del 4,71% semestral E ¿Cuál es el valor de las matrículas?
Respuesta: $1.238.885; $1.296.741; $1.357.299; $1.420.685; $1.487.031.

Problema 23

Usted quiere constituir un fondo para poder retirar, a perpetuidad, a partir del décimo año y trimestralmente, $2.000.000, y empieza al final del primer trimestre del décimo año. Usted considera la posibilidad de hacer siete depósitos anuales, desde hoy, además conoce que la tasa que podrá negociar es del 30,2% anual C.M. ¿Cuál debe ser el depósito inicial (hoy) si cada año los podrá incrementar en un 20%?
Respuesta: Tasa: 7,7416% trimestral E; depósito hoy: $257.757.

Problema 24

Juan pagó hoy la cuota número 38 de su apartamento. En el extracto le aparecen estas condiciones: plazo total del crédito: seis años; tasa de interés del 18% anual C.M.; cuotas mensuales decrecientes cada mes en un 0,8%. La cuota cancelada fue de $152.000.

a) ¿Cómo están discriminadas (valor, interés, amortización, saldo) de las dos próximas cuotas?
b) Si quisiera que las cuotas fueran constantes a partir de la cuota 39, ¿qué valor tendrían estas cuotas?

Respuesta: Saldo después de cancelar la cuota 38: $3.548.512

a. Próximas cuotas:

n	Saldo	Interés	Depósito	Retiro
38	3.548.512	54.687	152.000	97.313
39	3.450.955	53.228	150.784	97.556
40	3.353.142	51.764	149.587	97.813
41	3.255.058	50.297	148.381	98.084
42	3.156.690	48.826	147.194	98.368

b. $133.998

PROBLEMAS CON GRADIENTES ARITMÉTICOS, GEOMÉTRICOS Y CON PERÍODOS DIFERENTES

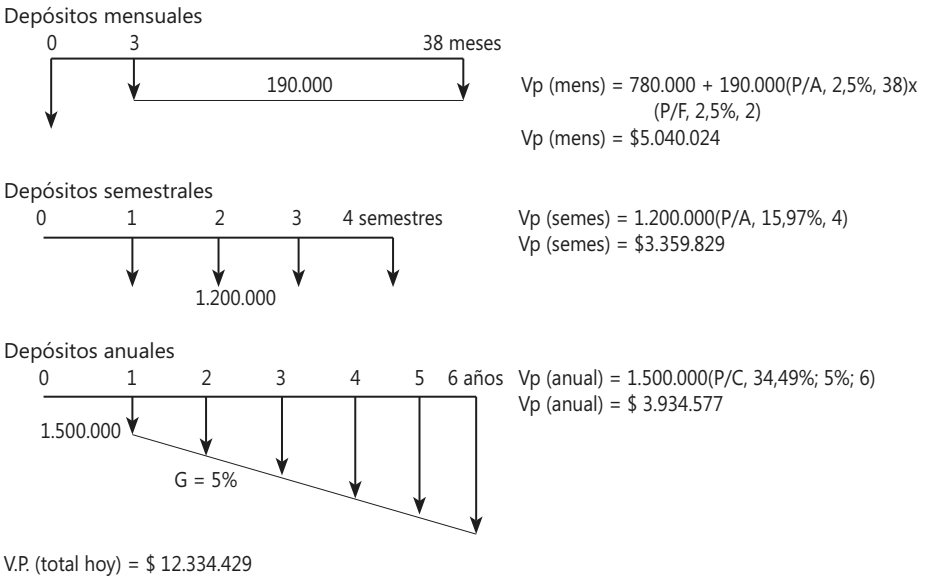
Nota: Recuerde que para cada período de pago debe utilizar la tasa de interés efectiva correspondiente a cada período.

Problema 25

Hoy se abre una cuenta con $780.000. Cada mes depositará $190.000, empezando en el tercer mes. Depositará hasta el mes 38. Además de los depósitos mensuales, cada semestre ahorrará $1.200.000. Depositará sólo los cuatro primeros semestres. Cada año, iniciando dentro de un año y durante seis años, depositará $1.500.000, pero cada año crecen en un 5%. Si la tasa financiera es del 2,5% mensual, ¿cuál es el valor presente de estos depósitos?

Solución:

Conversión de tasas. Tasa = 2,50% Mensual
15% Semestral C.M. 15,97% Semest. E
30% Anual C.M. 34,49% Anual E.



Problema 26

Hoy se abre una cuenta con $1.920.000. Cada mes depositará $250.000, empezando en el cuarto mes. Depositará hasta el mes 40. Además de los depósitos mensuales,

cada semestre ahorrará $1.950.000. Depositará sólo los cinco primeros semestres. Cada año, y durante tres años, iniciando dentro de un año, depositará $990.000, pero cada año crecen en un 6%. Si la tasa financiera es del 2,3% mensual, ¿Cuál es el valor presente de estos depósitos?
Respuesta: $16.144.162.

Problema 27

Se proyecta una inversión así: valor de la maquinaria y equipos: $100.000.000; costo de instalación: $30.000.000; gastos de mano de obra: $1.500.000 mensuales. Se espera que la empresa tenga pérdidas anuales decrecientes, que empiece con una cantidad aún no determinada, pero cada año decrecen en $3.000.000. Estas pérdidas ocurren desde el primero hasta el quinto año. En este quinto año las pérdidas serán de cero pesos. A partir del sexto año, se esperan ingresos crecientes porcentualmente cada año, empezando con un ingreso de $50.000.000 y terminando con $920.000.000.

Se calcula que la empresa durará 20 años, pero debe hacer reparaciones cada semestre por un valor de $2.000.000. Si la tasa de interés es del 25% anual C.M., ¿cuál es el valor presente de esta inversión?, ¿cuál es el valor de la pérdida en el primer año y cuál el porcentaje de crecimiento de los ingresos?
Respuesta: 2,0833% mensual; 28,0732% anual E; 13,1694% Sem. E.

V.P. (pérdida) $-104.527.30; pérdida primer año: $12.000.000; crecimiento: 23,124%.

Problema 28

Usted planea realizar una serie de ahorros para disponer de un capital en el futuro. Abre hoy una cuenta que le pagará el 18,5% anual efectivo. La cuenta la abre con $1.000.000. El primer depósito mensual lo hará en el quinto mes, iniciando con $600.000, y cada mes posterior disminuirá el depósito en un 3%. Hará un total de 32 depósitos mensuales. Además de los depósitos mensuales, cada semestre ahorrará la prima que se estima en un promedio de $850.000. Depositará sólo las primeras cinco primas semestrales. Cada año depositará sus cesantías, iniciando dentro de un año, con $1.700.000, pero cada año crecen en un 10%. ¿Cuál es el valor acumulado cuando haga el último depósito?

Respuesta: Tasas	18,50%	Anual E	17,0949%	Anual C.M
	8,5475%	Sem. C.M	8,8577%	Sem. E.
	1,4246%	Mensual		

Valor acumulado mes 36: $30.053.340.

Problema 29

Durante cinco años, y desde hoy, usted deposita cada semestre la cantidad de $800.000. Al final de cada año usted retirará $900.000. Trimestralmente, empe-

zando en el cuarto trimestre y hasta el final del cuarto año, depositará $200.000 la primera vez, y cada trimestre aumentará el depósito en $60.000. Si la tasa pactada es del 27% anual C.M. ¿Cuál será el saldo al final del quinto año?

Respuesta: Tasas 27% anual C.M
13,50% Semest. C.M. 14,28% Semt. E
6,75% Trimest. C.M 6,90% Trimest. E

Saldo al final del quinto año: $31.915.125

Problema 30

Un individuo obtiene en préstamo $8.000.000 a una tasa de interés de un 12% anual C.T., y desea reembolsar el dinero efectuando diez pagos semestrales decrecientes cada semestre en un 7%, empezando con cierta cantidad. El primer pago sería hecho dos años después de recibir el dinero. Además, al final del tercer año pagará una cuota adicional extra de $500.000 ¿cuál sería el monto de los pagos semestrales?

Respuesta: Tasas 12% anual C.T.; 6% Semest. C.T.; 6,090% Sem. E

Cuotas: $1.633.262, $1.518.934, $1.412.609, $1.313.726, $1.221.765, $1.136.242, $1.056.705, $982.735, $913.944, $849.968.

Gradientes geométricos escalonados: crecientes o decrecientes

Son flujos de caja seriados, ingresos o egresos, que permanecen constantes, por ejemplo, durante los 12 meses de cada año, pero cada año aumentan o disminuyen un porcentaje constante. Al aumento o la disminución porcentual se llama gradiente porcentual (G%).

Problema 31

Durante cinco años se hacen pagos mensuales así: el primer año se realizan 12 pagos mensuales de $100.000, pero para el segundo año se aumentan en un 10% y permanecen constantes los doce meses del año. Para el tercer año de nuevo aumentan un 10% y permanecen constantes y así sucesivamente. En estas condiciones los pagos mensuales de cada año y la gráfica de ellos serían:

Año	Meses	Valor mensual
1	1 al 12	100.000
2	13 al 24	110.000
3	25 al 36	121.000
4	37 al 48	133.100
5	49 al 60	146.410

Número de períodos del gradiente: 5 años
Subperíodos de los pagos: 12 meses

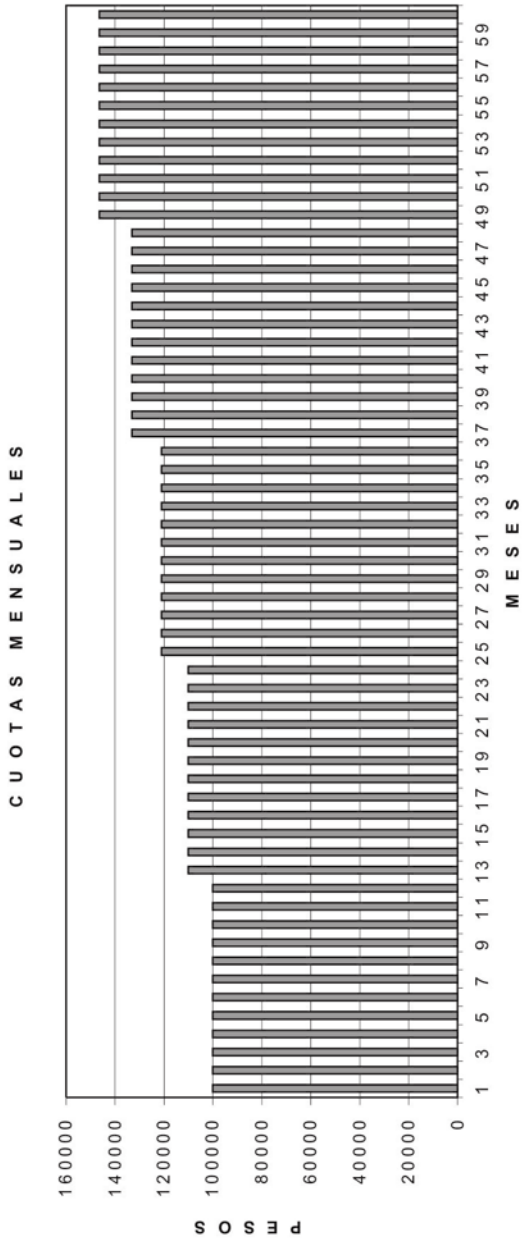


Gráfico 29 Cuotas mensuales.

Problema 32

Pagos trimestrales durante cinco años. Los pagos del primer año serán de $150.000 trimestrales, pero cada año estos pagos disminuyen en un 5% y permanecen constantes durante el segundo año. Para el tercer año de nuevo disminuyen un 5% y permanecen constantes, y así sucesivamente.

En estas condiciones los pagos trimestrales de cada año serían:

Año	Trimestres	Valor trimestral
1	1 al 4	150.000
2	5 al 8	142.500
3	9 al 12	135.375
4	13 al 16	128.606
5	17 al 20	122.176

Número de períodos del gradiente: cinco años
Subperíodos de los pagos: cuatro trimestres

Problema 33

Durante seis semestres se hacen pagos bimestrales así: el primer semestre realizar tres pagos bimestrales de $200.000, pero para el segundo semestre se aumentan en un 8% y permanecen constantes los tres bimestres del semestre. Para el tercer semestre de nuevo aumentan un 8% y permanecen constantes, y así sucesivamente.

En estas condiciones los pagos bimestrales de cada semestre y la gráfica de ellos serian:

Año	Bimestres	Valor trimestral
1	1 al 3	200.000
2	4 al 6	216.000
3	7 al 9	233.280
4	10 al 12	251.942
5	13 al 15	272.098
6	16 al 18	293.866

Número de periodos del gradiente: 6 semestres
Subperiodos de los pagos: 3 bimestres

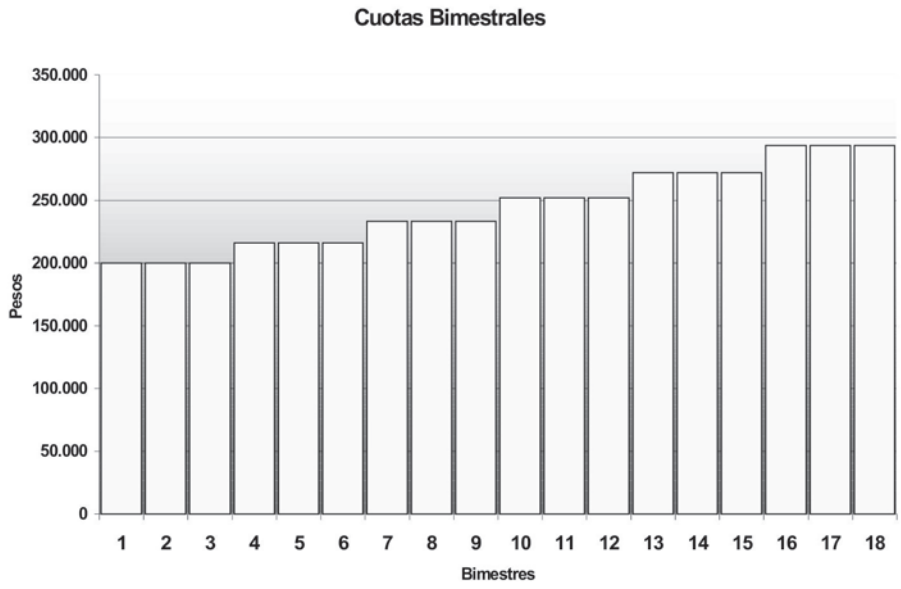


Gráfico 30 Cuotas bimestrales.

Presentación general del gradiente geométrico escalonado

Se toma un crédito de $P para cancelarlo en N años y en cuotas mensuales iguales (podrían ser también semestrales, trimestrales etcétera; estos se llaman subperiodos de pagos). Cada año las cuotas del subperíodo se incrementan o disminuyen un porcentaje constante. En el año siguiente de nuevo permanecen constantes las cuotas del los subperiodos. Para el tercer año aumentan de nuevo o disminuyen el mismo porcentaje y de nuevo las cuotas de los subperiodos permanecen constantes, y así sucesivamente hasta llegar a las cuotas del último año.

El incremento o disminución porcentual de las cuotas será de ± G% anual (utilizamos + G% si hay crecimiento o -G% si las cuotas disminuyen). La tasa financiera es del i% anual E.

Nomenclatura:

P: Valor del préstamo hoy.

N: Plazo total del crédito en años (número de veces que ocurre el gradiente).

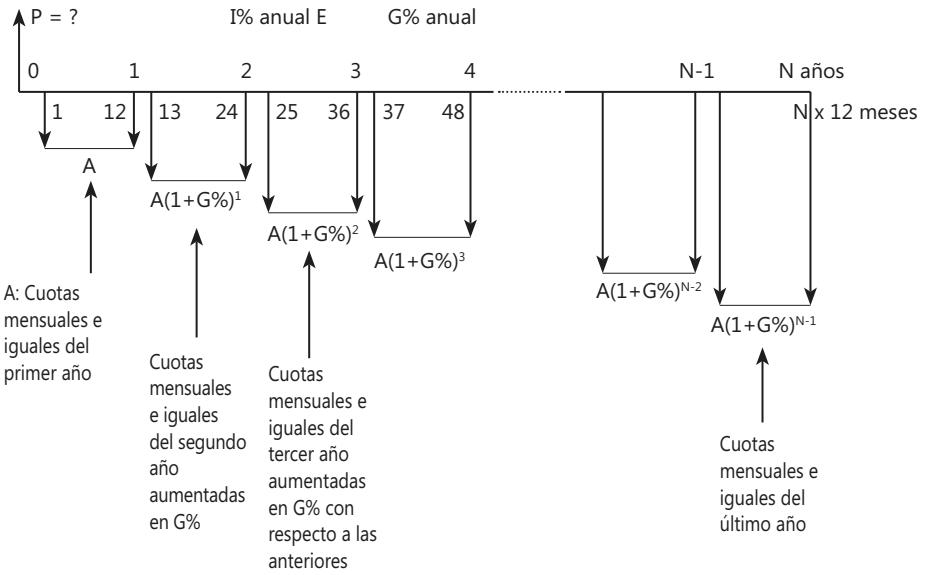
I%: Tasa financiera anual E. Se aplica en los factores que manejen el tiempo en años.

$i\%_{mensual}$: Tasa financiera mensual o del subperíodo. Se obtiene de la Tasa anual E.

A: Cuotas mensuales (o de los subperiodos) del primer año.

± G%: Crecimiento o decrecimiento porcentual de las cuotas cada año.

C1: Valor futuro de las cuotas mensuales (o de los subperiodos del primer año). Se obtiene con la formula A(F/A, i%mensual, n). Este valor futuro es un pago único equivalente a las cuotas mensuales y colocadas al final del primer año. Constituye el primer pago anual de un gradiente geométrico simple, es decir, no escalonado.



Observe que las cuotas de cada año son iguales a las del primer año (A) multiplicadas por el factor (1+G%)N-1, donde N es el numero del año al cual pertenecen.

Fórmula: Cuotas del año K = $A\ (1 + G\%)^{K-1}$

Fórmula para calcular el valor presente de un gradiente geométrico o porcentual escalonado

P = A (F/A, i% subperíodo, n) (P/C1, i% Anual E, ± G%, N)

La fórmula de F/A la calculamos en el programa financiero de la calculadora.

La fórmula de P/C_1 la calculamos con el programa que elaboramos anteriormente cuando iniciamos el estudio de los gradientes porcentuales al comienzo de capítulo.

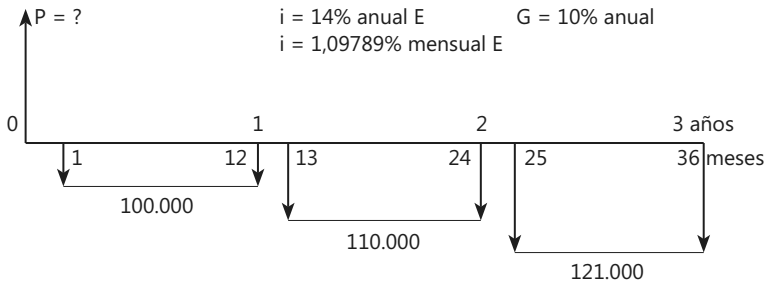
En el factor P/C_1, utilizamos + G% si las cuotas son crecientes o – G% si las cuotas son decrecientes.

Problema 34

Se toma un crédito hoy para pagarlo en tres años en cuotas mensuales así: Las cuotas del primer año serán de $100.000 cada una; las del segundo año aumentarán un 10%, pero serán iguales durante este año; las del tercer año también aumentarán con respecto a las anteriores en el mismo porcentaje y serán constantes todo el año. Si la tasa financiera es del 14% anual E, ¿cuál será el valor del préstamo?

Solución: Primero transformemos la tasa anual en mensual.

Tasa = 14% anual E ⟶ Tasa = 1,09789% mensual E



Presentación de la ecuación utilizando factores:

$$P = A\,(F/A,\ i\%_{subperíodo},\ n)(P/C1,\ i\%\ anualE,\ \pm G\%,\ N)$$

$$P = 100.000\,(F/A,\ 1{,}09789\%_{mensual},\ 12)(P/C_1,\ 14\%_{anual\ E},\ 10\%,\ 3)$$

$$12{,}75179 \qquad 2{,}5403228$$

$$P = 3.239.366$$

Presentación de la ecuación utilizando las fórmulas:

$$P = A\left[\frac{\left(1 + i_{mens}\right)^{n} - 1}{i_{mens}}\right]\left\{\frac{1 - \left[\dfrac{1 + G}{1 + i_{anualE}}\right]^{N}}{i_{anualE} - G}\right\}$$

$$(F/A,\ i\%_{subperíodo},\ n)\ (P/C1,\ 14\%_{anual\ E},\ 10\%,\ 3)$$

$$P = 100.000\left[\frac{\left(1 + 0{,}09789\right)^{12} - 1}{0{,}09789}\right]\left\{\frac{1 - \left[\dfrac{1 + 0{,}10}{1 + 0{,}14}\right]^{3}}{0{,}14 - 0{,}10}\right\}$$

CUADRO DE PAGOS				
Meses	**Saldo**	**Interés**	**Cuota**	**Amortización**
0	3.239.366	0	0	0
1	3.174.931	35.565	100.000	64.435
2	3.109.788	34.857	100.000	65.143
3	3.043.930	34.142	100.000	65.858
4	2.977.349	33.419	100.000	66.581
5	2.910.037	32.688	100.000	67.312
6	2.841.985	31.949	100.000	68.051
7	2.773.187	31.202	100.000	68.798
8	2.703.634	30.447	100.000	69.554
9	2.633.317	29.683	100.000	70.317
10	2.562.227	28.911	100.000	71.089
11	2.490.358	28.130	100.000	71.870
12	2.417.699	27.341	100.000	72.659
13	2.334.243	26.544	110.000	83.456
14	2.249.870	25.627	110.000	84.373
15	2.164.571	24.701	110.000	85.299
16	2.078.335	23.765	110.000	86.235
17	1.991.153	22.818	110.000	87.182
18	1.903.014	21.861	110.000	88.139
19	1.813.907	20.893	110.000	89.107
20	1.723.821	19.915	110.000	90.085
21	1.632.747	18.926	110.000	91.074
22	1.540.672	17.926	110.000	92.074
23	1.447.587	16.915	110.000	93.085
24	1.353.480	15.893	110.000	94.107
25	1.247.340	14.860	121.000	106.140
26	1.140.034	13.694	121.000	107.306
27	1.031.550	12.516	121.000	108.484
28	921.875	11.325	121.000	109.675
29	810.996	10.121	121.000	110.879
30	698.900	8.904	121.000	112.096
31	585.573	7.673	121.000	113.327
32	471.002	6.429	121.000	114.571
33	355.173	5.171	121.000	115.829
34	238.072	3.899	121.000	117.101
35	119.686	2.614	121.000	118.386
36	0	1.314	121.000	119.686

El anterior cuadro de pagos se realizó en Excel. Veamos algunos gráficos también elaborados en Excel.

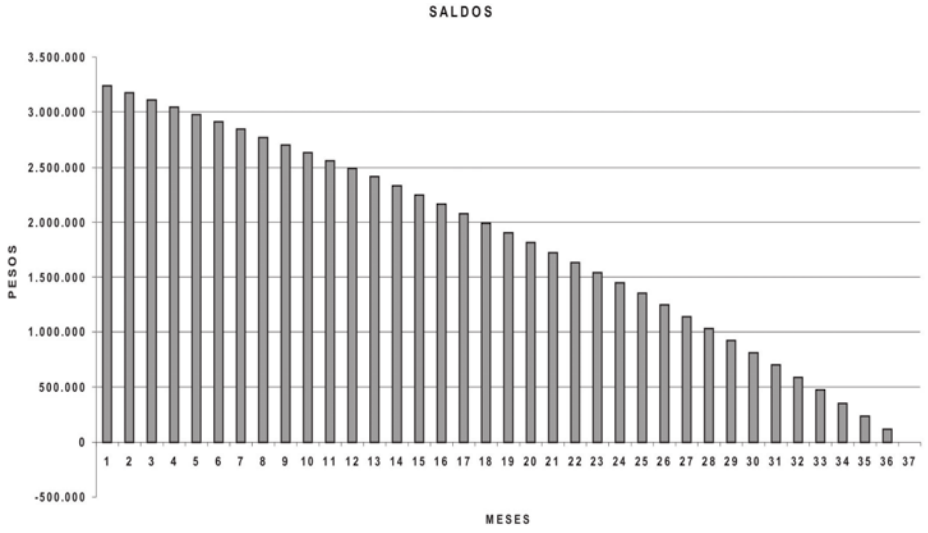


Gráfico 31 Saldos.

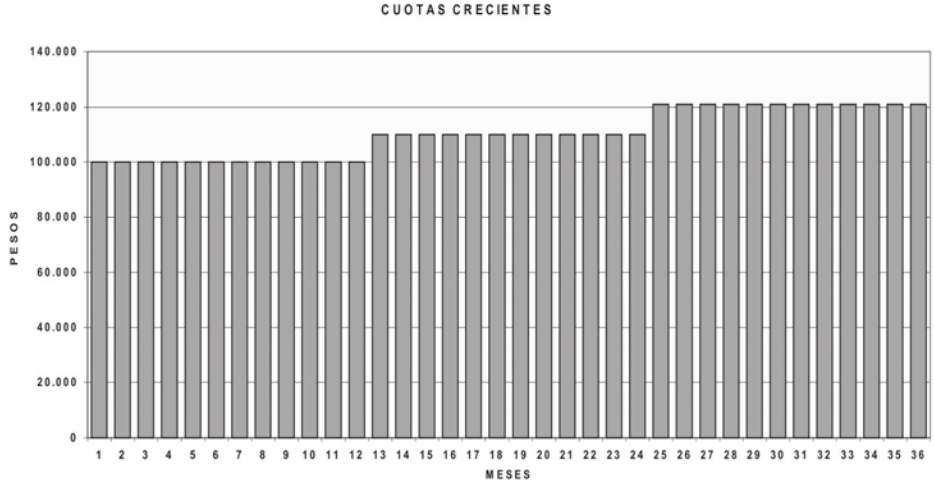


Gráfico 32 Cuotas crecientes.

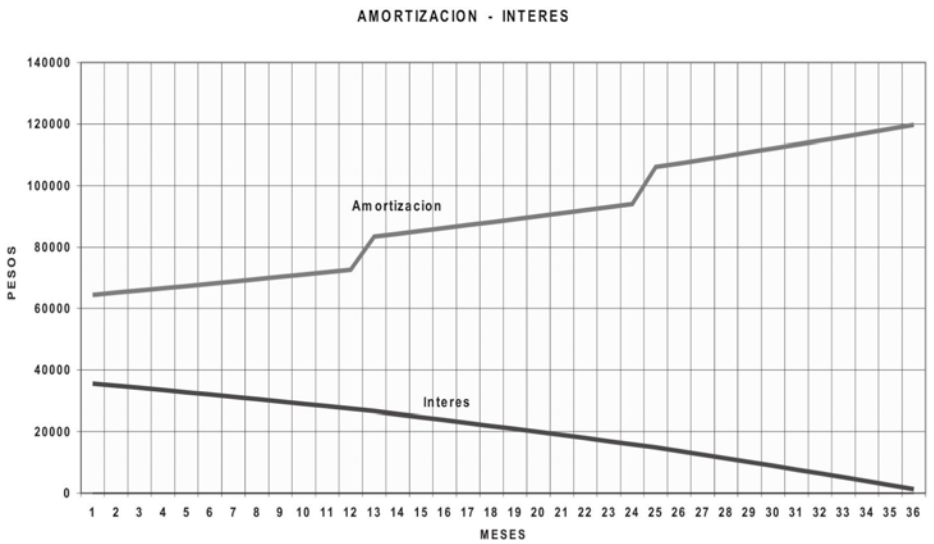


Gráfico 33 Amortización intereses.

Problema 35

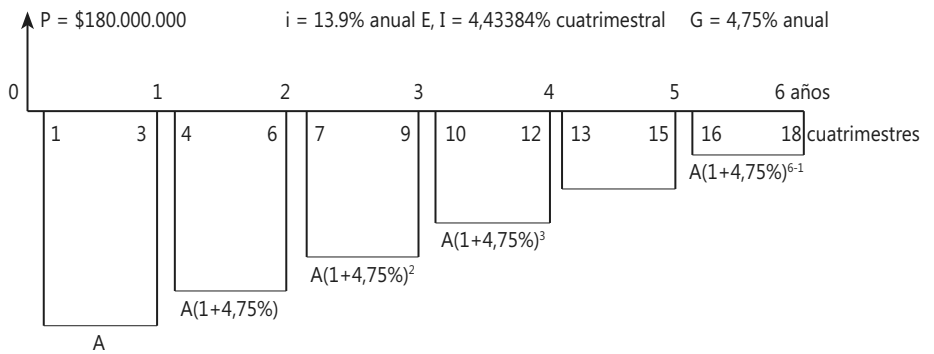
Hoy se financió un proyecto que tiene un valor de $180.000.000. Esta financiación se pagará en seis años con cuotas cuatrimestrales y constantes durante cada año, pero cada año disminuirán en el 4,75%. La tasa financiera es del 13,9% anual E. ¿Cuál será el valor de las cuotas cuatrimestrales de cada año y cuál será el saldo de la deuda cuando cancele la novena cuota?

Solución:

Primero busquemos la tasa cuatrimestral E.

$$i = 13{,}9\% \text{ anual E} \longrightarrow i = 4{,}43384\% \text{ cuatrimestral}$$

Diagrama:



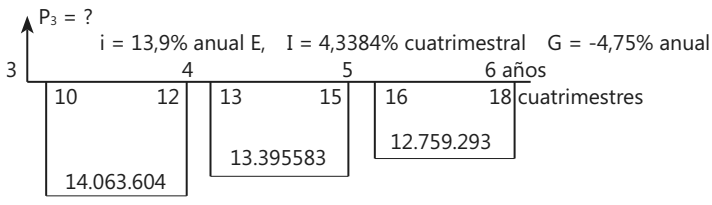
$$P = A\ (F/A,\ i\%_{subperíodo},\ n)(P/C1,\ i\%_{anual\ E},\ \pm G\%,\ N)$$
$$180.000.000 = A\ (F/A,\ 4{,}43384\%,\ 3)\ (P/\ C1,\ 13{,}9\%_{Anual\ E},\ -4{,}75\%,\ 6)$$
$$3{,}13498 \quad 3{,}52806$$
$$180.000.000 = 11{,}0604\ A \rightarrow A = 16.274.277$$

COMPROBACIÓN CON EL CUADRO DE PAGOS				
n(cuatrim)	**Saldo**	**Interés**	**Cuota**	**Amortización**
0	180.000.000			
1	171.706.633	7.980.909	16.274.277	8.293.367
2	163.045.552	7.613.196	16.274.277	8.661.081
3	154.000.453	7.229.177	16.274.277	9.045.099
4	145.327.337	6.828.132	15.501.248	8.673.116
5	136.269.668	6.443.580	15.501.248	9.057.668
6	126.810.398	6.041.978	15.501.248	9.459.271
7	117.668.027	5.622.569	14.764.939	9.142.370
8	108.120.299	5.217.211	14.764.939	9.547.728
9	98.149.240	4.793.880	14.764.939	9.971.059
10	88.437.415	4.351.779	14.063.604	9.711.825
11	78.294.983	3.921.173	14.063.604	10.142.432
12	67.702.852	3.471.473	14.063.604	10.592.131
13	57.309.104	3.001.835	13.395.583	10.393.748
14	46.454.514	2.540.993	13.395.583	10.854.590
15	35.118.649	2.059.718	13.395.583	11.335.865
16	23.916.461	1.557.104	12.759.293	11.202.189
17	12.217.585	1.060.417	12.759.293	11.698.876
18	0	541.708	12.759.293	12.217.585

Cálculo del saldo después de cancelar la novena cuota:

Después de cancelada la novena cuota (corresponde a la ultima del tercer año), se deben 9 cuotas que corresponden a los años 4, 5 y 6. Los valores de estas cuotas fueron calculados previamente.

Para calcular el valor presente en el tercer año, llevamos a VP las cuotas escalonadas adeudadas, utilizando la formula general del gradiente escalonado.



$$P = A(F/A,\ i\%\ subperíodo,\ n)\ (P/C_1,\ 1\%Anual\ E,\ \pm G\%,\ N)$$
$$P_3 = 14.063.604(F/A,\ 4{,}43384\%,\ 3)(P/C_1,\ 13{,}9\%\ Anual\ E,\ -4{,}75\%,\ 3)$$
$$3{,}13498 \qquad 2{,}2261549$$
$$P_3 = \$98.149.206$$

La diferencia de $34 que se presenta se debe a la cantidad de decimales utilizados en los cálculos. Esta diferencia es insignificante. Ver el cuadro de pagos anterior.

Problema 36

Hoy se pagó la cuota 21 de un crédito. El valor de esta cuota fue de $450.000. El crédito se tomó a ocho años para pagarlo en cuotas bimestrales. Durante los primeros seis años las cuotas de anuales son constantes pero cada año crecen un 8% anual con respecto a las del año anterior.

Para los dos últimos años las cuotas permanecerán constantes.

Además se pagarán tres cuotas extras de $1.000.000, $2.000.000 y $3.000.000 en los meses 16, 30 y 38, respectivamente. La tasa financiera es del 17,3% anual E. ¿Cuánto dinero le prestaron?

Primero calculemos la tasa Bimestral: i% = 17,3% anual E; i% = 2,69508% Bimestral E.

Calculemos las cuotas bimestrales de cada año.

Notas para el procedimiento:

1. La cuota 21 corresponde a las cuotas del cuarto año. Cada año tiene seis cuotas bimestrales. Las del cuarto año inician en el bimestre 19 y terminan en el 24.
2. Para calcular las del quinto año, multiplicamos $450.000 por (1+ 8%), para realizar el incremento. Para las del sexto año hacemos la misma operación, tomando como base las del quinto año.

   Las de los dos últimos años permanecen constantes e iguales a las del sexto año.
3. Para calcular las de años anteriores al cuarto año hacemos la operación contraria: dividimos la cuota de los bimestres de este año por (1 + 8%), y así sucesivamente.

Ver el cuadro siguiente.

Año	Bimestres	Cálculo cuota	Valor
1	1 al 6	385.802/(1 + 8%)	357.225
2	7 al 12	416.667/(1 + 8%)	385.802
3	13 al 18	450.000/(1 + 8%)	416.667
4	19 al 24	450.000	450.000
5	25 al 30	450.000(1 + 8%)	486.000
6	31 al 36	486.000(1 + 8%)	524.880
7 y 8	37 al 48	524.880	524.880

También las podemos calcular con la fórmula de última cuota del gradiente porcentual.

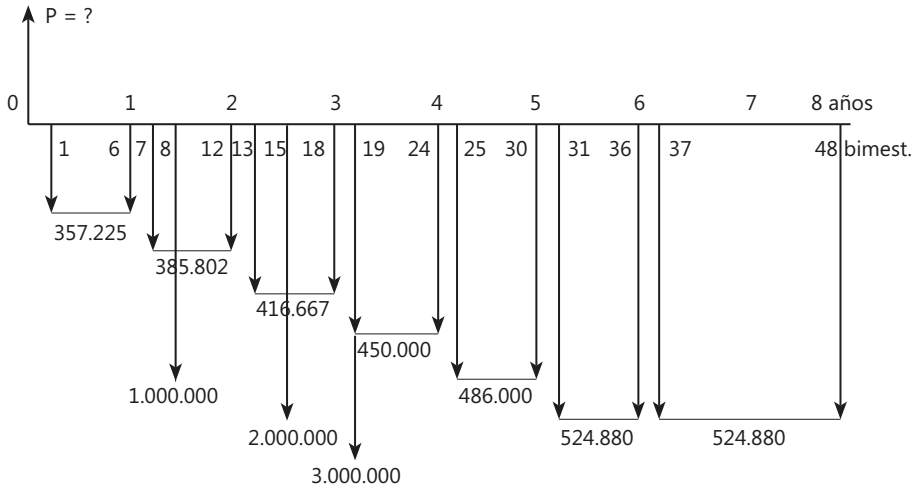
$$\text{Cuota } K = C_1 (1 + G)^{K-1}$$

Ejemplo, cuotas del primer año a partir de las cuotas del cuarto año, que es la conocida.

$$450.000 = C_1 (1 + 0{,}08)^{4-1} \qquad C_1 = 357.225$$

Los periodos de las cuotas extras se colocarán en bimestres equivalentes a los meses 16 (bimestre 8), 30 (bimestre 15) y 38 (bimestre 19).

i% = 17,3% anual E, i% = 2,6951% bimestral G = 8% anual



$$P = 357.225.\ (F/A,\ 2.6951\%\ \text{bim.}\ 6)(P/C_1,\ 17{,}3\ \text{anual E},\ 8\%,\ 6) + 524.880(P/A,\ 2.6951\%,\ 12\ \text{bim})$$

6,41909 4,202231 10,13763

$$(P/F,\ 2.6951\%,\ 36) + 1.000.000(P/F,\ 2.6951\%,\ 8) + 2.000.000(P/F,\ 2.6951\%,\ 15) + 3.000.000(P/F,\ 2.6951\%,\ 19)$$

0.38389 0.80835 0.67104 0.60333

$$P = 15.639.062$$

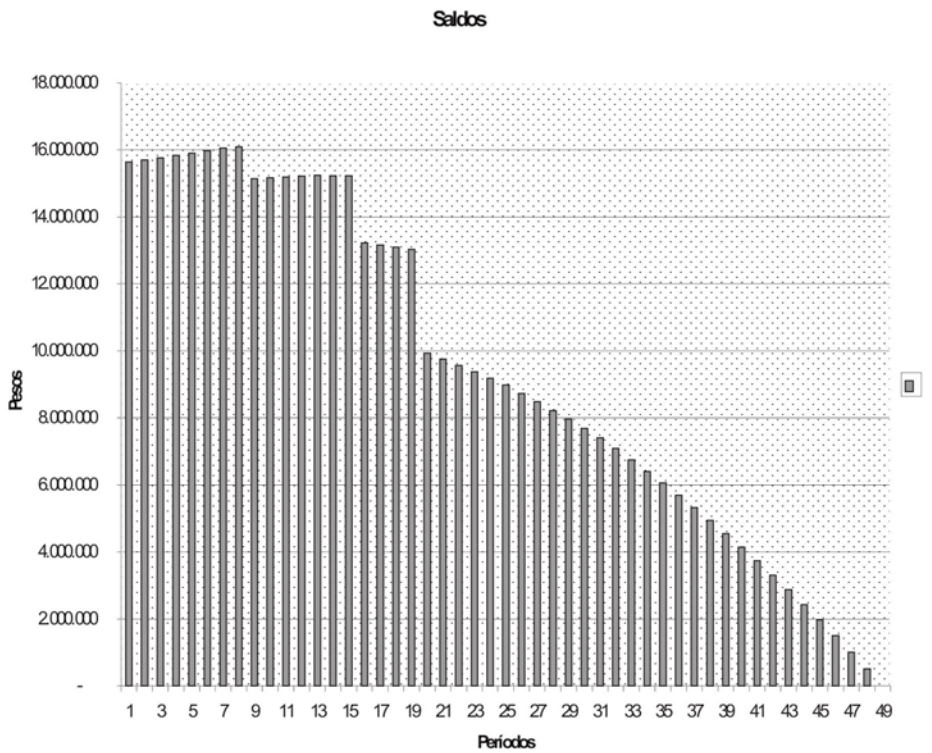


Gráfico 34 Saldos.

Se puede observar que con las primeras cuotas bimestrales no cubre el valor de los intereses. Por tanto, el saldo es creciente hasta el bimestre 12.

De igual manera, se puede observar el efecto económico que tienen las cuotas extras en el saldo.

Los créditos que desde un comienzo no amortizan la deuda fueron cuestionados por la Corte Constitucional.

Deuda inicial	$15.639.062
Tasa bimestral	0,026951
Plazo en años	8
Crecimiento de la cuota cada año	0,08
Subperíodos de pagos	6

Período	Saldo	Interés	Cuota	Amortización	Cuota Extra
0	15.639.062	-	-	-	
1	15.703.327	421.488	357.224	64.265	
2	15.769.323	423.220	357.224	65.997	
3	15.837.098	424.999	357.224	67.775	

4	15.906.700	426.826	357.224	69.602	
5	15.978.178	428.701	357.224	71.478	
6	16.051.582	430.628	357.224	73.404	
7	16.098.386	432.606	385.802	46.804	
8	15.146.452	433.868	385.802	951.934	1.000.000,00
9	15.168.863	408.212	385.802	22.410	
10	15.191.877	408.816	385.802	23.014	
11	15.215.511	409.436	385.802	23.635	
12	15.239.783	410.073	385.802	24.272	
13	15.233.845	410.727	416.666	5.938	
14	15.227.746	410.567	416.666	6.099	
15	13.221.483	410.403	416.666	2.006.263	2.000.000,00
16	13.161.150	356.332	416.666	60.334	
17	13.099.190	354.706	416.666	61.960	
18	13.035.560	353.036	416.666	63.630	
19	9.936.883	351.321	449.999	3.098.678	3.000.000,00
20	9.754.692	267.809	449.999	182.190	
21	9.567.592	262.899	449.999	187.100	
22	9.375.449	257.856	449.999	192.143	
23	9.178.128	252.678	449.999	197.321	
24	8.975.488	247.360	449.999	202.639	
25	8.731.388	241.898	485.999	244.101	
26	8.480.708	235.320	485.999	250.679	
27	8.223.273	228.564	485.999	257.435	
28	7.958.899	221.625	485.999	264.374	
29	7.687.400	214.500	485.999	271.499	
30	7.408.584	207.183	485.999	278.816	
31	7.083.374	199.669	524.879	325.210	
32	6.749.399	190.904	524.879	333.975	
33	6.406.423	181.903	524.879	342.976	
34	6.054.204	172.660	524.879	352.219	
35	5.692.492	163.167	524.879	361.712	
36	5.321.031	153.418	524.879	371.461	
37	4.939.559	143.407	524.879	381.472	
38	4.547.806	133.126	524.879	391.753	
39	4.145.495	122.568	524.879	402.311	
40	3.732.342	111.725	524.879	413.154	
41	3.308.053	100.590	524.879	424.289	
42	2.872.329	89.155	524.879	435.724	
43	2.424.862	77.412	524.879	447.467	
44	1.965.336	65.352	524.879	459.526	
45	1.493.425	52.968	524.879	471.911	
46	1.008.795	40.249	524.879	484.630	
47	511.104	27.188	524.879	497.691	
48	0	13.775	524.879	511.104	

Problema 37

Considerar el siguiente plan de depósitos en una cuenta que paga el 27% anual efectiva. Se abre la cuenta con un depósito de $500.000. En los próximos cinco años se depositará cada mes la cantidad de $100.000 mensuales durante el primer año; cada año se hará un incremento del 10%, pero las cuotas mensuales de cada año serán constantes, y así sucesivamente. Adicionalmente, en cada semestre se hará un depósito extra de $500.000, aprovechando las primas laborales. El dinero acumulado se retirará en cinco cuotas trimestrales iguales, iniciando los retiros al final del octavo año. ¿Cuál será el valor de los retiros?

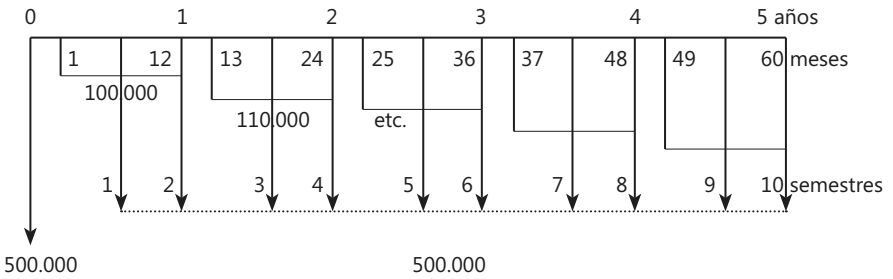
Respuesta: A = $11.084.619

Solución: en el problema debemos considerar tres tipos de períodos de pago: depósitos mensuales con incrementos anuales del 10%, depósitos semestrales y retiros trimestrales. Esto nos obliga a manejar tres tasas para cada uno de los períodos de pago.

Ante la complejidad del diagrama de flujo de caja, manejando tres unidades de tiempo diferentes, vamos a proponer diferentes diagramas que consideren los diferentes flujos.

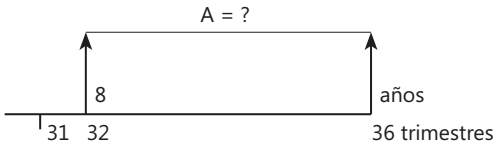
Conversión de tasas: i = 27% anual efectiva
i = 2,01178% mensual
i = 12,69428% semestral E.M
i = 6,15757% trimestral E.M.

Diagrama de los depósitos mensuales y semestrales (Egresos)



Este diagrama podría dividirse en tres diagramas diferentes, uno por cada período de pago. Es lo más conveniente.

Diagrama de los retiros trimestrales (Ingresos)



Formulamos la ecuación de Ingresos = Egresos y hacemos la igualdad en el periodo cero:

A(P/A, 6.15757%, 5 trim.) + (P/F, 6.15757%, 31 trim.) = 500.000 + 100.000(F/A, 2.01178%, 12 mes) (P/C_1, 27%, 10%, 5 años) + 500.000(P/A, 12.69428%)

A = 11.084.619

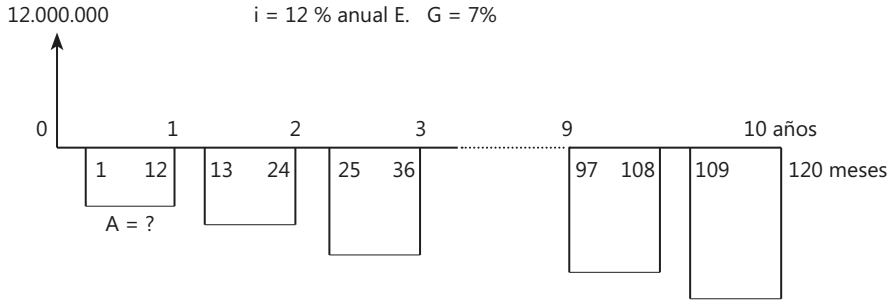
Mes	Depósito mensual	Depósito semestral	Total mes	Acumulado con interés		Mes	Acumulado con interés	Retiros	Saldo
0	500.000		500.000	500.000		61	24.579.285		
1	100.000		100.000	610.059		62	25.073.766		
2	100.000		100.000	722.332		63	25.578.195		
3	100.000		100.000	836.864		64	26.092.772		
4	100.000		100.000	953.700		65	26.617.701		
5	100.000		100.000	1.072.886		66	27.153.191		
6	100.000	500.000	600.000	1.694.470		67	27.699.453		
7	100.000		100.000	1.828.559		68	28.256.705		
8	100.000		100.000	1.965.346		69	28.825.168		
9	100.000		100.000	2.104.884		70	29.405.067		
10	100.000		100.000	2.27.230		71	29.996.632		
11	100.000		100.000	2.392.439		72	30.600.098		
12	100.000	500.000	600.000	3.040.570		73	31.215.705		
13	110.000		110.000	3.211.739		74	31843.696		
14	110.000		110.000	3.386.352		75	32.484.321		
15	110.000		110.000	3.564.478		76	33.137.835		
16	110.000		110.000	3.746.188		77	33.804.495		
17	110.000		110.000	3.931.553		78	34.484.567		
18	110.000	500.000	610.000	4.620.647		79	35.178.321		
19	110.000		110.000	4.823.604		80	35.886.031		
20	110.000		110.000	5.030.644		81	36.607.979		
21	110.000		110.000	5.241.850		82	37.344.451		
22	110.000		110.000	5.457.304		83	38.095.739		
23	110.000		110.000	5.677.093		84	38.862.142		
24	110.000	500.000	610.000	6.401.304		85	39.643.962		
25	121.000		121.000	6.651.084		86	40.441.512		
26	121.000		121.000	6.905.889		87	41.255.106		
27	121.000		121.000	7.165.821		88	42.085.068		

28	121.000		121.000	7.430.981		89	42.931.727		
29	121.000		121.000	7.701.476		90	43.795.419		
30	121.000	500.000	621.000	8.477.413		91	44.676.486		
31	121.000		121.000	8.768.960		92	45.575.279		
32	121.000		121.000	9.066.372		93	46.492.153		
33	121.000		121.000	9.369.768		94	47.427.473		
34	121.000		121.000	9.679.267		95	48.381.609		
35	121.000		121.000	9.994.992		96	49.354.941	-11.084.619	38.270.322
36	121.000	500.000	621.000	10.817.069		97	39.040.237		39.040.237
37	133.100		133.100	11.167.785		98	39.825.640		39.825.640
38	13.100		133.100	11.525.556		99	40.626.845	-11.084.619	29.542.226
39	133.100		133.100	11.890.525		100	30.136.550		30.136.550
40	133.100		133.100	12.262.836		101	30.742.831		30.742.831
41	133.100		133.100	12.642.638		102	31.361.309	-11.084.619	20.276.690
42	133.100	500.000	633.100	13.530.080		103	20.684.613		20.684.613
43	133.100		133.100	13.935.375		104	21.100.742		21.100.742
44	133.100		133.100	14.348.824		105	21.525.242	-11.084.619	10.440.623
45	133.100		133.100	14.770.591		106	10.650.666		10.650.666
46	133.100		133.100	15.200.843		107	10.864.934		10.864.934
47	133.100		133.100	15.639.750		108	11.083.512	-11.084.619	-1.107
48	133.100	500.000	633.100	16.587.488					
49	146.410		146.410	17.067.601					
50	146.410		146.410	17.557.374					
51	146.410		146.410	18.057.000					
52	146.410		146.410	18.566.677					
53	146.410		146.410	19.086.608					
54	146.410	500.000	646.410	20.116.998					
55	146.410		146.410	20.668.118					
56	146.410		146.410	21.230.325					
57	46.410		146.410	21.803.842					
58	146.410		146.410	22.388.898					
59	146.410		146.410	22.985.723					
60	146.410	500.000	646.410	24.094.555					

Problema 38

Una corporación de Ahorro y Vivienda hace un crédito en pesos por un valor de $12.000.000 a 10 años, con cuotas constantes (en pesos) durante los 12 meses de cada año, pero cada año crecen un porcentaje igual al INP, el cual se estima en un 7%. La tasa de interés es del 12% efectiva anual. ¿Cuáles serán las cuotas mensuales de cada año? Después de cancelar la cuota 84, ¿cuál será el saldo de la deuda?

Respuesta: $129.406 cuotas del primer año; cuota 84: $193.594; Saldo: $6.729.469.



Cálculo de i % mensual: (m = 12) i = 0,94888% mensual

12.000.000 = A (F/A; 0,94888%; 12) (P/C1; 12%; 7%, 10)

A = $ 129.406 cuotas mensuales del primer año.

Cuota del mes 84 (año 7) = 129.406 $(1+0{,}07)^{7-1}$ = 194.203

Solución: usando el programa de amortización en Excel:

Préstamo: $ 12.000.000
Tasa mensual : 0,94888%
Plazo en años: 10
Cuotas mensuales constantes en durante 12 meses, crecen cada año en un 7%

AMORTIZACIÓN: GRADIENTE ESCALERA GEOMÉTRICO				
N	**Saldo**	**Interés**	**Cuota**	**Amortización**
0	12.000.000	0	0	0
1	11.984.460	113.866	129.406	15.540
2	11.968.772	113.718	129.406	15.688
3	11.952.936	113.569	129.406	15.836
4	11.936.949	113.419	129.406	15.987
5	11.920.811	113.267	129.406	16.138
6	11.904.520	113.114	129.406	16.291
7	11.888.074	112.960	129.406	16.446
8	11.871.471	112.804	129.406	16.602
9	11.854.712	112.646	129.406	16.760
10	11.837.793	112.487	129.406	16.919
11	11.820.714	112.326	129.406	17.079
12	11.803.473	112.164	129.406	17.241
13	11.777.009	112.001	138.464	26.463
14	11.750.295	111.750	138.464	26.714
15	11.723.327	111.496	138.464	26.968
16	11.696.104	111.240	138.464	27.224
17	11.668.621	110.982	138.464	27.482
18	11.640.879	110.721	138.464	27.743
19	11.612.873	110.458	138.464	28.006
20	11.584.601	110.192	138.464	28.272

21	11.556.061	109.924	138.464	28.540
22	11.527.250	109.653	138.464	28.811
23	11.498.165	109.380	138.464	29.084
24	11.468.805	109.104	138.464	29.360
25	11.429.474	108.825	148.157	39.331
26	11.389.769	108.452	148.157	39.705
27	11.349.688	108.075	148.157	40.081
28	11.309.226	107.695	148.157	40.462
29	11.268.381	107.311	148.157	40.846
30	11.227.148	106.923	148.157	41.233
31	11.185.523	106.532	148.157	41.624
32	11.143.504	106.137	148.157	42.019
33	11.101.086	105.738	148.157	42.418
34	11.058.265	105.336	148.157	42.821
35	11.015.039	104.930	148.157	43.227
36	10.971.402	104.519	148.157	43.637
37	10.916.979	104.105	158.527	54.422
38	10.862.041	103.589	158.527	54.938
39	10.806.581	103.068	158.527	55.460
40	10.750.595	102.541	158.527	55.986
41	10.694.078	102.010	158.527	56.517
42	10.637.025	101.474	158.527	57.054
43	10.579.430	100.933	158.527	57.595
44	10.521.288	100.386	158.527	58.141
45	10.462.595	99.834	158.527	58.693
46	10.403.345	99.277	158.527	59.250
47	10.343.533	98.715	158.527	59.812
48	10.283.153	98.148	158.527	60.380
49	10.211.103	97.575	169.624	72.050
50	10.138.370	96.891	169.624	72.733
51	10.064.947	96.201	169.624	73.423
52	9.990.827	95.504	169.624	74.120
53	9.916.003	94.801	169.624	74.823
54	9.840.470	94.091	169.624	75.533
55	9.764.220	93.374	169.624	76.250
56	9.687.246	92.651	169.624	76.974
57	9.609.542	91.920	169.624	77.704
58	9.531.100	91.183	169.624	78.441
59	9.451.915	90.439	169.624	79.186
60	9.371.978	89.687	169.624	79.937
61	9.279.408	88.929	181.498	92.569
62	9.185.961	88.050	181.498	93.448
63	9.091.626	87.164	181.498	94.334
64	8.996.397	86.269	181.498	95.230
65	8.900.264	85.365	181.498	96.133

66	8.803.218	84.453	181.498	97.045
67	8.705.252	83.532	181.498	97.966
68	8.606.356	82.602	181.498	98.896
69	8.506.522	81.664	181.498	99.834
70	8.405.741	80.717	181.498	100.781
71	8.304.003	79.760	181.498	101.738
72	8.201.300	78.795	181.498	102.703
73	8.084.918	77.820	194.203	116.382
74	7.967.431	76.716	194.203	117.487
75	7.848.829	75.601	194.203	118.602
76	7.729.102	74.476	194.203	119.727
77	7.608.239	73.340	194.203	120.863
78	7.486.229	72.193	194.203	122.010
79	7.363.061	71.035	194.203	123.168
80	7.238.725	69.867	194.203	124.336
81	7.113.209	68.687	194.203	125.516
82	6.986.502	67.496	194.203	126.707
83	6.858.592	66.294	194.203	127.909
84	6.729.469	65.080	194.203	129.123
85	6.585.526	63.855	207.797	143.943
86	6.440.218	62.489	207.797	145.308
87	6.293.531	61.110	207.797	146.687
88	6.145.451	59.718	207.797	148.079
89	5.995.967	58.313	207.797	149.484
90	5.845.065	56.895	207.797	150.903
91	5.692.730	55.463	207.797	152.335
92	5.538.950	54.017	207.797	153.780
93	5.383.711	52.558	207.797	155.239
94	5.226.999	51.085	207.797	156.712
95	5.068.799	49.598	207.797	158.199
96	4.909.099	48.097	207.797	159.700
97	4.733.337	46.581	222.343	175.762
98	4.555.908	44.914	222.343	177.429
99	4.376.795	43.230	222.343	179.113
100	4.195.983	41.531	222.343	180.812
101	4.013.454	39.815	222.343	182.528
102	3.829.194	38.083	222.343	184.260
103	3.643.186	36.334	222.343	186.009
104	3.455.412	34.569	222.343	187.774
105	3.265.857	32.788	222.343	189.555
106	3.074.503	30.989	222.343	191.354
107	2.881.333	29.173	222.343	193.170
108	2.686.331	27.340	222.343	195.003
109	2.473.914	25.490	237.907	212.417
110	2.259.481	23.474	237.907	214.433

111	2.043.014	21.440	237.907	216.467
112	1.824.493	19.386	237.907	218.521
113	1.603.898	17.312	237.907	220.595
114	1.381.210	15.219	237.907	222.688
115	1.156.409	13.106	237.907	224.801
116	929.475	10.973	237.907	226.934
117	700.388	8.820	237.907	229.087
118	469.126	6.646	237.907	231.261
119	235.671	4.451	237.907	233.456
120	0	2.236	237.907	235.671

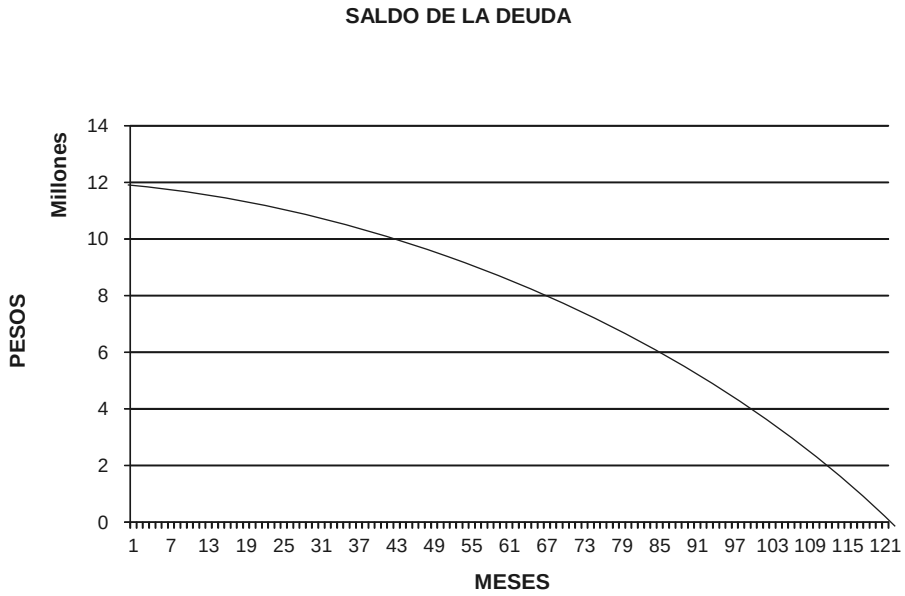


Gráfico 35 Saldo de la deuda.

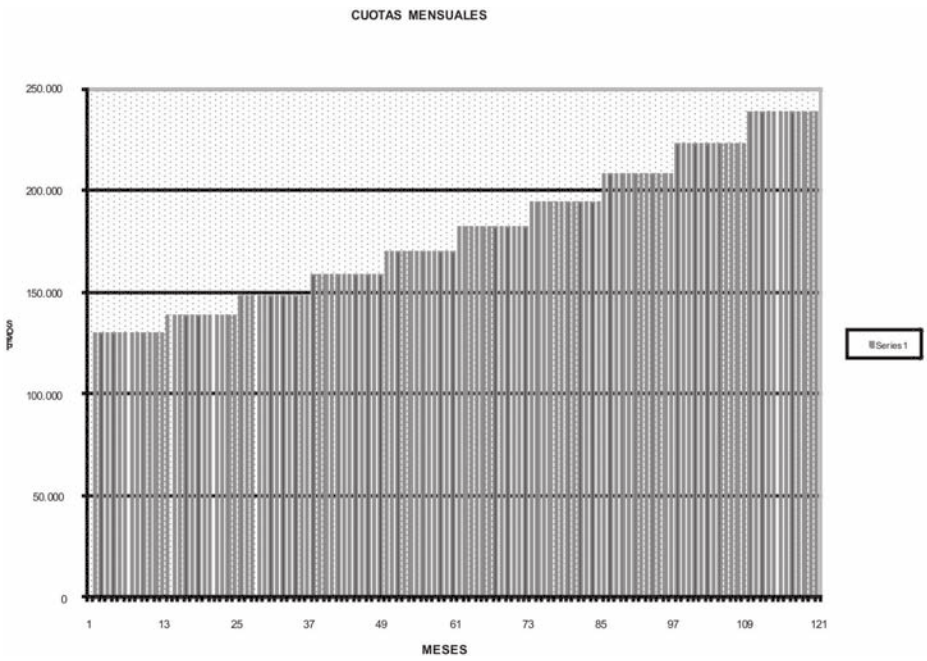
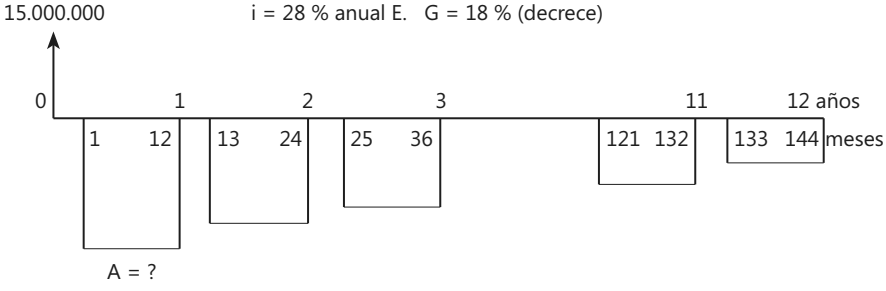


Gráfico 36 Cuotas mensuales.

Problema 39

Una entidad de crédito hace un crédito en pesos por un valor de $15.000.000 a 12 años, con cuotas constantes (en pesos) durante los 12 meses de cada año, pero cada año decrecen un porcentaje igual 18%. La tasa de interés es del 28% efectiva anual. ¿Cuáles serán las cuotas mensuales de cada año? Después de cancelar la cuota 96, ¿cuál es el saldo de la deuda?



Cálculo de i % mensual: (m = 12) i =2.078% mensual

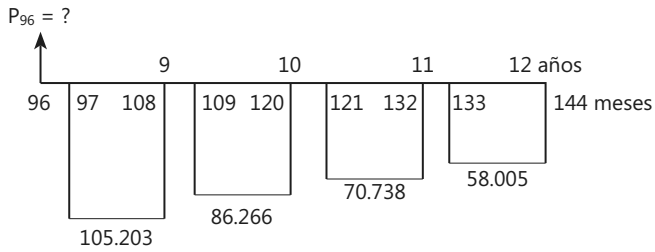
15.000.000 = A (F/A; 2.078%; 12) (P/C1; 28%;(-)18%, 12)

A = $ 514,654 cuotas mensuales del primer año.

Cuotas del año K = C1 $(1 - G)^{k-1}$

Año 2 : 514.654 $(1 - 0.18)^{2-1}$ = 422,016 cuotas 13 a 24
Año 3 : 514.654 $(1 - 0.18)^{3-1}$ = 346,053 cuotas 25 a 36
Año 4 : 514.654 $(1 - 0.18)^{4-1}$ = 283.764 cuotas 37 a 48
Etc.....

Una vez se haya cancelado la cuota 96, se deben las cuotas 97 a la 144. Aquí vamos a calcular el saldo de la deuda:



P_{96} = 105.203 (F/A; 2.078%; 12) (P/C1; 28%;(-)18%, 4) = $ 2,562,015

Elaborar una tabla de amortización en Excel y gráficos de: Saldos y otro de cuotas.

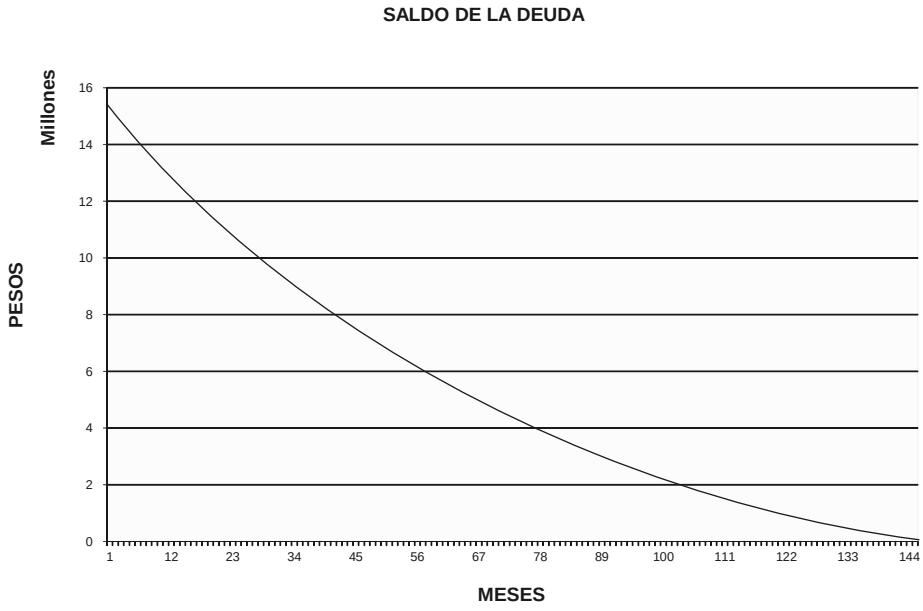


Gráfico 37 Saldo de la deuda.

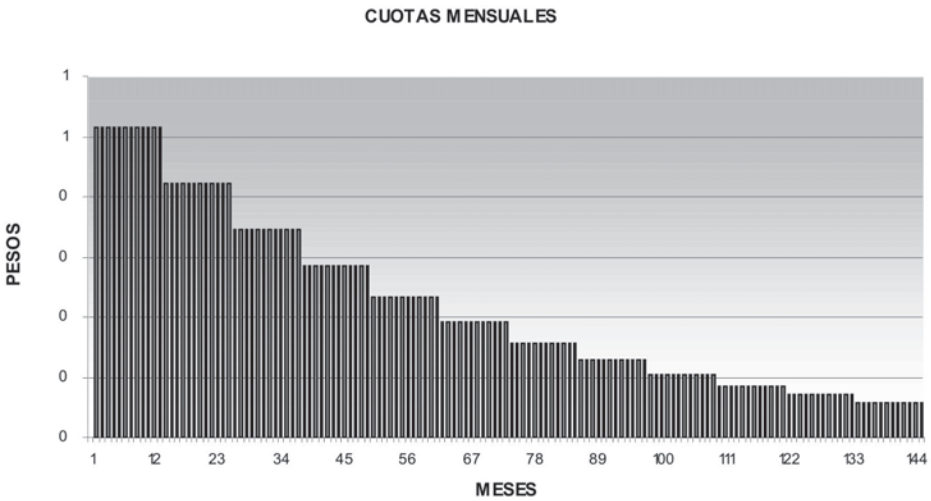


Gráfico 38 Cuotas mensuales.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 40

La firma Recrear S.A., promotora de proyectos de construcción de condominios, ofrece el siguiente plan para un sector cercano a la ciudad: valor de la inversión: $90.000.000; forma de pago: cuota inicial del 30% y el saldo se financia a siete años con pagos mensuales constantes durante el año, pero se incrementarán cada año en un 10%. Además se exige que al final de los años 2, 4 y 6 se paguen cuotas adicionales extraordinarias de $18.000.000 cada una. Si la tasa financiera es del 20,299% anual E, ¿cuál será el valor de las cuotas mensuales de cada año?

Respuestas: Primer año: $609.324; segundo año: $670.256; tercer año: $737.282; cuarto año: $811.010; quinto año: $892.111; sexto año: $981.323; séptimo año: $1.079.455.

Problema 41

Usted compra una propiedad en un condominio por $27.000.000. Paga una cuota inicial de $7.000.000 y el saldo lo financian a 12 años. Los pagos los pacta así: cada seis meses debe pagar las cuotas ordinarias, las cuales permanecen constantes durante los dos semestres de cada año, pero anualmente se incrementarán en el 12%. Al final de los años 3 y 7 debe pagar cuotas extraordinarias (además de las ordinarias) de $4.000.000 y $6.000.000, respectivamente. Si la tasa financiera pactada fue del 19,8% efectiva anual, ¿cuál será el valor de la primera cuota ordinaria?

Respuesta: $1.073.736

Problema 42

Financiamos S.A. hace un crédito en pesos para la compra de vivienda por un valor de $13.000.000 a ocho años, con cuotas constantes (en pesos) durante los 12 meses de cada año, pero anualmente decrece un porcentaje igual al 14%. La tasa de interés es del 34% efectiva anual. ¿Cuáles serán las cuotas mensuales de cada año? Después de cancelar la cuota 61, ¿cuál es el saldo de la deuda?

Respuestas:

Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Año 6	Año 7	Año 8
$466.544	$401.228	$345.056	$296.748	$255.204	$219.475	$188.749	$162.324

Saldo final del mes 61: $4.527.124

Problema 43

Usted decide constituir un fondo en una cuenta de ahorros así: abre la cuenta hoy con $100.000; deposita $200.000 durante los 12 meses del primer año, cada vez; al año siguiente incrementa su ahorro en un 10%, pero las cuotas serán constantes durante ese año. Para el tercer año de nuevo incrementa su ahorro en el 10% y los 12 depósitos de ese año serán iguales. A partir del final del primer mes del quinto año (mes 49) hará retiros mensuales iguales durante ese año. Al siguiente año los retiros los disminuirá en un 5%, y hará 12 retiros iguales. La cuenta quedará en cero. Si la tasa de interés pactada es del 21% anual con capitalización mensual sobre saldos, tanto durante los depósitos como durante los retiros, ¿cuál es el valor qué valor tendrán los retiros?

Respuesta: $817.045, $776.193

Capítulo 9

LA U.V.R.
Unidad de valor real U.V.R.

UNIDAD DE VALOR REAL (UVR)

En este parte se cita textualmente el boletín del Banco de la República, disponible en Internet.

La unidad de valor real (UVR) refleja el poder adquisitivo con base en la variación del índice de precios al consumidor (IPC) certificado por el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE). A partir de enero de 2000 la UVR reemplazó la unidad de poder adquisitivo constante (UPAC).

La UVR es calculada de acuerdo con la metodología establecida por el Consejo de Política Económica y Social (Conpes), y se usa para calcular el costo de los créditos de vivienda. Esta unidad de cuenta permite a las entidades financieras ajustar el valor del crédito según el incremento del costo de vida en nuestro país.

La metodología usada para calcular la UVR que fue establecida por la Junta Directiva del Banco de la República asegura el cumplimiento estricto de lo que es ordenado en la Circular Reglamentaria C-955/2000. Para más información sobre los antecedentes de la UVR consulte "Reportes del Emisor 41". Adicionalmente, la metodología usada para calcular la UVR puede consultarse en la Resolución Externa 13 del 2000. (Banco de la República, 2010).

Ahora bien, miremos algunos apartados de la resolución expedida por la junta directiva del Banco de la República.

RESOLUCIÓN EXTERNA No. 13 DE 2000

(Agosto11)

Por la cual se expiden regulaciones en materia de la Unidad de Valor Real (UVR).

LA JUNTA DIRECTIVA DEL BANCO DE LA REPUBLICA,

en ejercicio de sus atribuciones constitucionales y legales, en especial de las que le confieren los artículos 371 y 372 de la Constitución Política y 3 y 6 de la ley 546 de 1999,

R E S U E L V E:

Artículo 1. METODOLOGÍA PARA EL CÁLCULO DEL VALOR EN PESOS DE LA UVR. El valor en moneda legal colombiana de la Unidad de Valor Real (UVR) de que trata el artículo 3 de la ley 546 de 1999 se determinará diariamente durante el período de cálculo, de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$UVR\ t = VR_{15} * (1+i)^{t/d}$$

Donde:

UVR t: Valor en moneda legal colombiana de la UVR del día t del período de cálculo.

UVR 15: Valor en moneda legal colombiana de la UVR el día 15 de cada mes.

i: Variación mensual del índice de precios al consumidor certificada por el DANE durante el mes calendario inmediatamente anterior al mes del inicio del período de cálculo.

t: número de días calendario transcurridos desde el inicio de un período de cálculo hasta el día de cálculo de la UVR. Por lo tanto, t tendrá valores entre 1 y 31, de acuerdo con el número de días calendario del respectivo período de cálculo.

d: Número de días calendario del respectivo período de cálculo.

Parágrafo. Para efectos de la presente resolución se entiende por periodo de cálculo el comprendido entre el día 16 inclusive, de un mes hasta el día 15, inclusive, del mes siguiente.

Artículo 2. CÁLCULO Y DIVULGACIÓN DEL VALOR EN PESOS DE LA UVR. El Banco de la República calculará y divulgará mensualmente, para cada uno de los días del período de cálculo e informará con idéntica periodicidad, el valor en moneda legal de la UVR de acuerdo con la metodología prevista en la presente resolución. (Banco de la República).

MANEJO FINANCIERO DE LA UVR

La fórmula para calcular el valor de UVR en una fecha determinada a partir del valor en una fecha anterior UVR t = $VR_{15}*(1+i)^{t/d}$, la podemos expresar utilizando la nomenclatura y los símbolos que se han manejado en este texto así:

UVR t ⟶ F;

VR_{15} ⟶ P; $F = P (1 + CM)^n$

i ⟶ CM (corrección monetaria);

t/d ⟶ n (expresado en periodos iguales a los de la CM F = P (F/P, CM%, n)

Problema 1

Si el 15 de Junio la UVR vele $140,50; la CM para este mes es del 1,23% mensual E. ¿Cuánto valdrá la UVR el 23 de junio?

Del 15 al 23 de junio transcurren ocho días. Convertidos a mes: 8/30 = 0,26667 meses.

Método 1. UVR_{23} (F) = 140,50(P) $(1 + 1{,}23\%(CM))^{0{,}26667(n)}$ UVR_{23} = $140,96

Método 2. Utilizando factores:

UVR_{23} = 140.50 (F/P, 1.23%, 0,26667) = 140.50 x 1,003265 = $140,96

Método 3. Podemos convertir la tasa mensual a diaria (junio tiene 30 días)

CM = 1,23% Mensual E. ⟶ 0,0407582% diaria

UVR_{23} = 140,50 (F/P, 0,0407582%, 8) = 140,50 x 1,003265 = $140,96

Si se conoce la CM en años, podemos convertirla a mensual o a diaria según se necesite, o convertimos el tiempo en una unidad de tiempo igual a la de la CM.

Problema 2

Hoy la UVR tiene un valor de $148,76 se estima que la CM promedio anual es del 5,78% anual E. ¿Cuánto valdrá la UVR dentro de tres meses?

$$UVR_3 = 148{,}76\ (F/P,\ 5{,}78\%,\ 3/12) = 148{,}76 \times 1{,}01415 = \$150{,}86$$

Problema 3

En el problema anterior deseábamos saber cuánto valdrá la UVR dentro de 46 días.

$$UVR_{46} = 148{,}76\ (F/P,\ 5{,}78\%,\ 46/365) = 148{,}76 \times 1{,}0071 = \$149{,}82$$

Problema 4

El 23 de mayo la UVR se cotizaba a $137,87. Ese día se depositó $1.700.000 en una cuenta en UVR, en la cual no se paga interés; sólo se reconoce la CM. ¿Cuánto dinero se tendrá el día 12 de agosto del mismo año?

Las CM de los meses han sido: mayo, 4,55% anual E; junio, 4,12% anual E; julio, 3,79% anual E; agosto, 4,02% anual E.

Solución: Primero calculemos en UVR el depósito.

$$UVR\ depositados = 1.700.000/137{,}87 = 12.330{,}4562\ UVR.$$

Calculamos cuanto valdrá la UVR en la fecha 12 de agosto.

$$UVR(12\ Ag) = 137{,}87\underbrace{(F/P,\ 4.55\%,\ 8/365)}_{Mayo}\underbrace{(F/P,\ 4.12\%,\ 30/365)}_{Junio}\underbrace{(F/P,\ 3{,}79\%,\ 31/365)}_{Julio}\underbrace{(F/P,\ 4{,}02\%,\ 12/365)}_{Agosto}$$

Traslada el valor de la UVR del 23 de mayo al 31 de mayo	Traslada la UVR del 1 junio hasta el 30 de junio	Al 31 de julio	Al 12 de agosto

$$UVR(12\ Agosto) = 137{,}87 \times 1{,}000976 \times 1{,}003324 \times 1{,}00316 \times 1{,}00129 = \$\ 139{,}080014$$

$$Valor\ del\ ahorro\ en\ pesos\ el\ 12\ de\ agosto:\ 139{,}080014 \times 12.330{,}4562 = 1.714.931$$

La diferencia 1.714.931 - 1.700.000 = $14.931 corresponde al dinero ganado en la cuenta por efecto de la CM.

Problema 5

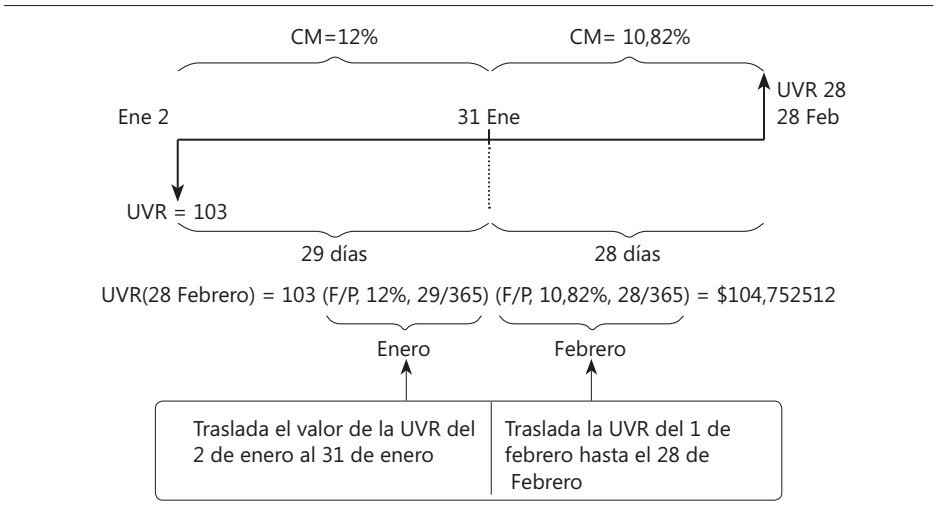
El 2 de enero de 2000 se abrió una cuenta de ahorros en una Corporación de Ahorro y Vivienda. Valor de la UVR: $103. Se hizo un primer depósito de $1.000.000. Posteriormente se hicieron otros depósitos y retiros así:

Fecha de la operación	Depósito	Retiro	C.M. anual E (vigente para el mes)
Enero 2	$1.000.000	xxxx	12%
Febrero 28	xxxx	400.000	10.82%
Marzo	xxxx	xxxx	11.3%
Abril 10	$500.000	xxxx	10.62%
Abril 21	xxxx	????	

La Corporación únicamente paga la C.M. (no paga intereses). Hoy, 21 de abril, se canceló la cuenta. ¿Cuántos UVR y su equivalente en pesos se retiraron?
Modelo de fórmula para calcular el valor de UVR en cada fecha:

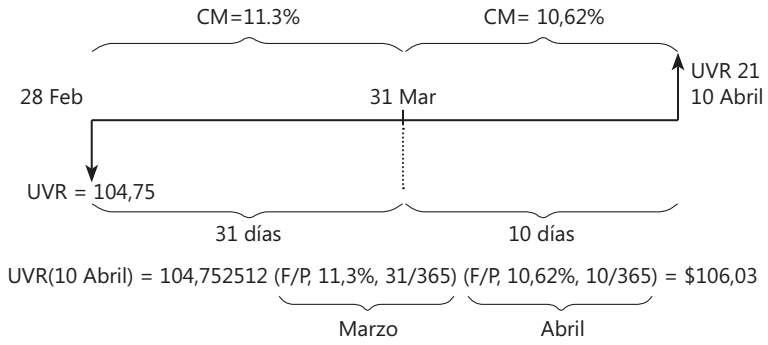
UVRFECHA = 103 (F/P; C.M. anual (del mes); días del mes/365)

Solución utilizando las fórmulas:
UVR el 2 de enero: $103; Depósito $1.000.000
Depósito en UVR: 1.000.000/103 = 9.708,7379 UVR
Valor de la UVR el 28 de febrero:



Valor del retiro de $400.000 el 28 de febrero en UVR: 400.000/104,75512 = 3.818,5242 UVR.

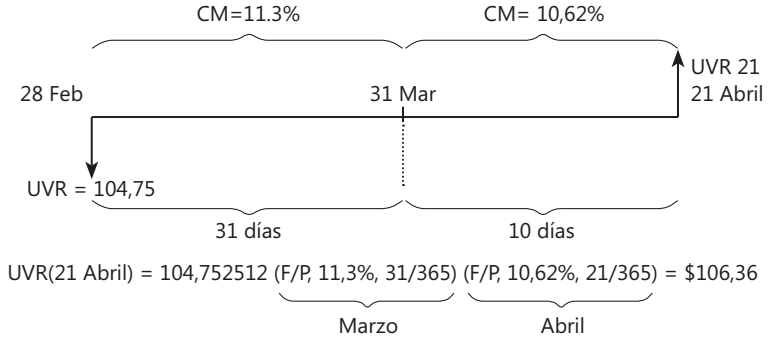
Valor de la UVR el 10 de abril:



Valor del depósito de $500.000 el 10 de abril en UVR: 500.000/106,03 = 4.715,65.

Total depósitos el 21 de abril en UVR: 9.708,7379 + 4.715,65 = 14.424,38 UVR (no gana interés).

Valor de la UVR el 21 de abril:



Saldo en UVR el 21 de abril = 9.708,7379 + 4.715,65 - 3.818,52418 = 10.605,7202.

Retiro en pesos el 21 de abril: $106,36 x 10.605,7202 = $1.127.984

Problemas propuestos

Problema 6

Si la UVR el 4 de enero de 2000 se cotizaba a $103,10, y las correcciones monetarias fueron de 12,7% anual para enero, 13,23% anual para febrero, 11,2% anual para marzo y 10,8% anual para abril y mayo, ¿a cómo debió estar la UVR el día 18 de mayo?

Respuesta: $107,4019.

Problema 7

El 15 de febrero de 2000 la UVR se cotizaba a $106,57. Ese día usted depositó $500.000 en una corporación de ahorro y vivienda. El 27 de mayo del mismo año desea retirar todo el dinero (asuma que la corporación sólo paga la C.M.). ¿De cuánto dinero dispondrá?

Correcciones monetarias:

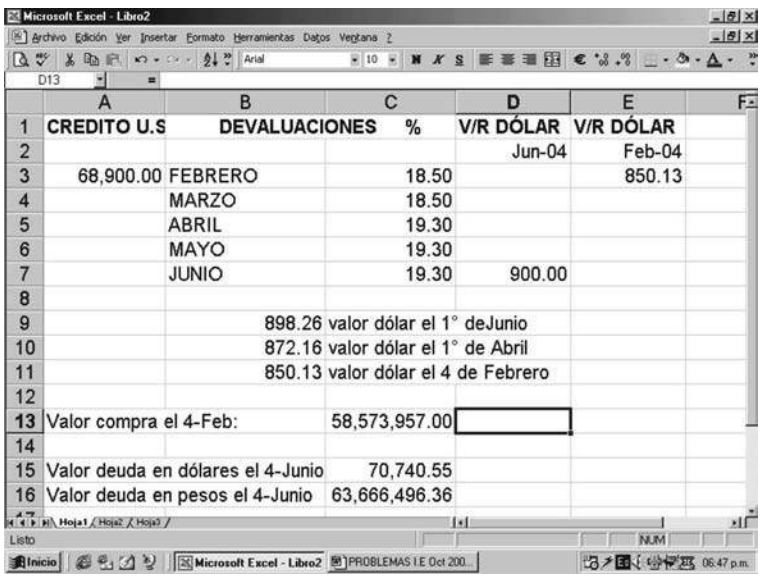
Febrero	11,9% anual
Marzo	12,05% anual
Abril	13,7% anual
Mayo	14,0% anual

Respuesta: $517.247,30

Problema 8

En este problema aplique la misma metodología del manejo de la UVR en el manejo del dólar utilizando la devaluación con el mismo criterio de la C.M.

El 4 de febrero de 1997 se hizo una compra en el exterior mediante una carta de crédito bancaria en dólares por un valor de US$68.900, a una tasa del 8,23% anual E y a cuatro meses. La deuda debe cancelarse el 4 de junio del mismo año. Se sabe que el dólar se cotizaba el 4 de junio de 1997 a $900. Las devaluaciones anuales para los meses de febrero y marzo fueron de 18,5% para cada mes y del 19,3% para abril, mayo y junio (igual para cada mes). ¿Cuánto debe pagar en pesos el 4 de junio? ¿Cuál fue el valor de la compra en pesos el 4 de febrero de 1997?



	A	B	C	D	E
1	CREDITO U.S	DEVALUACIONES	%	V/R DÓLAR	V/R DÓLAR
2				Jun-04	Feb-04
3	68,900.00	FEBRERO	18.50		850.13
4		MARZO	18.50		
5		ABRIL	19.30		
6		MAYO	19.30		
7		JUNIO	19.30	900.00	
8					
9		898.26	valor dólar el 1° deJunio		
10		872.16	valor dólar el 1° de Abril		
11		850.13	valor dólar el 4 de Febrero		
12					
13	Valor compra el 4-Feb:		58,573,957.00		
14					
15	Valor deuda en dólares el 4-Junio		70,740.55		
16	Valor deuda en pesos el 4-Junio		63,666,496.36		

Gráfico 39 Solución de un problema en Excel.

CRÉDITO HIPOTECARIO EN UVR

Problema 9

Hace seis meses se hizo un crédito en UVR para la compra de vivienda con las siguientes condiciones: plazo 13 años, tasa del 10,8% anual efectiva. Las cuotas son constantes en UVR durante los doce meses de cada año, pero decrecen en un 9% anual. Cuando se hizo el crédito la UVR se cotizaba a $108. Hoy pagó la sexta cuota por un valor de $220.000 y solicitó el saldo en pesos. ¿Cuál es este valor? Asuma una C.M. constante del 11% anual E.

Respuestas: Valor de la UVR hoy: $113,78506
Préstamo en UVR: 113.367,44. En pesos $12.343.683
Saldo hoy: 107.479,73 UVR

Solución:

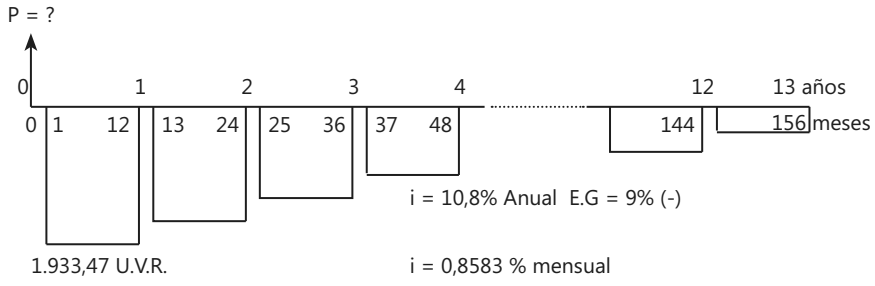
Valor de la UVR hace seis meses: $108

Valor de la UVR hoy = 108 (F/P, 11%; 6/12) = $113,78506

Valor de la sexta cuota (hoy) en UVR = 220.000/113,78506 = 1.933,47 U.V.R.

Este valor será el mismo desde la primera hasta la duodécima cuota.

Diagrama de las cuotas en UVR (las cuotas son constantes durante los doce meses de cada año, pero decrecen cada año en el 9%).

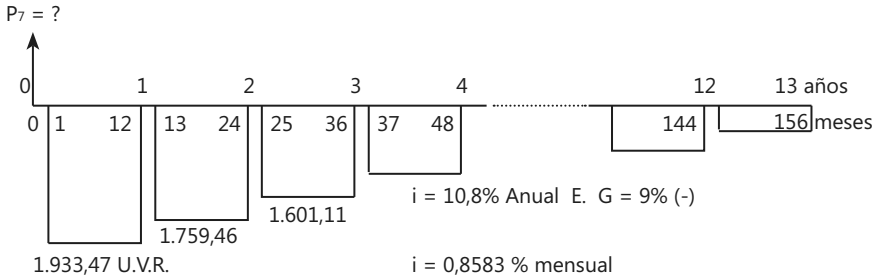


Valor del préstamo en UVR

P = 1.933,47 (F/A, 0,8583%; 12) (P/C1; 10,8%; -9%; 13) = 113.367,44 UVR

En pesos: P = 113.367,44 x 108 = $12.243.683

Saldo después de pagar la sexta cuota (debe de la cuota 7 hasta la 156):



P_6 = 1.933,47 (P/A, 0,8583%; 6) + 1.759,46 (F/A; 0,8583%; 12)(P/C_1; 10.8%; -9%; 12)(P/F, 0.8583%;6)
En pesos: P_6 = 107.479,75 x 113.78506 = $12.229.590

En el cuadro siguiente se presentan las cuotas mensuales, el interés de cada período, la amortización y el saldo, tanto en UVR como en pesos. Para averiguar el valor de la UVR en cada mes se utilizó la fórmula F = P (F/P; C.M%; N). Ejemplo:

El valor de la UVR en el mes 3:

F = 108 (F/P; 11%; 3/12) = 110,85			
Deuda inicial	113.367,4	C. M:	0,11
Tasa efectiva del subperíodo	0,008583		
Plazo en años	13		
Porcentaje de disminución de las cuotas G%	-0,09		
Número de subperíodos en cada período.	12		

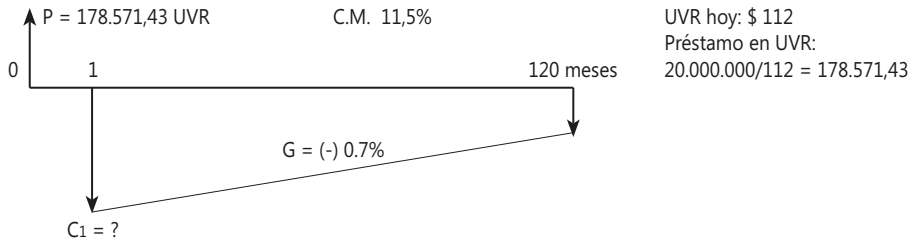
PER.	SALDO DEUDA		INTERÉS		CUOTA		AMORTIZACIÓN		VALOR
	U. V. R.	PESOS	U.V.R.	PESOS	U. V. R.	PESOS	U. V. R.	PESOS	U. V.R.
0	113.367,44	12.243.684	0		0		0,000		108,00
1	112.407,00	12.245.994	973,03	106.005	1.933,47	210.639	960,44	104.633	108,94
2	111.438,32	12.246.505	964,79	106.025	1.933,47	212.478	968,68	106.453	109,89
3	110.461,33	12.245.169	956,48	106.030	1.933,47	214.334	976,99	108.304	110,85
4	109.475,95	12.241.937	948,09	106.018	1.933,47	216.206	985,38	110.188	111,82
5	108.482,11	12.236.761	939,63	105.990	1.933,47	218.095	993,84	112.105	112,80
6	107.479,75	12.229.590	931,10	105.945	1.933,47	220.000	1.002,37	114.054	113,79
7	106.468,78	12.220.372	922,50	105.883	1.933,47	221.921	1.010,97	116.038	114,78
8	105.449,13	12.209.056	913,82	105.804	1.933,47	223.860	1.019,65	118.056	115,78
9	104.420,73	12.195.587	905,07	105.706	1.933,47	225.815	1.028,40	120.110	116,79
10	103.383,50	12.179.912	896,24	105.589	1.933,47	227.788	1.037,23	122.199	117,81
11	102.337,38	12.161.975	887,34	105.453	1.933,47	229.777	1.046,13	124.324	118,84
12	101.282,27	12.141.718	878,36	105.298	1.933,47	231.784	1.055,11	126.486	119,88
13	100.392,12	12.140.128	869,31	105.123	1.759,46	212.766	890,15	107.643	120,93
23	91.059,39	12.012.061	789,88	104.197	1.759,46	232.098	969,57	127.901	131,91
24	90.081,50	11.986.856	781,56	104.000	1.759,46	234.125	977,89	130.125	133,07
25	89.253,56	11.980.424	773,17	103.782	1.601,11	214.915	827,94	111.133	134,23

44	73.288,49	11.604.963	636,08	100.721	1.457,01	230.712	820,93	129.990	158,35
45	72.460,52	11.574.076	629,04	100.475	1.457,01	232.727	827,97	132.251	159,73
46	71.625,44	11.540.620	621,93	100.208	1.457,01	234.760	835,08	134.552	161,12
47	70.783,19	11.504.531	614,76	99.918	1.457,01	236.810	842,25	136.892	162,53
48	69.933,72	11.465.745	607,53	99.606	1.457,01	238.878	849,47	139.273	163,95
49	69.208,08	11.445.886	600,24	99.270	1.325,88	219.278	725,63	120.008	165,38
50	68.476,22	11.423.766	594,01	99.098	1.325,88	221.193	731,86	122.095	166,83
51	67.738,08	11.399.329	587,73	98.907	1.325,88	223.125	738,14	124.219	168,29
52	66.993,60	11.372.518	581,40	98.695	1.325,88	225.074	744,48	126.379	169,76
57	63.174,25	11.200.773	548,89	97.319	1.325,88	235.077	776,98	137.759	177,30
58	62.390,60	11.158.452	542,22	96.976	1.325,88	237.131	783,65	140.155	178,85
59	61.600,22	11.113.324	535,50	96.610	1.325,88	239.202	790,38	142.592	180,41
60	60.803,06	11.065.322	528,71	96.219	1.325,88	241.291	797,16	145.072	181,99
61	60.118,38	11.036.284	521,87	95.803	1.206,55	221.493	684,67	125.690	183,58
62	59.427,83	11.004.806	516,00	95.552	1.206,55	223.428	690,55	127.876	185,18
82	45.430,61	10.011.043	395,96	87.253	1.097,96	241.945	702,00	154.692	220,36
83	44.722,58	9.941.102	389,93	86.675	1.097,96	244.058	708,03	157.383	222,28
84	44.008,48	9.867.814	383,85	86.070	1.097,96	246.190	714,10	160.120	224,23
85	43.387,06	9.813.451	377,72	85.435	999,14	225.990	621,42	140.554	226,18
86	42.760,31	9.756.168	372,39	84.965	999,14	227.964	626,75	142.999	228,16
88	41.490,62	9.632.571	361,59	83.947	999,14	231.963	637,56	148.016	232,16
89	40.847,60	9.566.117	356,11	83.399	999,14	233.989	643,03	150.591	234,19
107	29.314,53	8.028.540	257,20	70.442	909,22	249.013	652,02	178.571	273,88
108	28.656,92	7.916.989	251,61	69.511	909,22	251.188	657,61	181.677	276,27
109	28.075,49	7.824.108	245,96	68.545	827,39	230.578	581,43	162.033	278,68
113	25.699,45	7.415.475	225,74	65.137	827,39	238.740	601,65	173.603	288,55
114	25.092,64	7.303.624	220,58	64.203	827,39	240.825	606,81	176.622	291,07
118	22.612,87	6.814.835	199,48	60.116	827,39	249.350	627,91	189.234	301,37
119	21.979,56	6.681.834	194,09	59.003	827,39	251.528	633,30	192.525	304,00
120	21.340,82	6.544.323	188,65	57.851	827,39	253.725	638,74	195.874	306,66
121	20.771,07	6.425.239	183,17	56.661	752,92	232.906	569,76	176.246	309,34
144	7.080,74	2.675.334	66,09	24.970	685,16	258.876	619,07	233.906	377,83
145	6.518,01	2.484.230	60,77	23.163	623,50	237.635	562,72	214.472	381,13
146	5.950,46	2.287.726	55,94	21.508	623,50	239.711	567,55	218.202	384,46
153	1.838,83	751.336	20,95	8.562	623,50	254.757	602,54	246.195	408,59
154	1.231,12	507.422	15,78	6.505	623,50	256.982	607,71	250.477	412,16
155	618,19	257.021	10,57	4.393	623,50	259.227	612,93	254.833	415,76
156	0,00	0	5,31	2.225	623,50	261.491	618,19	259.266	419,39

Problema 10

Se tomó un crédito en UVR para vivienda así: valor del préstamo $20.000.000; plazo 10 años; cuotas mensuales decrecientes en 0,7% mensual. La tasa efectiva anual es del 12%. El valor UVR hoy: $112. Si asumimos la corrección monetaria constante: CM 11,5%, ¿Cuál es el valor de las cuotas 1 y 120 en pesos?, ¿cuál es el saldo en pesos después de pagar la cuota 50?

Reducción de la tasa: i = 12% efectiva. ⟶ i = 0,94888% mensual.



Ecuación: 178.571,43 = C_1 (P/C_1; 0,94888%; (-) 0,7%; 120) ⟶ C_1 = 3.418,14663

Cuota 120 = 3.418,14663 $(1- 0.007)^{119}$ = 1.481,67 UVR

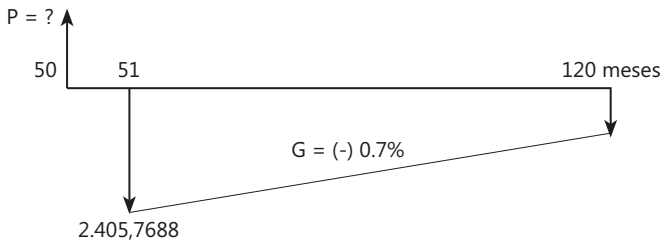
UVR del mes 120 = 112 (F/P, 11,5%, (120x30)/365) = $ 327,71

Cuota 120 en pesos: 327,71 x 1481,67 = $ 485.559

Saldo después de pagar la cuota 50:

Cuota 51 = 3.418,14663 $(1 – 0,007)^{50}$ = 2.405,7668 UVR

Diagrama de la deuda:



P_{50} = 2.405,7688 (P/C; 0,94888%; (-) 7%; 70) = 99.834,23

Valor UVR DEL MES 50 = 112 (F/P, 11,5%, (50x30)/365) = $175,19

Saldo del mes 50 en pesos = 175,19 x 99.834,23 = $17.489.515

Problema 11

Al revisar el 31 de diciembre de 1999 el extracto de la cuenta de un cliente de una corporación de ahorro y vivienda, se encontraron los siguientes datos:

Plazo total: 10 años

Tasa de interés: 8% efectiva + CM

Cuotas decrecientes cada año (en UPAC) pero constantes durante los 12 meses de cada año.

Decrecimiento anual en las cuotas: 10%

Número de la cuota a pagar el 31/12/1999: 43

Valor de esta cuota: $287.686,50

Valor UPAC el 31/12/1999: $15.000

Saldo en UPAC después de pagar esta cuota: 862.0831 UPAC

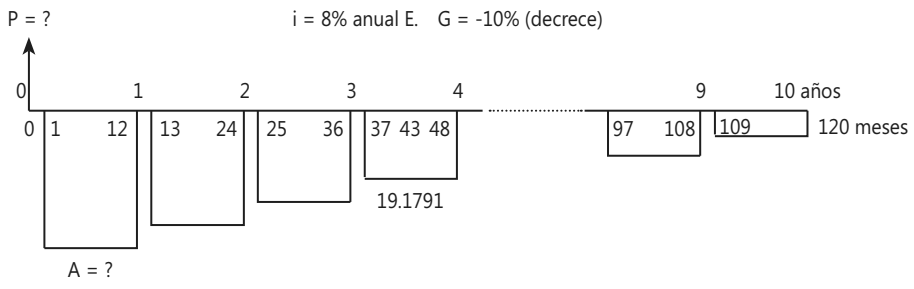
Si asumimos una CM promedio constante del 20% anual, ¿Cuánto dinero le prestaron al cliente?

El préstamo de allí en adelante debe liquidarse en UVR y la tasa financiera será del 11% efectiva anual. Si el plazo restante es el originalmente pactado, ¿cómo quedan sus cuotas en UVR? Las cuotas mensuales serán constantes en UVR durante los doce meses de cada año, pero cada año crecen un 10%. El valor de la UVR el 1 de enero de 2000 fue de $103.

Asuma que la corrección monetaria para la UVR será constante y se estima en el 9% efectiva anual.

Solución:

Resolviendo el problema en UPAC se obtiene la siguiente solución hasta el 31 de diciembre de 1999 (Cuota 43).



Cálculo de i% mensual: (m = 12) i = 0,6434% mensual

Valor de la cuota 43 en UPAC: 287.686,50/15.000 = 19,1791 (esta cuota es de los meses del año 4)

Cuotas del año K = C1 $(1 - G)^{k-1}$

Cálculo de las cuotas del año 1: 19,1791= C1 $(1 - 0{,}10)^{4-1}$ ⟶ A = 26,3088

P = 26,3088 (F/A; 0,6434%; 12) (P/C1; 8%;(-)10%, 10) P= 1.523,8283 UPAC

Valor de la UPAC hace 43 meses = 15.000 (P/F; 20%; (43x30/365)) = $7.874,90

Préstamo en pesos = $7.874,90 x 1.523,8283 = $12.000.000

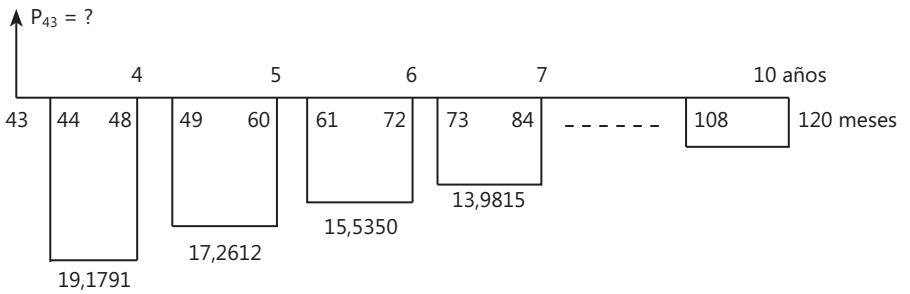
Cuotas proyectadas de los demás años:

Año 2: = 26,3088 $(1 - 0{,}10)^{2-1}$ = 23,6779 cuotas 13 a 24
Año 3: = 26,3088 $(1 - 0{,}10)^{3-1}$ = 21,3101 cuotas 25 a 36
Año 4: = 26,3088 $(1 - 0{,}10)^{4-1}$ = 19,1791 cuotas 37 a 48
Año 5: = 26,3088 $(1 - 0{,}10)^{5-1}$ = 17,2612 cuotas 49 a 60
Año 6: = 26,3088 $(1 - 0{,}10)^{6-1}$ = 15,5350 cuotas 61 a 72
Año 7: = 26,3088 $(1 - 0{,}10)^{7-1}$ = 13,9815 cuotas 73 a 84 Etc.

Una vez se haya cancelado la cuota 43 se deben las cuotas 44 a la 120.

Vamos a calcular el saldo de la deuda: En el enunciado se entregó este valor.

Comprobación:



P_{43} = 19,1791(P/A; 0,6434%; 5) + 17,2612(F/A; 0,6434%; 12)(P/C1; 8%;(-)10%, 6) (P/F; 0,6434%; 5)

P = 862,0831 UPAC

Comprobación utilizando el Programa en Excel:

Deuda inicial en UPAC	1.523,8283
Tasa del subperíodo (mes)	0,0064340
Número de años de plazo	10
Porcentaje del decrecimiento de las cuotas (G%)	-0,10
Número de subperíodos por año	12

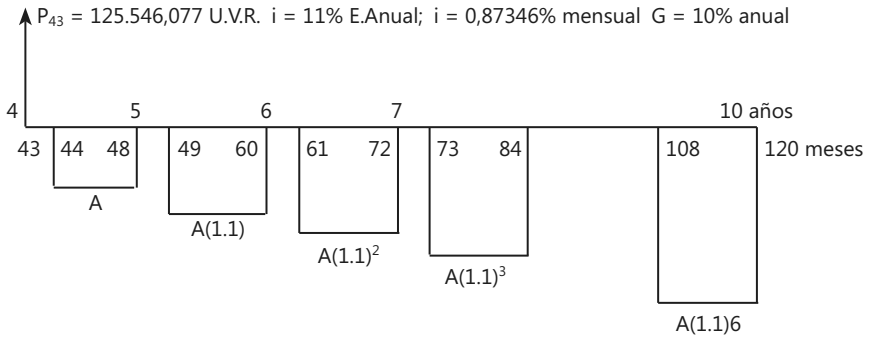
Mes	Saldo deuda	Interés	Cuota Upac	Amortización
0	1523,828	0,000	0,000	0,000
1	1507,324	9,804	26,309	16,504
2	1490,713	9,698	26,309	16,611
3	1473,996	9,591	26,309	16,718
8	1388,781	9,046	26,309	17,262
9	1371,407	8,935	26,309	17,373
10	1353,922	8,824	26,309	17,485

11	1336,324	8,711	26,309	17,598
12	1318,613	8,598	26,309	17,711
13	1303,420	8,484	23,678	15,194
14	1288,128	8,386	23,678	15,292
20	1194,289	7,786	23,678	15,892
21	1178,295	7,684	23,678	15,994
24	1129,694	7,373	23,678	16,305
25	1115,652	7,268	21,310	14,042
28	1072,983	6,996	21,310	14,314
29	1058,576	6,904	21,310	14,407
36	955,101	6,242	21,310	15,068
37	942,067	6,145	19,179	13,034
38	928,949	6,061	19,179	13,118
39	915,747	5,977	19,179	13,202
40	902,460	5,892	19,179	13,287
41	889,087	5,806	19,179	13,373
42	875,628	5,720	19,179	13,459
43	862,0831	5,634	19,179	13,545
44	848,451	5,547	19,179	13,632

Tabla de amortización gradiente escalonado porcentual.

Valor del saldo en pesos el 31/12/1999 = 862,0831 x 15.000 = $ 12.931.246
Valor de esta deuda expresada en U.V.R el 01/01/2000 :
12.931.246 / 103 = 125.546,077 U.V.R.

Cálculo de las nuevas cuotas en esta modalidad:



125.546,077= A(P/A; 0,87346%; 5) + 1,1A(F/A; 0,87346;12) (P/C1; 11%; 10%; 6) (P/F; 0,87346; 5)
(4,87161) (12,5936) (5,28511) (0,95745)
125.546,077 = 74,97081 A ⟶ A = 1.674,60 UVR (cuotas de los cinco primeros meses)

No.	Cuota	Interés	Amortización	Saldo
43				125.546,08
44	1.674,60	1.096,59	578,01	124.968,07
45	1.674,60	1.091,54	583,06	124.385,02
46	1.674,60	1.086,45	588,15	123.796,87
47	1.674,60	1.081,31	593,29	123.203,58
48	1.674,60	1.076,13	598,47	122.605,12
49	1.842,06	1.070,91	771,15	121.833,96
50	1.842,06	1.064,17	777,89	121.056,07
51	1.842,06	1.057,38	784,68	120.271,39
57	1.842,06	1.015,34	826,72	115.417,23
58	1.842,06	1.008,12	833,94	114.583,29
59	1.842,06	1.000,84	841,22	113.742,07
60	1.842,06	993,49	848,57	112.893,50
61	2.026,27	986,08	1.040,19	111.853,31
62	2.026,27	976,99	1.049,27	110.804,04
69	2.026,27	911,13	1.115,13	103.197,98
70	2.026,27	901,39	1.124,87	102.073,10
71	2.026,27	891,57	1.134,70	100.938,40
72	2.026,27	881,66	1.144,61	99.793,79
73	2.228,89	871,66	1.357,23	98.436,56
74	2.228,89	859,80	1.369,09	97.067,47
75	2.228,89	847,84	1.381,05	95.686,42
76	2.228,89	835,78	1.393,11	94.293,31
77	2.228,89	823,61	1.405,28	92.888,03
78	2.228,89	811,34	1.417,55	91.470,48
79	2.228,89	798,96	1.429,94	90.040,54
80	2.228,89	786,47	1.442,43	88.598,12
81	2.228,89	773,87	1.455,02	87.143,09
82	2.228,89	761,16	1.467,73	85.675,36
83	2.228,89	748,34	1.480,55	84.194,80
84	2.228,89	735,41	1.493,49	82.701,32
85	2.451,78	722,36	1.729,42	80.971,90
86	2.451,78	707,26	1.744,53	79.227,37
93	2.451,78	597,76	1.854,03	66.581,50
94	2.451,78	581,56	1.870,22	64.711,28
95	2.451,78	565,23	1.886,56	62.824,73
96	2.451,78	548,75	1.903,03	60.921,70
97	2.696,96	532,13	2.164,83	58.756,86
98	2.696,96	513,22	2.183,74	56.573,12
99	2.696,96	494,14	2.202,82	54.370,30
100	2.696,96	474,90	2.222,06	52.148,24

101	2.696,96	455,49	2.241,47	49.906,78
102	2.696,96	435,92	2.261,04	47.645,73
103	2.696,96	416,17	2.280,79	45.364,94
104	2.696,96	396,24	2.300,72	43.064,22
105	2.696,96	376,15	2.320,81	40.743,41
106	2.696,96	355,88	2.341,08	38.402,33
107	2.696,96	335,43	2.361,53	36.040,80
108	2.696,96	314,80	2.382,16	33.658,64
109	2.966,66	293,99	2.672,66	30.985,98
118	2.966,66	76,40	2.890,26	5.856,67
119	2.966,66	51,16	2.915,50	2.941,17
120	2.966,66	25,69	2.940,97	0,20

En el cuadro siguiente se presentan los saldos y cuotas del crédito en el sistema originalmente pactado en UPAC.

Para calcular los valores futuros de la UPAC se asumió una corrección monetaria promedio constante del 20% anual, y con estos últimos valores se hizo la conversión de los saldos y de las cuotas en UPAC a pesos.

La misma metodología se siguió con el nuevo sistema UVR. Para los valores futuros de la UVR se asumió una corrección promedio constante del 9% anual.

Es importante que observe detenidamente y analice económicamente el comportamiento, tanto de los saldos como de las cuotas en UPAC y en UVR, y sus equivalencias en pesos.

Los saldos y cuotas en pesos de los dos sistemas se graficaron con el fin de facilitar el análisis sugerido. (Ver tabla página siguiente).

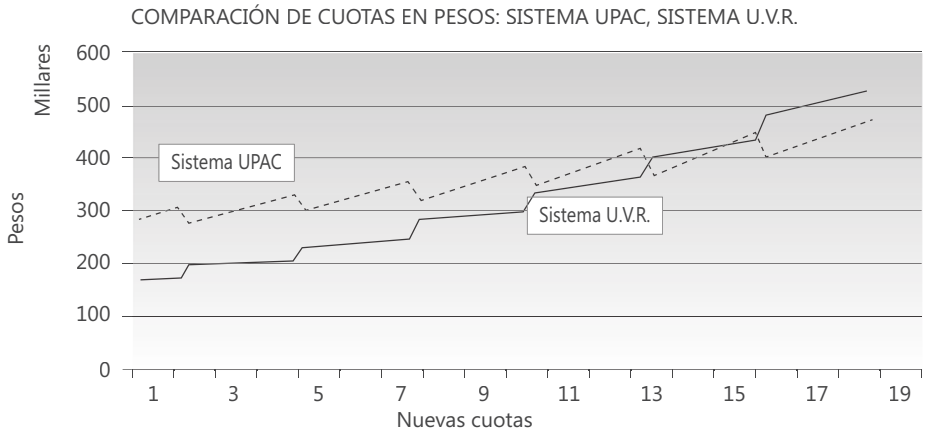


Gráfico 40 Saldo de la deuda en pesos: UPAC y UVR (a).

MODALIDAD DEL CRÉDITO EN UPAC UPAC MES 43 $15.000							MODALIDAD DEL CRÉDITO EN U.V.R. U.V.R. MES 43 $103					
C.M. PROYECTADA: 20% ANUAL							C.M. PROYECTADA: 9% ANUAL					
Número nueva cuota	Mes	Saldo en UPAC	Cuota en UPAC	Valores futuros UPAC	Saldo pesos	Cuota pesos	Mes	Saldo en U.V.R.	Cuota U.V.R	Valores futuros U.V.R.	Saldo pesos	Cuota pesos
0	43	862,08	19,18	15.000,00	12.931.247		43	125.546,08		103	12.931.246	
1	44	848,45	19,18	15.226,47	12.918.910	292.030	44	124.968,07	1.674,60	103,73	12.963.207	173.710
2	45	834,73	19,18	15.456,36	12.901.898	296.439	45	124.385,02	1.674,60	104,47	12.994.441	174.945
3	46	820,92	19,18	15.689,73	12.880.043	300.915	46	123.796,87	1.674,60	105,21	13.024.928	176.188
4	47	807,02	19,18	15.926,61	12.853.171	305.458	47	123.203,59	1.674,60	105,96	13.054.648	177.441
5	48	793,04	19,18	16.167,08	12.821.106	310.070	48	122.605,12	1.674,60	106,71	13.083.580	178.702
6	49	780,88	17,26	16.411,17	12.815.141	283.267	49	121.833,97	1.842,06	107,47	13.093.704	197.969
7	50	768,64	17,26	16.658,95	12.804.771	287.553	50	121.056,08	1.842,06	108,24	13.102.582	199.377
8	51	756,33	17,26	16.910,47	12.789.834	291.895	51	120.271,40	1.842,06	109,01	13.110.184	200.794
11	54	718,90	17,26	17.688,04	12.715.964	305.317	54	117.875,98	1.842,06	111,35	13.125.027	205.106
12	55	706,27	17,26	17.955,10	12.681.075	309.927	55	117.063,52	1.842,06	112,14	13.127.215	206.564
13	56	693,55	17,26	18.226,19	12.640.752	314.606	56	116.243,96	1.842,06	112,93	13.127.971	208.032
14	57	680,75	17,26	18.501,37	12.594.807	319.356	57	115.417,25	1.842,06	113,74	13.127.259	209.511
15	58	667,87	17,26	18.780,71	12.543.047	324.178	58	114.583,31	1.842,06	114,55	13.125.047	211.000
16	59	654,90	17,26	19.064,26	12.485.272	329.072	59	113.742,09	1.842,06	115,36	13.121.299	212.500
17	60	641,86	17,26	19.352,10	12.421.280	334.040	60	112.893,52	1.842,06	116,18	13.115.982	214.011
18	61	630,45	15,54	19.644,28	12.384.768	305.175	61	111.853,34	2.026,27	117,01	13.087.506	237.085
19	62	618,97	15,54	19.940,87	12.342.859	309.783	62	110.804,07	2.026,27	117,84	13.056.891	238.770
27	70	524,44	15,54	22.480,63	11.789.828	349.238	70	102.073,14	2.02,27	124,71	12.729.307	252.691
28	71	512,28	15,54	22.820,05	11.690.323	354.511	71	100.938,44	2.026,27	125,59	12.677.278	254.487
29	72	500,04	15,54	23164,59	11.583.313	359.864	72	99.793,83	2.026,27	126,49	12.622.614	256.296
30	73	489,28	13,98	23.514,33	11.505.085	328.767	73	98.436,60	2.228,89	127,39	12.539.446	283.930
31	74	478,45	13,98	23.869,36	11.420.201	333.731	74	97.067,51	2.228,89	128,29	12.452.937	285.948

38	81	400,63	13,98	26.509,23	10.620.505	370.641	81	87.143,14	2.228,89	134,81	11.748.006	300.483
39	82	389,23	13,98	26.909,47	10.473.983	376.237	82	85.675,41	2.228,89	135,77	11.632.238	302.619
40	83	377,75	13,98	27.315,75	10.318.611	381.917	83	84.194,86	2.228,89	136,74	11.512.478	304.770
41	84	366,20	13,98	27.728,17	10.154.112	387.683	84	82.701,37	2.228,89	137,71	11.388.647	306.937
42	85	355,97	12,58	28.146,82	10.019.555	354.183	85	80.971,95	2.451,78	138,69	11.229.752	340.030
43	86	345,68	12,58	28.571,78	9.876.741	359.531	86	79.227,43	2.451,78	139,67	11.065.913	342.447
44	87	335,32	12,58	29.003,16	9.725.409	364.959	87	77.467,67	2.451,78	140,67	10.897.035	344.881
50	93	271,75	12,58	31.731,72	8.623.152	399.293	93	66.581,57	2.451,78	146,77	9.772.345	359.854
51	94	260,92	12,58	32.210,81	8.404.343	405.322	94	64.711,35	2.451,78	147,82	9.565.361	362.412
52	95	250,01	12,58	32.697,14	8.174.682	411.442	95	62.824,80	2.451,78	148,87	9.352.509	364.988
53	96	239,04	12,58	33.190,80	7.933.841	417.654	96	60.921,76	2.451,78	149,92	9.133.678	367.583
54	97	229,25	11,33	33691,93	7.723.881	381.563	97	58.756,93	2.696,96	150,99	8.871.733	407.215
55	98	219,40	11,33	34.200,61	7.503.619	387.324	98	56.573,19	2.696,96	152,06	8.602.728	410.110
62	105	148,65	11,33	37.983,08	5.646.264	430.161	105	40.743,49	2.696,96	159,79	6.510.537	430.956
63	106	138,28	11,33	38.556,56	5.331.733	436.656	106	38.402,41	2.696,96	160,93	6.180.067	434.019
64	107	127,85	11,33	39.138,69	5.003.806	443.249	107	36.040,88	2.696,96	162,07	5.841.256	437.105
65	108	117,35	11,33	39.729,61	4.662.094	449.941	108	33.658,72	2.696,96	163,23	5.493.949	440.212
66	109	107,91	10,19	40.329,46	4.351.872	411.061	109	30.986,06	2.966,66	164,39	5.093.655	487.675
67	110	98,41	10,19	40.938,36	4.028.733	417.267	110	28.290,05	2.966,66	165,55	4.683.528	491.141
68	111	88,85	10,19	41.556,46	3.692.305	423.567	111	25.570,50	2.966,66	166,73	4.263.386	494.633
69	112	79,23	10,19	42.183,88	3.342.205	429.962	112	2.827,19	2.966,66	167,92	3.833.047	498.148
70	113	69,55	10,19	42.820,78	2.978.041	436.454	113	20.059,92	2.966,66	169,11	3.392.322	501.689
71	114	59,80	10,19	43.467,30	2.599.411	443.043	114	17.268,48	2.966,66	170,31	2.941.021	505.256
72	115	49,99	10,19	44.123,57	2.205.902	449.732	115	14.452,66	2.66,66	171,52	2.478.950	508.847
73	116	40,12	10,19	44.789,76	1.797.091	456.523	116	11.612,24	2.966,66	172,74	2.005.914	512.464
74	117	30,19	10,19	45.466,00	1.372.546	463.415	117	8.747,01	2.966,66	173,97	1.521.711	516.107
75	118	20,19	10,19	46.152,46	931.821	470.412	118	5.856,76	2.966,66	175,21	1.026.138	519.775
76	119	10,13	10,19	46.849,28	474.462	477.514	119	2.941,26	2.966,66	176,45	518.989	523.470
77	120	0,00	10,19	47.556,61	0	484.724	120	0,29	2.966,66	177,71	52	527.191

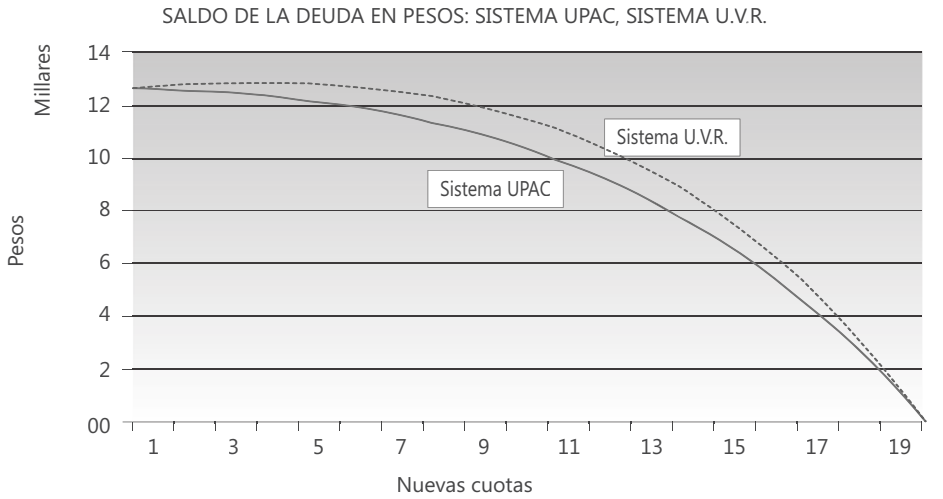


Gráfico 40 Saldo de la deuda en pesos: UPAC y UVR (b).

Problemas propuestos

Problema 12

Un constructor consigue en una corporación de ahorro y vivienda un crédito de $100.000.000 para un plan de vivienda. El valor de la UVR en el momento del préstamo es de $108,50. Se estima la CM de la UVR en un promedio del 13,7% (constante durante el crédito). El constructor considera que a los 14 meses podrá cancelar el 40% de las UVR que le prestarán, debido a las ventas que realizará, y el resto a los 18 meses. La tasa financiera pactada es del 14% efectiva anual.

a) ¿Cuánto pagará en pesos a los 14 meses?

b) ¿Cuánto pagará en pesos a los 18 meses?

Nota: Asuma los meses de 30 días.

Respuestas: $46.463.708 a los 14 meses y $96.909.523 a los 18 meses.

Problema 13

Se pactó un crédito para vivienda así: préstamo $12.000.000, pero en UVR; plazo 15 años; tasa efectiva 9,5% anual; cuotas decrecientes en un 9% cada año, pero constantes durante los 12 meses de cada año. Determinar el valor en UVR y en pesos de la cuota 78. Valor UVR al momento del préstamo: $104,70. Asuma una CM constante del 14% anual.

Respuestas: 1026,104137 UVR, $251.779; 1.063,2930 $260.905,22.

Problema 14

Al revisar el extracto de la cuenta de un cliente de una corporación de ahorro y vivienda, se encontraron los siguientes datos:

Plazo total: 10 años

Tasa de interés: 8% efectiva + CM

Cuotas decrecientes cada año (en UVR) pero constantes durante los 12 meses de cada año.

Decrecimiento anual en las cuotas: 12%

Número de la cuota a pagar hoy: 30

Valor de esta cuota: $250.000

Valor UVR hoy: $123,41

¿Cuál es el saldo después de pagar esta cuota?

Si asumimos una CM constante del 7,5% anual E, ¿Cuánto dinero le prestaron al cliente?

Si solicita que le conviertan estas cuotas variables en cuotas constantes, ¿cuánto valdrá la cuota 31 en UVR y en pesos?

Respuestas:

Valor de la UVR en período cero $103, Valor del préstamo $14.589.777.

Saldo en UVR después de pagar la cuota 30: 93.097,8309.

Saldo en pesos después de pagar la cuota 30: $11.489.416.

Cuotas constantes en UVR a partir de la 31: 1.365,8949.

Problema 15

En el extracto de una cuenta con una corporación de ahorro y vivienda aparece la siguiente información:

Valor de la cuota 80: 29,41176 UPAC

Fecha de pago: 31/12/2000

Valor de la UPAC el 31/12/2000: $15.000

Saldo después de pagar esta cuota: 1.147,05822 UPAC

Plazo total: 15 años

A partir del 1 de enero de 2001 las cuotas serán en UVR. Las cuotas mensuales serán constantes en UVR durante los 12 meses de cada año, pero cada año crecerán un 7,5%, que es el valor estimado promedio de la inflación.

La nueva tasa de interés será del 11,5% efectiva anual para las 100 cuotas restantes.

Corrección monetaria para la UVR estimada en promedio 8,4% anual E (estimada constante). Valor de la UVR el 1 de enero de 2001: $103.

¿Cuál será el valor de las nuevas cuotas 1, 24, 48 y 50 en UVR y en pesos en la reliquidación del crédito?

n	Saldo	Interés	Cuota U.V.R.	Valor UVR	Cuotas pesos
0	167047,31			103,00	
1	166553,95	1522,21	2015,58	103,69	209.005
2	166056,08	1517,72	2015,58	104,39	210.414
3	165553,68	1513,18	2015,58	105,10	211.833
4	165046,71	1508,60	2015,58	105,81	213.262
5	164535,11	1503,98	2015,58	106,52	214.700
6	164018,85	1499,32	2015,58	107,24	216.148
7	163497,89	1494,62	2015,58	107,96	217.606
8	162972,18	1489,87	2015,58	108,69	219.074
9	162441,67	1485,08	2015,58	109,42	220.551
10	161906,34	1480,24	2015,58	110,16	222.039
11	161366,13	1475,37	2015,58	110,90	223.536
12	160820,99	1470,44	2015,58	111,65	225.044
13	160119,72	1465,48	2166,75	112,40	243.553
14	159412,05	1459,09	2166,75	113,16	245.196
15	158697,94	1452,64	2166,75	113,93	246.850
16	157977,32	1446,13	2166,75	114,69	248.514
17	157250,14	1439,56	2166,75	115,47	250.190
18	156516,33	1432,94	2166,75	116,25	251.878
19	155775,83	1426,25	2166,75	117,03	253.576
20	155028,58	1419,50	2166,75	117,82	255.287
21	154274,53	1412,69	2166,75	118,61	257.008
22	153513,60	1405,82	2166,75	119,41	258.742
23	152745,74	1398,89	2166,75	120,22	260.487
24	151970,88	1391,89	2166,75	121,03	262.243
25	151026,45	1384,83	2329,25	121,85	283.813
26	150073,42	1376,22	2329,25	122,67	285.727
27	149111,71	1367,54	2329,25	123,50	287.654
28	148141,23	1358,78	2329,25	124,33	289.594
29	147161,91	1349,93	2329,25	125,17	291.547
30	146173,66	1341,01	2329,25	126,01	293.513
31	145.176,41	1332,00	2.329,25	126,86	295.493
32	144.170,07	1322,92	2.329,25	127,72	297.485
33	143.154,56	1313,75	2.329,25	128,58	299.492
34	142.129,79	1304,49	2.329,25	129,45	301.511
35	141.095,69	1295,15	2.329,25	130,32	303.545
36	140.052,17	1285,73	2.329,25	131,20	305.592
37	138.824,44	1276,22	2.503,95	132,08	330.727
38	137.585,52	1265,03	2.503,95	132,97	332.957
39	136.335,32	1253,74	2.503,95	133,87	335.203
40	135.073,72	1242,35	2.503,95	134,77	337.464
41	133.800,63	1230,86	2.503,95	135,68	339.740
42	132.515,93	1219,25	2.503,95	136,60	342.031
43	131.219,53	1207,55	2.503,95	137,52	344.337

44	129.911,32	1195,73	2.503,95	138,45	346.660
45	128.591,18	1183,81	2.503,95	139,38	348.998
46	127.259,01	1171,78	2.503,95	140,32	351.351
47	125.914,71	1159,64	2.503,95	141,27	353.721
48	124.558,15	1147,39	2.503,95	142,22	356.106
49	123.001,44	1135,03	2.691,75	143,18	385.396
50	121.430,54	1120,85	2.691,75	144,14	387.995
51	119.845,33	1106,53	2.691,75	145,11	390.612
52	118.245,67	1092,09	2.691,75	146,09	393.246
53	116.631,43	1077,51	2.691,75	147,08	395.898
54	115.002,49	1062,80	2.691,75	148,07	398.568
55	113.358,70	1047,96	2.691,75	149,07	401.256
56	111.699,93	1032,98	2.691,75	150,07	403.963
57	110.026,05	1017,86	2.691,75	151,09	406.687
58	108.336,91	1002,61	2.691,75	152,11	409.430
59	106.632,38	987,22	2.691,75	153,13	412.191
60	104.912,32	971,68	2.691,75	154,16	414.971
61	102.974,71	956,01	2.893,63	155,20	449.102
62	101.019,44	938,35	2.893,63	156,25	452.131
63	99.046,35	920,54	2.893,63	157,30	455.180
64	97.055,28	902,56	2.893,63	158,37	458.250
65	95.046,06	884,41	2.893,63	159,43	461.340
66	93.018,54	866,10	2.893,63	160,51	464.452
67	90.972,54	847,63	2.893,63	161,59	467.584
68	88.907,90	828,98	2.893,63	162,68	470.738
69	86.824,45	810,17	2.893,63	163,78	473.912
70	84.722,01	791,19	2.893,63	164,88	477.108
71	82.600,41	772,03	2.893,63	165,99	480.326
72	80.459,47	752,69	2.893,63	167,11	483.566
73	78.082,01	733,18	3.110,65	168,24	523.339
74	75.682,88	711,52	3.110,65	169,38	526.868
75	73.261,89	689,66	3.110,65	170,52	530.421
76	70.818,84	667,60	3.110,65	171,67	533.999
77	68.353,53	645,33	3.110,65	172,83	537.600
78	65.865,75	622,87	3.110,65	173,99	541.226
79	63.355,30	600,20	3.110,65	175,16	544.876
80	60.821,98	577,32	3.110,65	176,35	548.551
81	58.265,57	554,24	3.110,65	177,54	552.250
82	55.685,86	530,94	3.110,65	178,73	555.974
83	53.082,65	507,44	3.110,65	179,94	559.724
84	50.455,71	483,71	3.110,65	181,15	563.499
85	47.571,54	459,78	3.343,95	182,37	609.847
86	44.661,09	433,49	3.343,95	183,60	613.960
87	41.724,12	406,97	3.343,95	184,84	618.100
88	38.760,38	380,21	3.343,95	186,09	622.269

89	35.769,64	353,20	3.343,95	187,34	626.465
90	32.751,64	325,95	3.343,95	188,61	630.690
91	29.706,14	298,45	3.343,95	189,88	634.944
92	26.632,89	270,70	3.343,95	191,16	639.226
93	23.531,64	242,69	3.343,95	192,45	643.537
94	20.402,12	214,43	3.343,95	193,75	647.877
95	17.244,09	185,91	3.343,95	195,05	652.246
96	14.057,28	157,14	3.343,95	196,37	656.645
97	10.590,63	128,10	3.594,74	197,69	710.654
98	7.092,39	96,51	3.594,74	199,03	715.447
99	3.562,28	64,63	3.594,74	200,37	720.272
100	0,00	- 32,46	3.594,74	201,72	725.130

Respuestas:

Tasa anual E: 11,50%, mensual: 0,9112468%

C.M anual: 8,40% mensual: 0,6744132%

Capítulo 10

Evaluación económica de alternativas

En los capítulos anteriores se han evaluado inversiones, créditos, capitalizaciones y operaciones financieras de un solo proyecto económico. Ahora vamos a aplicar los conceptos matemáticos estudiados para evaluar, de forma simultánea, varias alternativas mutuamente excluyentes. Por ejemplo, un inversionista está interesado en crear una empresa y considera dos o tres posibilidades. Necesariamente se deben formular los respectivos proyectos que incluyan las inversiones iniciales, los ingresos y egresos durante sus vidas útiles, los valores de salvamentos y demás consideraciones económicas que puedan influir en la toma de decisión.

Los diferentes proyectos pueden tener vidas útiles iguales o vidas útiles diferentes.

Los métodos más utilizados en la práctica son: comparación de alternativas mediante el valor presente, el CAUE y la tasa financiera de recuperación de capital. En este estudio utilizaremos los dos primeros.

COMPARACIÓN EN VALOR PRESENTE DE ALTERNATIVAS CON VIDAS ÚTILES IGUALES

Procedimiento:

1. Se elabora el flujo de caja de cada alternativa por separado: ingresos y egresos.
2. Se le calcula el valor presente a cada alternativa.
3. Si el flujo de caja incluye sólo egresos, se selecciona o prefiere la alternativa que tenga el menor valor presente (menos egresos).
4. Si el flujo de caja incluye ingresos provenientes de ventas y otros ingresos, además de los egresos, se selecciona o prefiere la alternativa que tenga el mayor valor presente (utilidades).

Es muy frecuente que el flujo de caja utilice únicamente los egresos cuando en las diferentes alternativas se supone que los ingresos los generará el mismo producto que se fabricará y se venderá; por ejemplo, fábricas de confecciones montadas con máquinas de cierta marca o con otra marca diferente que tengan precios diferentes, o que se instalen en ciudades diferentes donde la mano de obra tiene costos diferentes o que los impuestos municipales sean diferentes, materiales diferentes con costos diferentes, etcétera, pero se considera que las ventas y las cantidades producidas sean las mismas en cada alternativa.

En este caso los ingresos no son importantes porque tendrían el mismo valor presente y la decisión final se tomaría por los menores costos.

En caso de que los ingresos sean diferentes por cualquier causa, se deben tener en cuenta en el análisis.

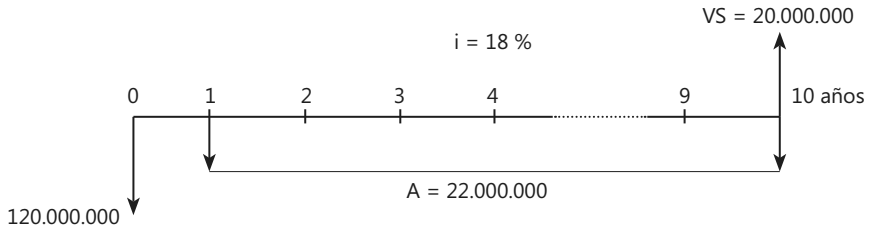
Problema 1

Un proyecto tiene dos planes de realización. Los ingresos serían iguales en los dos planes, pero los egresos son diferentes por la tecnología que pueden utilizar.

El flujo de egresos de cada plan se presenta en la siguiente tabla. Si la tasa financiera del proyecto es de 18% anual E, ¿cuál plan debe seleccionarse?

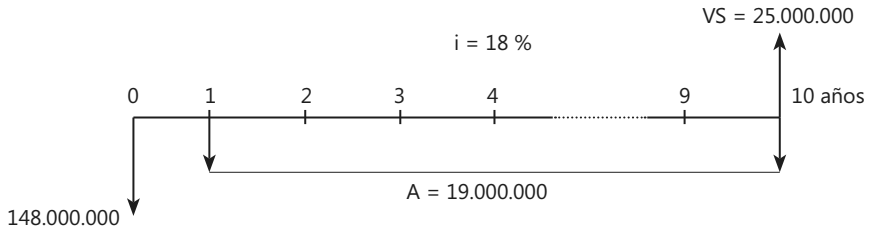
	Plan 1	**Plan 2**
Inversión inicial	$120.000.000	$148.000.000
Mano de obra anual	$ 22.000.000	$ 19.000.000
Valor de salvamento	$ 20.000.000	$ 25.000.000
Vida útil en años	10	10

Valor presente del Plan 1



VP = - 120.000.000 - 22.000.000 (P/A, 18%, 10) + 20.000.000 (P/F, 18%, 10)
VP = - $ 215.048.609

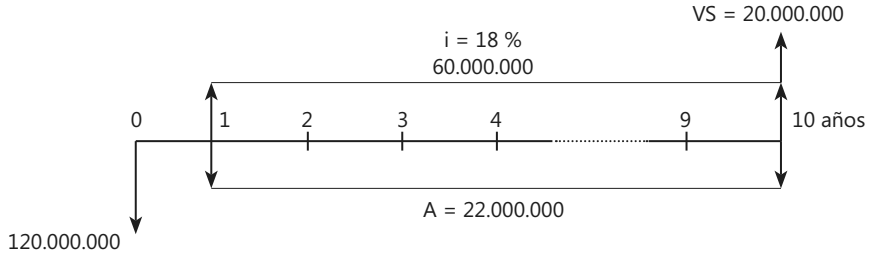
Valor presente del Plan 2



VP = - 148.000.000 - 19.000.000 (P/A, 18%, 10) + 25.000.000 (P/F, 18%, 10)
VP = - $ 228.611.028

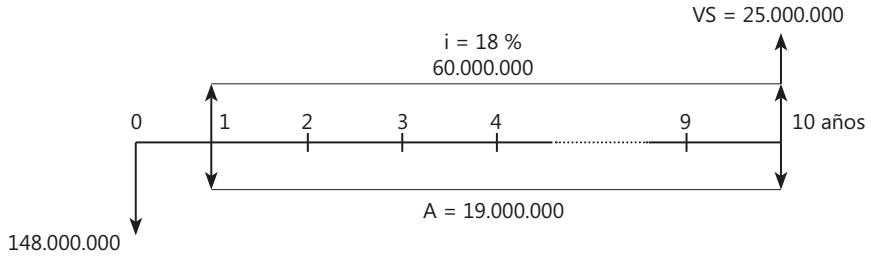
Es mejor el Plan 1.

Asumamos que los ingresos de estos dos planes sean $60.000.000 anuales.
Valor presente del Plan 1



VP = -120.000.000 - 22.000.000(P/A, 18%, 10) + 20.000.000(P/F, 18%, 10) + 60.000.000(P/A, 18%, 10)
VP = $ 54.596.569 El plan es rentable.

Valor presente del Plan 2



VP = -148.000.000 - 19.000.000(P/A, 18%, 10) + 25.000.000(P/F, 18%, 10) + 60.000.000(P/A, 18%, 10)
VP = $41.034.150 El plan es rentable.

Observe que con el criterio de alternativa rentable sigue siendo mejor el Plan 1.

Esta decisión es concordante con el numeral 4 del procedimiento descrito al comienzo del capítulo.

Problema 2

Una empresa de gaseosas está considerando la posibilidad de montar una fábrica de envases para sus productos. Se le presentan dos anteproyectos, uno totalmente automatizado, que requiere menos mano de obra, y otro poco automatizado. Cada anteproyecto utilizaría la misma materia prima pero en cantidades diferentes por las capacidades de producción. Los costos más importantes de los anteproyectos son:

El anteproyecto 1 tendría una inversión inicial de $1.450 millones de dólares, costo de instalación de $30 millones de dólares, materia prima de $85 millones de dólares el primer año, pero cada año posterior estos costos suben el 5%. La mano

de obra calificada será de $80 millones el primer año, cada año esta mano de obra aumentará en promedio 10 millones de dólares. El mantenimiento preventivo se hará cada seis años con un primer valor de 12 millones de dólares y cada mantenimiento posterior será un 20% de mayor costo. El valor de salvamento a los 20 años será del 40% de la inversión inicial.

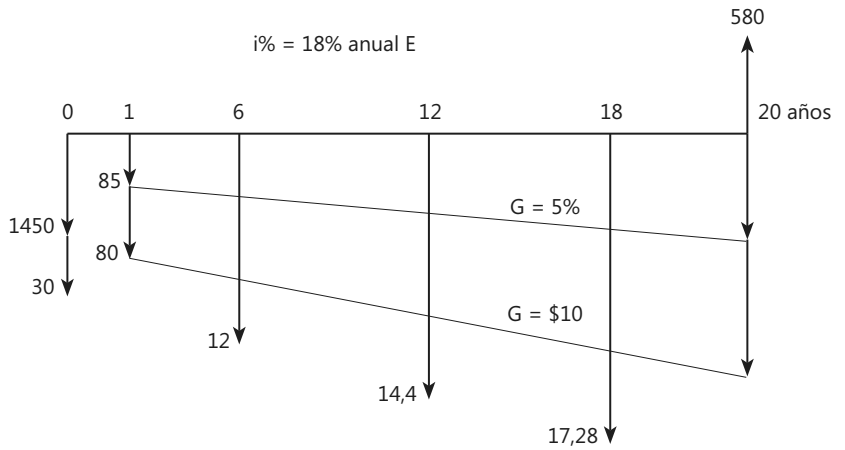
El anteproyecto 2 tendría una inversión inicial de $950 millones de dólares, costo de instalación de $35 millones de dólares, materia prima de $68 millones de dólares el primer año, pero cada año posterior estos costos suben el 7%. La mano de obra semicalificada será de $140 millones el primer año, cada año esta mano de obra disminuirá por efecto de las capacitaciones previstas en un 8% anual. El mantenimiento preventivo se hará cada cuatro años con un primer valor de 9 millones de dólares y cada mantenimiento posterior será un 30% de mayor costo. El valor de salvamento a los 20 años será del 25% de la inversión inicial.

Tasa financiera del proyecto: 18% anual E.

Mediante el análisis de comparación del valor presente ¿qué anteproyecto debe elegirse?

Anteproyecto 1

Cifras en millones de dólares.



VP = 580 (P/F, 18%, 20) – 1.450 – 30 – 85 (P/C1, 18%, 5%(G), 20) – [80(P/A, 18%,20) + 10 (P/G, 18%, 20)] – 12 (P/F, 18%, 6) – 14,4(P/F, 18%, 12) – 17,28 (P/F, 18%, 18)

VP = -2.748,62 millones de dólares

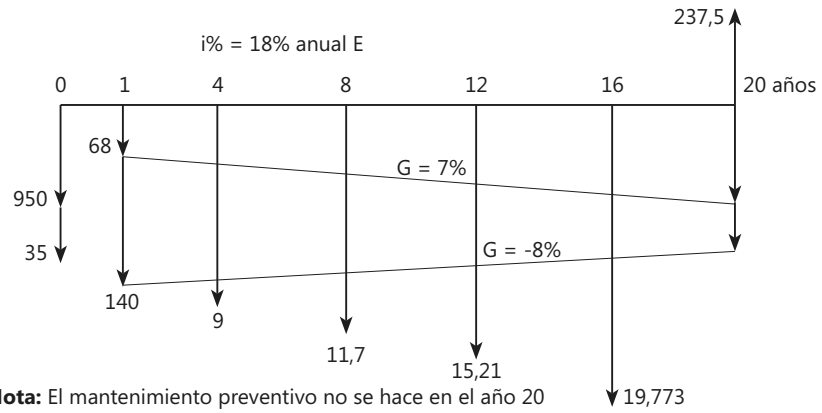
En el cuadro siguiente podemos observar la solución obtenida con el VNA en Excel (vea el complemento virtual al libro).

n	Egreso1	Egreso2	Egreso3	Ingreso	Flujo neto
0	1.480				1.480
1		86	80		166
2		90	90		180
3		95	100		195
4		100	110		210
5		105	120		225
6	12	110	130		252
7		115	140		255
8		121	150		271
9		127	160		287
10		133	170		303
11		140	180		320
12	14,4	147	190		351
13		154	200		354
14		162	210		372
15		170	220		390
16		179	230		409
17		188	240		428
18	17,28	197	250		464
19		207	260		467
20		217	270	580	93

VP en -12.329,34 - millones de dólares
VP en 0-2.748,62millones de dólares

Anteproyecto 2

Cifras en millones de dólares



Nota: El mantenimiento preventivo no se hace en el año 20 porque se vende el proyecto en ese año.

VP = 237,5 (P/F, 18%, 20) – 950 – 35 – 68 (P/C1,18%, 7%(G), 20) – 140 (P/C1,18%,-8%(G),20) – 9 (P/F,18%, 4) – 11,7(P/F,18%, 8) – 15,21 (P/F, 18%, 12) – 19,773 (P/F, 18%, 16)
VP = -2.053,18 millones de dólares

Es mejor el anteproyecto 2.

En el cuadro siguiente podemos observar la solución obtenida con el VNA en Excel (ver capítulo 13).

n	Egreso1	Egreso2	Egreso3	Ingreso	Flujo neto
0	985				985,00
1		68,00	140,00		208,00
2		72,76	128,80		201,56
3		77,85	118,50		196,35
4	9	83,30	109,02		201,32
5		89,13	100,30		189,43
6		95,37	92,27		187,64
7		102,05	84,89		186,94
8	11,7	109,19	78,10		198,99
9		116,84	71,85		188,69
10		125,02	66,10		191,12
11		133,77	60,81		194,58
12	15,21	143,13	55,95		214,29
13		153,15	51,47		204,62
14		163,87	47,36		211,22
15		175,34	43,57		218,91
16	19,773	187,61	40,08		247,47
17		200,75	36,88		237,62
18		214,80	33,93		248,72
19		229,84	31,21		261,05
20		245,92	28,71	237,50	37,14

VP en -11.739,98 - millones de dólares
VP en 02.053,18 - millones de dólares

COMPARACIÓN EN VALOR PRESENTE DE ALTERNATIVAS CON VIDAS ÚTILES DIFERENTES

Por lo general, los proyectos de inversión contemplan las posibilidades de invertir en diferentes tipos de negocios que además de tener flujos de caja diferentes pueden tener vidas útiles también diferentes.

Por ejemplo, invertir en una fábrica de muebles es diferente a invertir en una fábrica de confecciones, a invertir en bonos, a invertir en el mercado accionario, a invertir en depósitos a término, etcétera.

Procedimiento para el análisis:

1. Se busca el mínimo común múltiplo (m.c.m) de las vidas útiles de las alternativas.

Ejemplo: si son dos alternativas de vidas útiles de tres y seis años, el m.c.m de ellas es seis. Si son tres alternativas de vidas útiles de tres, cuatro, y seis años, el m.c.m es 12.

Este m.c.m se utilizará como el valor de la vida útil general para todas las alternativas, para que las alternativas estén en igualdad de condiciones en cuanto a la duración de la inversión.

En el primer ejemplo asumimos que las dos alternativas deben durar seis años cada una. Quiere decir que la primera tendrá dos ciclos de vida, cada uno de tres años. Para el segundo ciclo se repite el mismo flujo de caja que tuvo en el primero.

En el segundo ejemplo el m.c.m es 12. La primera alternativa la debemos repetir con los mismos flujos de caja cuatro veces, la segunda la repetimos tres veces y la tercera tiene dos ciclos de vida. En estas condiciones las tres alternativas tienen un ciclo de vida igual al m.c.m.

2. Se elabora el flujo de caja de cada alternativa por separado: ingresos y egresos. Cada una con un ciclo igual m.c.m.
3. Se le calcula el valor presente a cada alternativa.
4. Si el flujo de caja incluye sólo egresos, se selecciona o prefiere la alternativa que tenga el menor valor presente (menos egresos).
5. Si el flujo de caja incluye ingresos provenientes de ventas y otros ingresos, además de los egresos, se selecciona o prefiere la alternativa que tenga el mayor valor presente (utilidades).

Al igual que en el caso de vidas útiles iguales es muy frecuente que el flujo de caja utilice únicamente los egresos cuando en las diferentes alternativas se supone que los ingresos los generará el mismo producto que se fabricará y se venderá.

En caso de que los ingresos sean diferentes por cualquier causa, se deben tener en cuenta en el análisis.

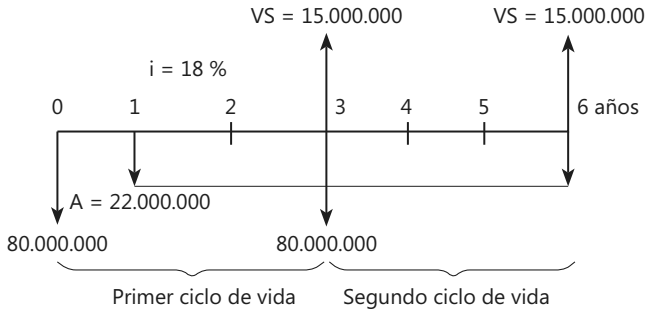
Problema 3

Un proyecto tiene dos planes de realización. Los ingresos sería iguales en los dos planes, pero los egresos son diferentes por la tecnología que pueden utilizar.

El flujo de egresos de cada plan se presenta en la siguiente tabla. Si la tasa financiera del proyecto es de 18% anual E, ¿cuál plan debe seleccionarse?

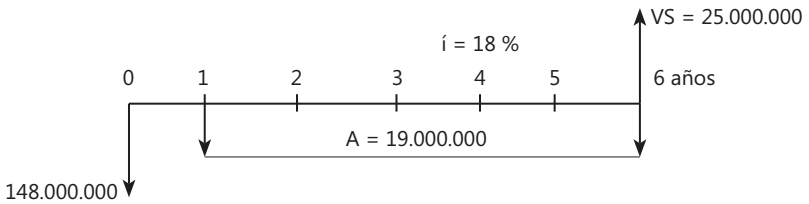
	Plan 1	**Plan 2**
Inversión inicial	$80.000.000	$148.000.000
Mano de obra anual	$22.000.000	$19.000.000
Valor de salvamento	$15.000.000	$25 .000.000
Vida útil en años	3	6

Valor presente del Plan 1



VP = - 80.000.000 - 22.000.000(P/A, 18%, 6) + (15.000.000 - 80.000.000)(P/F, 18%, 3) + 15.000.000 (P/F, 18%, 6)
VP = - $ 190.951.790

Valor presente del Plan 2



VP = - 148.000.000 - 19.000.000 (P/F, 18%, 6) + 25.000.000 (P/F, 18%, 6)
VP = - $ 197.193.660

Es mejor el Plan 1.

Problema 4

Compare las siguientes alternativas con base en un análisis de valor presente, con una tasa de interés del 16% anual CM.

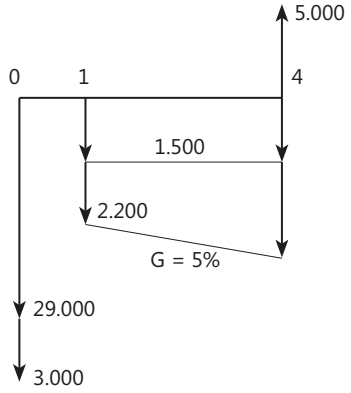
	Plan A	**Plan B**	**Plan C**
Costo inicial,	$29,000	38,000	43.000
Costo de instalación,	$ 3,000	4,000	5.000
Costo anual de mantenimiento,	$ 1,500	2,800	900
Costo anual de operación,	$ 2,200	1.800	1.400
Crecimiento anual en este costo	5%	6%	7%
Salvamento	$ 5.000	7.000	12.000
Vida, años	4	8	16

Mínimo común múltiplo: 16 años. El ciclo de vida del Plan A debe repetirse cuatro veces; el ciclo del Plan B se repite dos veces, y el del Plan C no se repite, ocurre solo una vez.

Conversión de la tasa: 16% anual C.M. ⟶ 17,23% anual E.

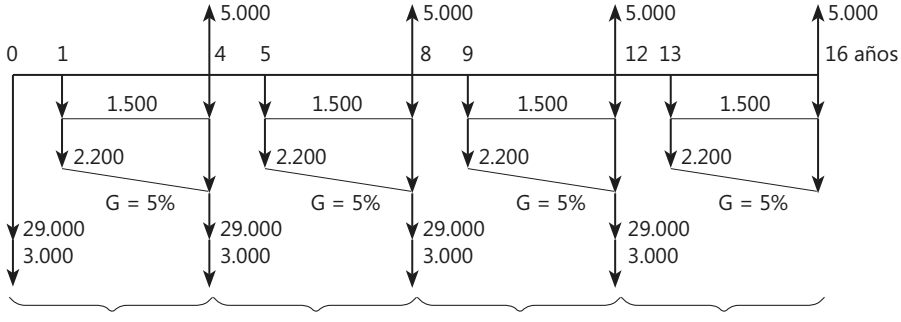
Plan A

El primer ciclo del Plan A es el que se presenta continuación. Este ciclo se repite cuatro veces para llegar en tiempo al m.c.m. Para simplificar los cálculos llevamos a VP todos los flujos del primer ciclo. Este valor queda en el período cero. Si hacemos lo mismo con cada ciclo, sus valores serán iguales al primero y quedarán ubicados en los períodos 4, 8 y 12, respectivamente.



VP_1 = 5.000 (P/F, 17,23%, 4) – 32.000
- 1.500 (P/A, 17,23%, 4) –
2.200 (P/C, 17,23%, 5%(G), 4)
VP_1 = $- 39.860

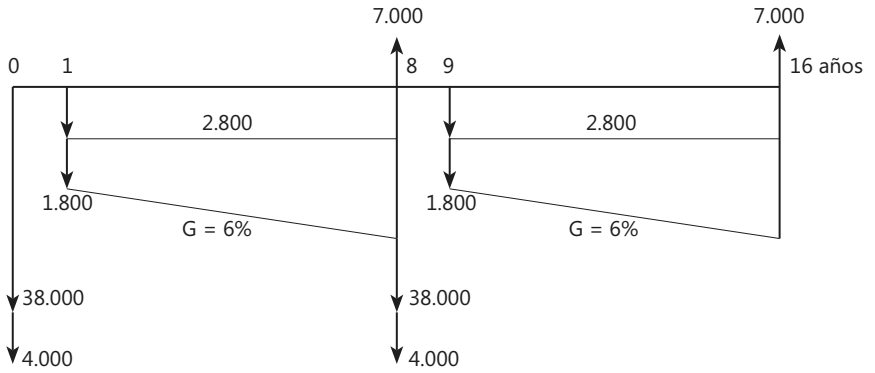
El diagrama para los cuatro ciclos es el siguiente.



V/P(A) = 39.860 - 39.860(P/F, 17,23%, 4) - 39.860(P/F, 17,23%, 8) - 39.860(P/F, 17,23%, 12)
V/P(A) = $-78.056

Plan B

El primer ciclo del Plan B es el que se presenta a continuación, pero en este caso no lo presentamos separadamente como en el caso anterior. Este ciclo se repite dos veces para llegar en tiempo al m.c.m. Formulamos una sola ecuación para los dos ciclos de vidas. Observe que este procedimiento constituye un segundo método de solución diferente al utilizado en el primer caso del Plan A.

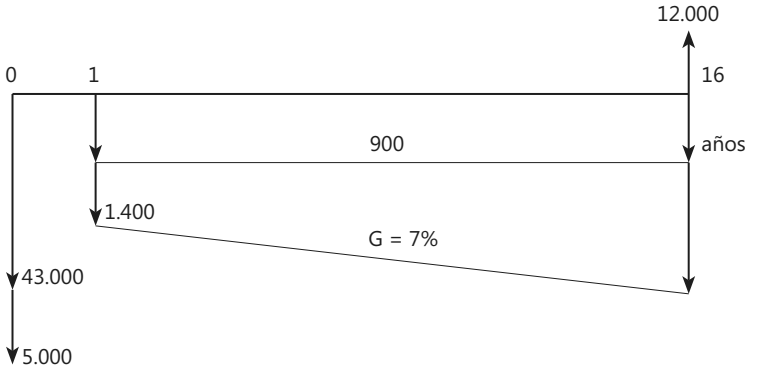


VP(B)= - 42.000 – 2.800 (P/A, 17,23%, 8) -1.800(P/C, 17,23%, 6%(G), 8) + 7.000(P/F, 17,23%, 8) – 42.000(P/F, 17,23%, 8) - 2.800(P/A, 17,23%, 8) (P/F, 17,23%, 8) - 1.800(P/C, 17,23%, 6%(G), 8) (P/F, 17,23%, 8) + 7.00(P/F, 17,23%, 16)

VP (B) = $- 77.588

Plan C

Esta alternativa sólo debe cumplir un ciclo de vida.



VP(C) = - 48.000 – 900(P/A,17,23%,16) – 1.400(P/C,17,23%,7% (G%),16) + 12.000(P/F, 17,23%,16)

VP(C) = $- 62.380

Mejor alternativa: Plan C

COMPARACIÓN DE ALTERNATIVAS CON EL MÉTODO DEL CAUE (COSTO ANUAL UNIFORME EQUIVALENTE)

El método del CAUE (Costo Anual Uniforme Equivalente) consiste en convertir todos los flujos de caja de cada alternativa en series uniformes colocadas desde el período uno hasta el período n. La suma algebraica de estas series (ingresos menos egresos) constituye el CAUE.

Procedimiento para el análisis:

1. Se elabora el flujo de caja de cada alternativa por separado, ingresos y egresos.
2. Se le calcula el CAUE de cada alternativa.
3. Si el flujo de caja incluye solo egresos, se selecciona o prefiere la alternativa que tenga el menor CAUE (menos egresos).
4. Si el flujo de caja incluye ingresos provenientes de ventas y otros ingresos, además de los egresos, se selecciona o prefiere la alternativa que tenga el mayor CAUE.

Es muy frecuente que el flujo de caja utilice únicamente los egresos cuando en las diferentes alternativas se supone que los ingresos los generará el mismo producto que se fabricará y se venderá. Por ejemplo, fábricas de confecciones montadas con máquinas de cierta marca o con otra marca diferente que tengan precios diferentes, o que se instalen en ciudades diferentes donde la mano de obra tiene costos diferentes o que los impuestos municipales sean diferentes, materiales diferentes con costos diferentes, etcétera, pero se considera que las ventas y las cantidades producidas sean las mismas en cada alternativa.

En este caso los ingresos no son importantes porque tendrían el mismo CAUE y la decisión final se tomaría por los menores costos.

En caso de que los ingresos sean diferentes por cualquier causa, se deben tener en cuenta en el análisis.

La ventaja principal de este método sobre el VP radica en que éste no requiere hacer la comparación sobre el mínimo común múltiplo (m.c.m) de los años cuando las alternativas tienen vidas diferentes. Es decir, el valor CAUE de la alternativa se calcula para un ciclo de vida solamente.

Como su nombre lo implica, el CAUE es un valor anual equivalente sobre la vida del proyecto. Si el proyecto continúa durante más de un ciclo, se supone que el valor anual equivalente durante el siguiente ciclo y todos los ciclos posteriores es exactamente igual que para el primero, siempre y cuando todos los flujos de caja sean los mismos para todos los ciclos de vida.

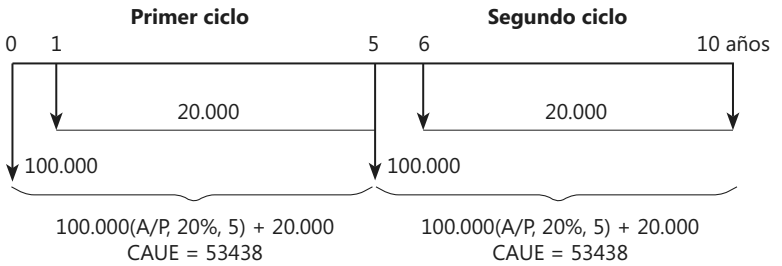
Ejemplo: si una inversión de $100.000 tiene una vida útil de cinco años y un costo de operación de $20.000 anuales, el CAUE para el primer ciclo de vida a una tasa del 20% anual sería:

CAUE1 = 100.000(A/P, 20%, 5) + 20.000 = $53.438 Primer ciclo de vida.

CAUE2 = 100.000(A/P, 20%, 5) + 20.000 = $53.438 Segundo ciclo de vida.

La condición repetible de la serie anual uniforme a través de diversos ciclos de vida la podemos observar considerando un diagrama de flujo de caja con dos ciclos de vida.

Este mismo CAUE será obtenido para tres, cuatro o cualquier otro número de ciclos de vida.



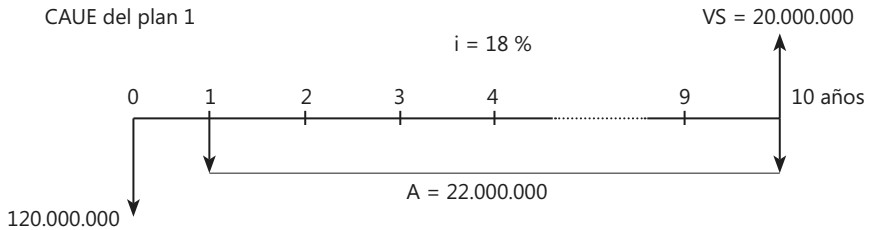
Vamos a ilustrar este procedimiento resolviendo los mismos ejemplos presentados en el método del VP de la sección anterior. Por medio del método del CAUE debemos llegar a las mismas conclusiones de selección de alternativas.

Problema 5

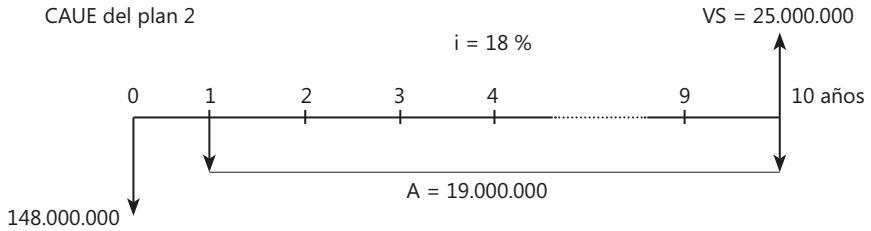
Un proyecto tiene dos planes de realización. Los ingresos sería iguales en los dos planes, pero los egresos son diferentes por la tecnología que pueden utilizar.

El flujo de egresos de cada plan se presenta en la siguiente tabla. Si la tasa financiera del proyecto es de 18% anual E, utilizando el CAUE, ¿cuál plan debe seleccionarse?

	Plan 1	**Plan 2**
Inversión inicial	$120.000.000	$148.000.000
Mano de obra anual	$22.000.000	$19.000.000
Valor de salvamento	$20.000.000	$25 .000.000
Vida útil en años	10	10

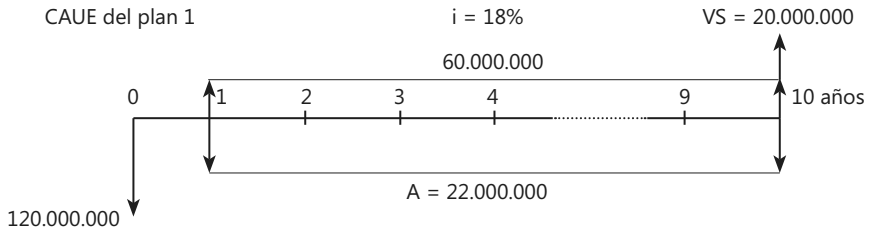


CAUE 1 = - 120.000.000(A/P, 18%, 10) - 22.000.000 + 20.000.000 (A/F, 18%, 10)
CAUE 1 = - $ 47.851.464

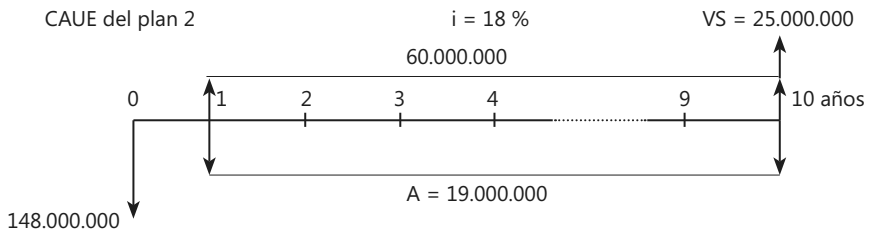


CAUE 2 = - 148.000.000(A/P, 18%, 10) - 19.000.000 + 25.000.000 (A/F, 18%, 10)
CAUE 2 = - $ 50.869.301 Es mejor el Plan 1.

Asumamos que los ingresos de estos dos planes sean $60.000.000 anuales.



CAUE 1 = - 120.000.000(A/P,18%,10)-22.000.000+20.000.000(A/F,18%,10)+ 60.000.000
CAUE 1 = $ 12.148.536El plan es rentable.



CAUE 1 = - 148.000.000(A/P,18%,10)-19.000.000+25.000.000(A/F,18%,10)+ 60.000.000
CAUE 1 = $ 9.130.699 El plan es rentable

Observe que con el criterio de alternativa rentable sigue siendo mejor el plan 1.

Problema 6

Una empresa de gaseosas está considerando la posibilidad de montar una fábrica de envases para sus productos. Se le presentan dos anteproyectos: el primero totalmente automatizado, que requiere menos mano de obra, y el segundo poco automatizado. Cada anteproyecto utilizaría la misma materia prima pero en cantidades

diferentes por las capacidades de producción. Los costos más importantes de los anteproyectos son:

El anteproyecto 1 tendría una inversión inicial de $1.450 millones de dólares, costo de instalación de $30 millones de dólares, materia prima de $85 millones de dólares el primer año, pero cada año posterior estos costos suben el 5%. La mano de obra calificada será de $80 millones el primer año, cada año esta mano de obra aumentará en promedio 10 millones de dólares. El mantenimiento preventivo se hará cada 6 años con un primer valor de 12 millones de dólares y cada mantenimiento posterior será un 20% de mayor costo. El valor de salvamento a los 20 años será del 40% de la inversión inicial.

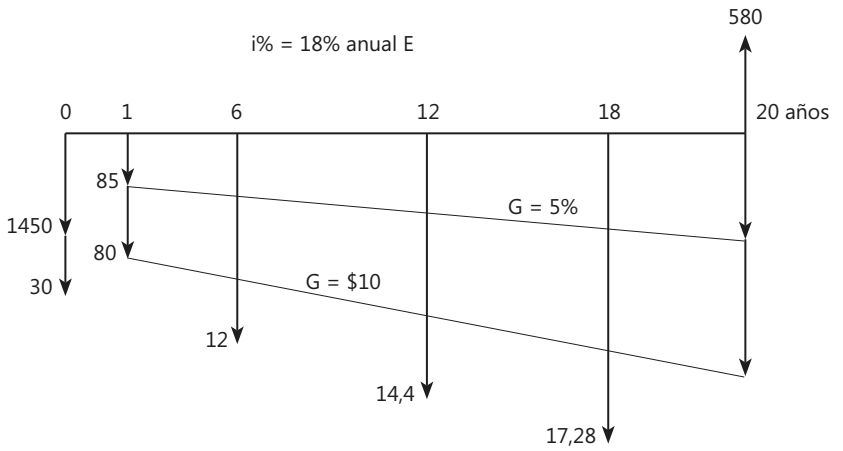
El anteproyecto 2 tendría una inversión inicial de $950 millones de dólares, costo de instalación de $35 millones de dólares, materia prima de $68 millones de dólares el primer año, pero cada año posterior estos costos suben el 7%. La mano de obra semicalificada será de $140 millones el primer año, cada año esta mano de obra disminuirá por efecto de las capacitaciones previstas en un 8% anual. El mantenimiento preventivo se hará cada cuatro años con un primer valor de nueve millones de dólares y cada mantenimiento posterior será un 30% de mayor costo. El valor de salvamento a los 20 años será del 25% de la inversión inicial.

Tasa financiera del proyecto: 18% anual E.

Mediante el análisis de comparación del CAUE ¿qué anteproyecto debe elegirse?

Anteproyecto 1

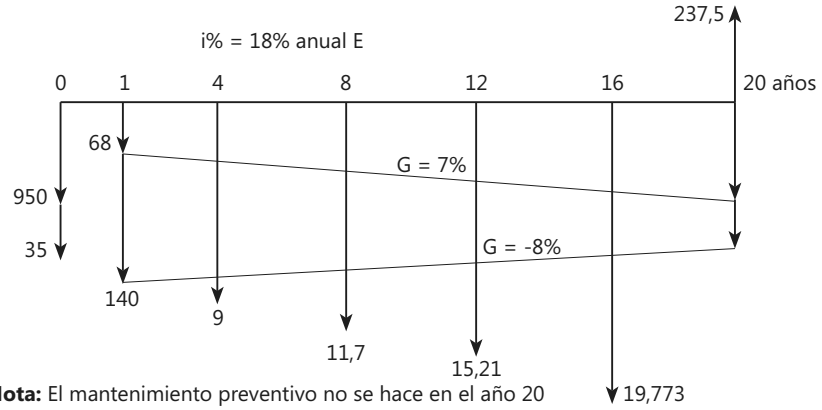
Cifras en millones de dólares



CAUE = 580 (A/F,18%,20) – 1.480(A/P,18%,20) – 85(P/C1, 18%,5%(G), 20) (A/P, 18%,20) – [80 + 10(A/G,18%,20)] –12 (P/F,18%,6)(A/P,18%,20) – 14,4(P/F, 18%,12) (A/P,18%,20) – 17,28 (P/F, 18%, 18) (A/P, 18%,20)

CAUE = -513,50 millones de dólares

Anteproyecto 2
Cifras en millones de dólares



Nota: El mantenimiento preventivo no se hace en el año 20 porque se vende el proyecto en ese año.

CAUE= 237,5(A/F,18%,20) – 985(A/P, 18%, 20) – 68 (P/C1,18%, 7%(G), 20) (A/P,18%,20)–140(P/C1,18%,-8%(G),20)(A/P,18%,20)– 9 (P/F,18%, 4) (A/P, 18%, 20) –11,7(P/F,18%, 8)(A/P,18%,20) – 15,21(P/F,18%, 12) (A/P, 18%, 20) – 19,773 (P/F, 18%, 16) (A/P, 18%, 20)

CAUE = -383,57 millones de dólares

Es mejor el anteproyecto 2.

Observe que la decisión de adoptar el segundo proyecto es la misma que se consiguió cuando se resolvió el problema por valor presente en el caso anterior.

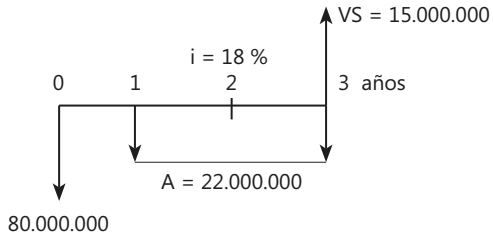
Problema 7

Vidas diferentes.

Un proyecto tiene dos planes de realización. Los ingresos sería iguales en los dos planes, pero los egresos son diferentes por la tecnología que pueden utilizar. El flujo de egresos de cada plan se presenta en la siguiente tabla. Si la tasa financiera del proyecto es de 18% anual E, ¿cuál plan debe seleccionarse?

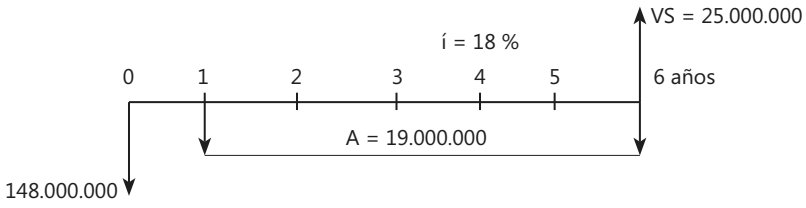
	Plan 1	**Plan 2**
Inversión inicial	$80.000.000	$148.000.000
Mano de obra anual	$22.000.000	$19.000.000
Valor de salvamento	$15.000.000	$25.000.000
Vida útil en años	3	6

Valor presente del Plan 1



CAUE = - 80.000.000(A/P, 18%, 3) - 22.000.000 + 15.000.000(A/F, 18%, 3)
CAUE = - $ 54.595.051

Valor presente del Plan 2



CAUE = - 148.000.000 (A/P, 18%, 6) - 19.000.000 + 25.000.000 (A/F, 18%, 6)
VP = - $56.379.665 Es mejor el Plan 1.

Igual decisión a la que se tomó por Valor Presente.

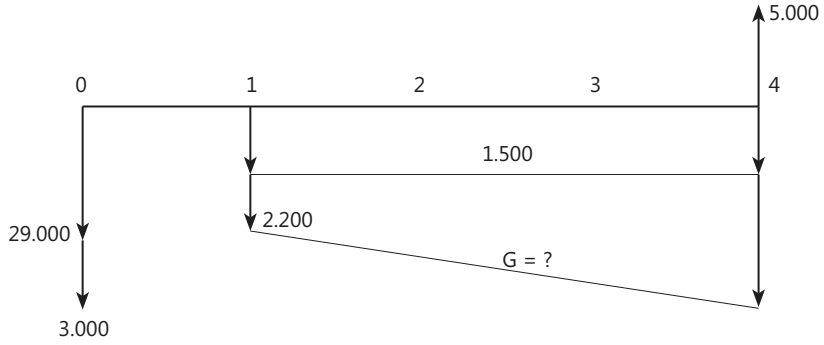
Problema 8

Compare las siguientes alternativas con base en un análisis del CAUE, utilizando una tasa de interés del 16% anual C.M.

	Plan A	**Plan B**	**Plan C**
Costo inicial,	$29.000	38,000	43.000
Costo de instalación,	$ 3,000	4,000	5.000
Costo anual de mantenimiento,	$ 1,500	2,800	900
Costo anual de operación,	$ 2,200	1.800	1.400
Crecimiento anual en este costo	5%	6%	7%
Salvamento	$ 5.000	7.000	12.000
Vida, años	4	8	16

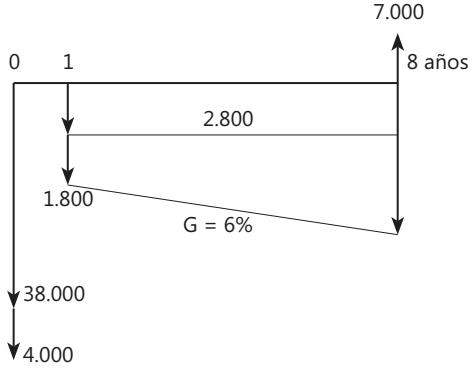
Conversión de la tasa: 16% anual C.M. ⟶ 17,23% anual E.

Plan A



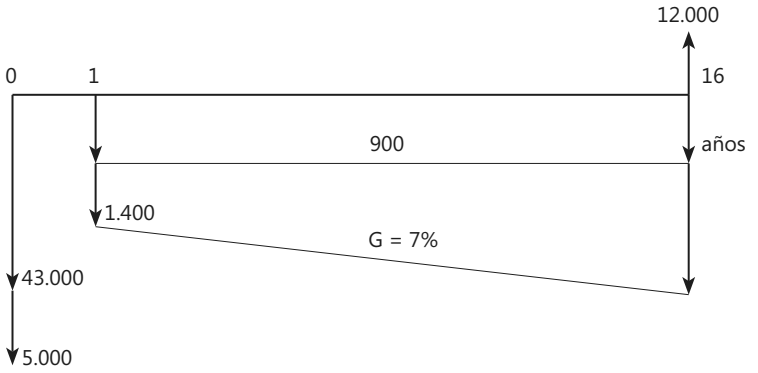
$CAUE_A$ = 5.000 (A/F, 17,23%, 4) - 32.000(A/F, 17,23%, 4) - 1.500 - 2.200 (P/C, 17,23%, 5%(G),4) (A,/P,17,23%,4)
$CAUE_A$ = $ - 14.596

Plan B



$CAUE_B$ = 7.000 (A/F, 17,23%, 8) - 42.000 (A,/P,17,23%,8) - 2.800 - 1.800 (P/C, 17,23%, 6%(G), 8) (A,/P,17,23%, 8)
$CAUE_B$ = $ -18.641

Plan C



$CAUE_C$ = - 48.000(A/P,17,23%,16) - 900 - 1.400(P/C,17,23%, 7% (G%),16) (A/P, 17,23%,16) + 12.000(A/F, 17,23%,16)
$CAUE_C$ = $- 14.508
Mejor alternativa: Plan C.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 9

Un municipio está interesado en construir un puente para cruzar un pequeño río. Se estudian dos posibilidades con características diferentes. El puente tipo 1 de doble vía y el puente tipo 2 de una vía.

El puente tipo 1 costará 50 millones de dólares con costos de inspección y mantenimiento anuales de $35.000. Además, la cubierta de concreto tendrá que renovarse cada 10 años con un costo de $100.000.

El puente tipo 2 tendrá un costo de $25 millones y un costo de mantenimiento anual de $20.000. Este puente tendrá que pintarse cada tres años a un costo de $40.000. También deberá limpiarse cada 10 años a un costo de $190.000.

El costo de compra del terreno para la construcción de los puentes será de $2 millones para el puente 1 y de $15.000 para el 2.

Se considera que la vida de ambos puentes será permanente (vida infinita).

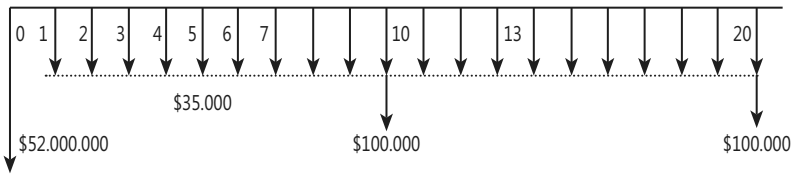
Compare por valor presente y por CAUE las alternativas, si la tasa de interés es del 6% anual E.

Ayudas para la solución.

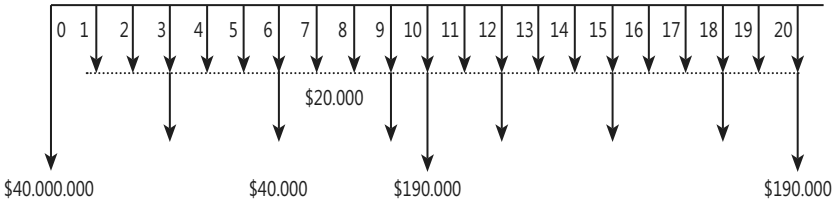
1. Por ser la vida infinita, el valor presente es costo capitalizado (ver capítulo 4).
2. Al formular las ecuaciones puede utilizar tasas equivalentes efectivas para períodos de los trienios (cada tres años) y para los decenios (cada 10 años), y hacer que estos flujos se consideren series uniformes (ver capítulo 5).

3. Como alternativa puede convertir todos los flujos diferentes a las inversiones iniciales en flujos anuales utilizando el n propio de cada flujo. También puede convertir la inversión inicial en serie anual uniforme utilizando la fórmula A = P. i% (vida infinita). Puede sumar las series uniformes de cada alternativa obteniendo así el CAUE y luego convertir en VP cada CAUE.
4. El siguiente diagrama muestra un ciclo de 20 años.

Puente 1



Puente 2



Respuestas: VP puente 1: $-52.709.783, VP puente 2: $-40.782.983
Conclusión: Se debe construir el puente 2, el costo capitalizado es menor
CAUE puente 1: $-3.162.587, CAUE puente 2: $-2.446.979

Problema 10

Una empresa de controles eléctricos le ofrece a un centro comercial 10 controles para operar automáticamente las puertas de acceso. El costo inicial incluida la instalación es de $8.000.000. El mantenimiento anual incluidas las reposiciones necesarias de equipos será de $1.250.000 anuales. Este ofrecimiento es por todo el tiempo que lo necesite el centro comercial.

Una segunda opción es comprar con otro proveedor cada control por $280.000, cada uno, y hacer el mantenimiento con personal propio a un costo de $1.200.000 anuales. La vida útil de estos controles se estima en cinco años sin valor de recuperación.

La TMAR del centro comercial es de 15% anual. ¿Cuál alternativa es mejor?

Primera alternativa: $- 2.450.000

Segunda alternativa:$- 2.035.284

Es mejor la segunda opción.

Problema 11

Una empresa transnacional cuenta con un portafolio de inversiones para la producción de sus productos en diferentes países. Planea instalar una planta de producción en uno de los siguientes países. Los datos de los estudios económicos realizados se muestran en la siguiente tabla.

País	Inversión (millones de dólares)	Ingresos anuales (millones de dólares)
Guatemala	60	19,0
Colombia	48	17,0
Ecuador	71	20,9
Argentina	63	19,5
Venezuela	55	18,4
Chile	69	20,7

Las inversiones se están planeando para un periodo de nueve años. Se ha calculado que el VS de las inversiones sea del 35% de su valor original, cualquiera que sea el país donde esté la industria.

Los gastos operativos en cada región serían el 40% de los ingresos anuales.

Si la TMAR de la transnacional es del 10% anual, determínese por análisis del valor presente en qué país debe invertir.

Respuesta: Selecciónese Colombia; VP: $17,87 millones

Problema 12

Una fábrica de muebles desea tecnificar su departamento de pintura y secado. El asesor técnico le propone dos alternativas de inversión. La primera, adquirir un equipo de pintura y secado marca Alfa a un costo de $8.700.000, que tiene un costo anual de man¬tenimiento de $2.200.000 y un valor de salvamento de $2.400 000 al final de su vida útil de seis años. La segunda, adquirir un equipo alternativo marca Beta que tiene un costo de adquisición de $6.800.000, y sus costos anuales de mantenimiento son de $900.000 el primer año, con incrementos anuales de $350.000. La vida útil que da el fabricante a este equipo es de nueve años, con un valor de salvamento de $1.500 000 al final de ese periodo.

La TMAR es de 8% anual. Si se desea tomar la mejor decisión económica, dado que ambas alternativas ofrecen la misma calidad productiva y los mismos ingresos, ¿qué alternativa se debe seleccionar?

Respuesta: Es mejor el equipo Beta. VP (para 18 años): $- 28.961.792,
CAUE: $-3.090.284

Problema 13

Se tienen tres procesos operacionales para producir un artículo utilizando tres máquinas diferentes.

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
Inversión	6 000	8 000	7 000
Mantenimiento primer año	438	610	550
Incremento anual Mantenimiento.	4%	3%	$40
Vida útil (años)	7	10	9
VS	1.800	0	700

Si la TMAR es de 7% anual ¿cuál es la mejor alternativa por medio del CAUE?
Respuesta: Seleccione Maquina 1 CAUE: $-1.394

Problema 14

El Concejo Municipal de una ciudad recibe dos propuestas para solucionar los problemas de acueducto.

La primera alternativa comprende la construcción de un embalse utilizando un río cercano, que tiene un caudal suficiente relativamente. El embalse formará una represa y de allí se tomará la tubería que transportará el agua a la ciudad. Además, con el embalse se podrá alimentar una hidroeléctrica particular que pagará al municipio una cantidad 500.000 dólares el primer año de funcionamiento e incrementos anuales de 10.000 dólares. El costo inicial del embalse se estima en 4 millones de dólares, con costos de mantenimiento el primer año de 200.000 dólares e incrementos anuales del 12.000. Se espera que el embalse dure indefinidamente (vida perenne).

Como alternativa, la ciudad puede perforar pozos en la medida requerida y construir acueductos para transportar el agua a la ciudad. Los ingenieros proponentes estiman que se requerirá inicialmente un promedio de 10 pozos a un costo de 35.000 dólares, cada uno, con la tubería de conducción. Se espera que la vida promedio de un pozo sea de 10 años, con un costo anual de operación de 18.000 dólares por pozo e incrementos anuales por pozo de 450 dólares. Si la tasa de interés que se requiere es del 15% anuaI, determine cuál alternativa debe seleccionarse.
Respuesta: CAUE de embalse: -313.333 dólares; CAUE de pozos: -264.963 dólares.

Es mejor alternativa construir los pozos.

Capítulo 11

Bonos

Normalmente las empresas deben recurrir al financiamiento cuando desean hacer nuevas inversiones como ampliaciones, compra de nuevos equipos, nuevas agencias aprovisionamiento de M.P., etcétera.

Dependiendo del tipo de empresa, puede tener una o varias opciones para recurrir al crédito.

- Fuentes de financiación
  - Fuentes internas
    - Aportes de capital
    - Depreciación
    - Préstamos de socios
  - Fuentes externas
    - Créditos en general
    - Emisión de acciones
    - Emisión de bonos

Como puede, deducirse la emisión de bonos es una de las fuentes de financiamiento externo de las empresas.

Bono: Es una obligación a largo plazo de una empresa.

La emisión de bonos puede ocurrir en empresas estatales, mixtas y privadas. En todos los casos, la emisión es controlada por la Comisión de Valores y las empresas emisoras deben sujetarse a las normas del Código de Comercio.

TERMINOLOGÍA BÁSICA

Emisor: Es la empresa que obtiene crédito emitiendo bonos.

Inversionista: Son las personas naturales o jurídicas que compran los bonos. En otras palabras los acreedores del emisor.

Intermediario: Son las entidades que venden y administran los bonos. Pueden ser varias, inclusive el mismo emisor. Las funciones que realizan van desde la venta de los bonos, pagos de intereses a los inversionistas, administración en general de la emisión y pago del valor de recuperación de la inversión. También se les llama fideicomisario.

Precio: Es el valor de venta de cada bono. El precio puede ser a la par cuando se vende por el mismo valor nominal y a descuento cuando se vende por un valor inferior del nominal.

Valor nominal: Es el valor que pagará el emisor a los inversionistas una vez se cumpla el plazo del crédito. También se le llama valor de redención. Sobre este valor nominal se pagan los intereses que cobran los inversionistas lo mismo que las comisiones de los fideicomisarios.

Fecha de emisión: Es la fecha en la cual se ponen a la venta los bonos.

Fecha de colocación: Estas fechas normalmente son diferentes para la mayoría de los bonos. A partir de esta fecha empieza el período de maduración de cada bono.

Fechas de redención: Es la fecha en la cual se hace exigible el valor de recuperación de la inversión.

Periodo de maduración: Es el tiempo que transcurre entre la fecha de colocación y la fecha de redención. Corresponde a la vida útil de la inversión.

Interés: Es el rendimiento financiero de los bonos para los inversionistas. Es el compromiso de pago que asume el emisor. El interés siempre se liquida en los períodos convenidos y sobre el valor nominal. El interés puede ser anticipado o vencido y en períodos diferentes en la negociación.

Costo de capital: Es la tasa financiera que asume el emisor al pagar los intereses, comisiones y gastos generales de la emisión. Esta tasa siempre tendrá que ser menor que la tasa de rendimiento que logre el emisor por la utilización del crédito conseguido en la emisión.

Clases de bonos: Pueden ser convertibles, (en acciones), hipotecarios, (tienen garantía real con bienes raíces), prendarios (maquinaria y equipo), sin respaldo específico, etcétera. Pueden tener denominaciones como Bono clase A, Clase B, etcétera dependiendo del tiempo de maduración o de la modalidad de pago de intereses.

EJEMPLO DE UN PROYECTO DE EMISIÓN DE BONOS. (Se utiliza nombre supuesto)

PROSPECTO DE EMISIÓN Y COLOCACIÓN
DE BONOS DE GARANTÍA GENERAL
CORPORACIÓN FINANCIERA S.A.
"CORFINAN'
EMISIÓN Número 37
1993

1.	NOMBRE:	Según escrituras de constitución	
2.	CONSTITUCIÓN:	Según escrituras	
3.	DOMICILIO:	Dirección comercial	
4.	OBJETO SOCIAL:	Según escrituras de constitución	
5.	DURACIÓN:	Según escrituras	
6.	CAPITAL SOCIAL:	a.	Capital autorizado
		b.	Capital suscrito y pagado:
7.	RESERVAS:	a.	Reserva legal:
		b.	Reserva ocasional:

8. PERMISO DE FUNCIONAMIENTO: Número y fecha de resolución.

9. MONTO DE LA EMISION:
El monto de la emisión será la suma de OCHO MIL MILLONES de pesos ($8.000.000.000) moneda legal.
10. VALOR NOMINAL DE CADA BONO:
La emisión está representada en dieciséis mil (16.000) bonos de un valor nominal de quinientos mil pesos cada uno ($500.O00), en títulos que podrán contener un número plural de bonos.
11. PLAZO DE LOS BONOS:
Los bonos tendrán un plazo de vencimiento entre doce (12) meses y treinta y seis (36) meses, a elección del suscriptor, contados a partir de la fecha. de suscripción.
12. RENDIMIENTO DE LOS BONOS:
Los bonos se emiten a tasa fija o variable a elección del suscriptor.
    a. La tasa fija se situará entre un mínimo de 15% efectivo anual y un máximo de 50% efectivo anual. Pagadera por mes, trimestre o semestre anticipado o vencido.
    b. La tasa variable será la tasa DTF vigente en la fecha de iniciación de cada trimestre, la cual podrá ser adicionada entre -0,25 puntos y hasta 3 puntos porcentuales.

    Si el suscriptor elige una tasa variable, la corporación definirá el rendimiento del bono en el momento de la suscripción, de acuerdo con la situación del mercado, dentro de los límites fijados en este prospecto

    El rendimiento será pagadero por trimestre anticipado, mes anticipado, mes vencido, trimestre anticipado o trimestre vencido en su equivalente a trimestre anticipado.

    Todos los bonos que se coloquen en el mercado en la misma fecha tendrán las mismas condiciones de tasa de interés según la modalidad elegida por el suscriptor.
13. FORMA DE PAGO:
En el momento de efectuarse la suscripción deberá cancelarse de contado el valor total de los bonos suscritos
14. LUGAR Y FORMA DE PAGO DE LOS RENDIMIENTOS:
Los intereses serán cancelados de conformidad con la modalidad pactada con el suscriptor, en cualquiera de las oficinas abiertas al público de la Corporación Financiera S.A., CORFINAN, situadas en las ciudades de Pereira, Bogotá, Medellín, Cali, Barranquilla y Armenia, durante el horario bancario.

    La tardanza del tenedor en el cobro de los intereses causados no dará lugar al reconocimiento de intereses por mora.

    Para el pago de los intereses el tenedor legitimo deberá identificare con la cédula de ciudadanía o NIT, y presentar el título original con veinticuatro (24)

horas de antelación a la fecha de pago. En el evento de que el cobro se haga a través de terceros, además del título original, es necesario presentar la autorización correspondiente con el reconocimiento de firma y contenido ante Notario Público.

15. PAGO DE INTERESES:
Cada pago de intereses se hará constar al reverso de cada título en la casilla correspondiente al período en que se causaron. Cuando haya de expedirse un nuevo título, por cualquier circunstancia, en el título se anotará el periodo a partir del cual los bonos allí incorporados devengaran intereses.
16. FORMA Y LUGAR DE PAGO DEL CAPITAL A LOS TENEDORES:
Los bonos serán amortizados en dinero en sus respectivas fechas de vencimiento, a su valor nominal, en cualquiera de las oficinas abiertas al público de la Corporación Financiera S.A., situadas en las ciudades de Pereira, Bogotá, Medellín, Cali, Barranquilla y Armenia.

    La tardanza del tenedor en presentar los bonos vencidos para el reembolso de su respectivo capital no dará lugar a que la Corporación Financiera S. A., CORFINAN, cancele intereses de mora.

    Para el pago del Capital el tenedor legítimo deberá identificarse con la Cédula de Ciudadanía o NIT, y presentará el título original con veinticuatro (24) horas de anterioridad. En el evento de que el cobro se haga a través de terceras personas, además del título original, acompañarán la autorización correspondiente con reconocimiento de texto y firma ante Notario público.

    La redención del título se efectuará dentro del horario normal bancario en las oficinas de la Corporación Financiera S. A.
17. LEY DE CIRCULACIÓN DE LOS BONOS:
Los bonos de la presente emisión serán a la orden y negociables libremente en el mercado secundario, transferibles mediante endoso y entrega del título.

    Si en el momento de la negociación del título hubiere intereses causados y no cobrados, se pagarán al adquirente, salvo pacto en contrario de las partes expresado por escrito a la sociedad emisora, con arreglo a lo dispuesto en el artículo 418 del Código de Comercio.
18. AGRUPACIÓN O FRACCIONAMIENTO DE BONOS:

    Los respectivos tenedores podrán solicitar por su cuenta la agrupación de títulos, siempre y cuando presenten vencimientos y modalidades de pago iguales, para lo cual deberán ser entregados los correspondientes títulos.
19. INDIVISIBILIDAD DE LOS BONOS:

    Los bonos son indivisibles. En consecuencia, cuando por cualquier causa, legal o convencional, un bono pertenezca a varias personas, éstas deberán designar un representante común y único que ejerza los derechos correspondientes a la calidad de propietario del bono.

No se expedirán títulos por fracciones de bonos.

20. PAGO DE IMPUESTOS:
Serán a cargo de los tenedores los impuestos que graven o lleguen a gravar la suscripción, pago de intereses o transferencia de dominio de los Bonos.
21. EMISIONES ANTERIORES:
La Corporación Financiera S.A., CORFINAN, tiene actualmente en circulación la emisión No 35, por valor de ocho mil millones de pesos moneda legal ($8.000.000.000) y se encuentra pendiente de reembolso la totalidad de la emisión.
22. AUTORIZACIÓN DE LA EMISIÓN:
La Junta Directiva de la Corporación Financiera, en sesión del diez (10) de diciembre de 1997, aprobó una emisión de Bonos de Garantía General por valor de ocho mil millones de pesos ($8.000.000.000) e impartió la aprobación al presente prospecto de emisión según consta en el acta No 581.
23. REEMBOLSO ANTICIPADO:
No habrá lugar a reembolso anticipado de los valores correspondientes a los presentes bonos.
24. PROCEDIMIENTO PARA EFECTOS DE LA REPOSICIÓN. REIVINDICACIÓN O CANCELACIÓN DE LOS BONOS.
Para efectos de la reposición, cancelación o reivindicación de los bonos de garantía general se aplicará lo dispuesto en los artículos 802 y siguientes del Código de Comercio.
25. TÍTULO DE LOS BONOS
Se expedirán en papel de seguridad y llevarán las firmas autógrafas del Presidente y del Secretario General de la Corporación, además de la firma autógrafa del director de la agencia, o de quien haga sus veces, en la cual se coloque el o los bonos. Igualmente, llevarán el sello protector correspondiente.

La Corporación sólo reconocerá validez a los títulos que lleven la firma de los funcionarios mencionados y el respectivo sello protector.

En los títulos de los bonos, además, se hará referencia a lo preceptuado por los artículos 15 del Decreto 1167 de 1980 y 16 del Decreto 1026 de 1990.
26. FECHA DE EMISIÓN
Para todos los efectos se entenderá como fecha de emisión el día siguiente a aquel en que se publique el aviso de oferta con el correspondiente reglamento de suscripción en el diario determinado en este prospecto.
27. FECHA DE SUSCRIPCIÓN:
Para todos los efectos se entenderá como fecha de expedición la fecha en que se realice la suscripción de compra original de los bonos, o se expidan duplicados en caso de reposición de títulos, o la fecha en que se fraccionen los títulos inicialmente emitidos.

28. COLOCACIÓN DE LOS BONOS:
    Los Bonos de Garantía General de que trata este prospecto se colocarán ajustándose a lo establecido en las siguientes reglas:
    a. PLAZO
       El plazo de colocación de esta emisión es de un (1) año, contado a partir del día siguiente a la publicación del aviso de oferta pública.
    b. DESTINATARIO
       Los bonos se colocarán en forma libre entre el público en general.
    c. MEDIOS DE COMUNICACIÓN
       Los bonos serán colocados en el mercado primario directamente por la Corporación Financiera en sus oficinas, o a través de las bolsas de valores de Bogotá, Occidente y Medellín.
    d. AVISO DE OFERTA PÚBLICA
       El aviso de oferta pública de los bonos se hará en el diario LA REPÚBLICA, y adicionalmente en los diarios que la Corporación considere necesarios.
    e. PAGO DEL BONO
       El valor de cada bono deberá ser pagado íntegramente en el momento de suscripción.
    f. COSTOS
       Los costos globales de la colocación de los bonos, que incluyen gastos de publicidad, comisiones e inscripciones en las bolsas de valores, son aproximadamente de cinco millones de pesos.
29. ADVERTENCIA DE LOS ARTÍCULOS 15 DEL DECRETO 1167 DE 1980 Y 16 DEL DECRETO 1026 DE 1990
    La inscripción en el Registro Nacional de Valores no implica certificación sobre la bondad del valor o la solvencia del emisor.
30. INSCRIPCIÓN DE LOS BONOS EN BOLSAS DE VALORES
    Los bonos serán negociables en el mercado secundario a través de las bolsas de valores de Bogotá y Medellín
31. DESTINACIÓN DEL EMPRÉSTITO
    Las sumas que la Corporación perciba en desarrollo de la colocación de esta emisión de bonos se destinarán al mejoramiento y expansión de sus servicios a favor de las empresas manufactureras, agropecuarias y mineras y de todas aquellas otras que pueda atender en virtud de normas regales y al fortalecimiento de sus resultados en la intermediación financiera.
32. DERECHOS Y OBLIGACIONES DE LOS TENEDORES DE BONOS
    Además de los derechos que les corresponda como acreedores de la Corporación, los tenedores de bonos tienen los siguientes derechos y obligaciones:

Derechos:

a. A percibir los intereses correspondientes y al reembolso del capital de conformidad con los términos de este prospecto.

b. A participar en la asamblea general de tenedores de bonos, por sí o por medio de apoderado.
c . A solicitar a la Corporación que convoque a Asamblea General de Tenedores de Bonos, siempre que tal solicitud se realice por lo menos por un grupo de tenedores que represente por lo menos el 10% del monto insoluto del empréstito.
d. A negociar los bonos de conformidad con su ley de circulación y dentro de los términos de este prospecto.
c . Los demás derechos que se desprendan de este prospecto y de su ley de circulación.

Obligaciones:

a. Pagar totalmente el valor de la suscripción en el momento de la misma.
b. Avisar oportunamente a la Corporación el extravío, hurto o destrucción total de algún título, de acuerdo con los procedimientos anteriormente establecidos.
c. Presentarse en las oficinas de la corporación para el cobro de los intereses que se causen y para la redención del título en las fechas determinadas en el mismo.

DE LA ASAMBLEA GENERAL DE TENEDORES DE BONOS

La Asamblea General de Tenedores de Bonos se reunirá en Pereira en virtud de convocatoria de la sociedad emisora, la cual asistirá siempre con derecho a voz.

El grupo de tenedores que represente no menos del 10% del monto insoluto del empréstito, podrá exigir a la corporación que convoque a asamblea y si ésta no lo hiciere, podrá solicitarse a la Superintendencia Bancaria para que realice la convocatoria. La Superintendencia Bancaria podrá convocar a asamblea cuando existan hechos graves que deban ser conocidos por los tenedores y que puedan determinar que se impartan instrucciones a la Corporación.

La convocatoria para la asamblea se hará en todos los casos por medio de aviso publicado con quince (15) días hábiles de antelación, en los periódicos en los cuales se haya publicado la oferta.

La asamblea deliberará válidamente con un número no inferior al cincuenta y uno por ciento (51%) del monto insoluto del empréstito y las decisiones se tomarán por la mayoría de votos presentes en la reunión. Sin embargo, se requerirá un número plural de tenedores de bonos que representen por lo menos el ochenta por ciento (80%) del empréstito insoluto para modificar las condiciones del empréstito, para votar favorablemente una fórmula concordataria o para autorizar a la corporación a que modifique el objeto social en el sentido de no continuar desarrollando actividades financieras y para autorizar la fusión, escisión o transformación de la corporación.

Si para la primera convocatoria no se reuniere el quórum suficiente, podrá citarse, en la misma forma que para la primera, a nueva reunión en la que bastará la asistencia de cualquier número plural de tenedores de bonos que representen por lo menos el veinte por ciento (20%) del valor del empréstito insoluto.

Cada tenedor tendrá tantos votos cuantos bonos tenga.

Las decisiones adoptadas válidamente en la reunión obligan a los disidentes y ausentes.

Ninguna disposición de la asamblea puede establecer discriminaciones entre los tenedores de bonos, ni imponerles nuevas obligaciones.

En lo no previsto en este prospecto respecto de la asamblea de tenedores, se aplicarán los parámetros señalados en el decreto 1026 de 1990 y normas que le modifiquen.

INFORME GERENCIAL

Como la presente emisión de bonos de garantía general se efectúa con oferta pública, la junta directiva de la sociedad emisora reconoce al representante legal plenamente facultado para adicionar este prospecto con los informes institucionales que sean del caso, dando cumplimiento a las disposiciones legales vigentes sobre la materia.

X X X X X X X	Revisor Fiscal
Presidente	Matricula

MANEJO FINANCIERO DE LOS BONOS

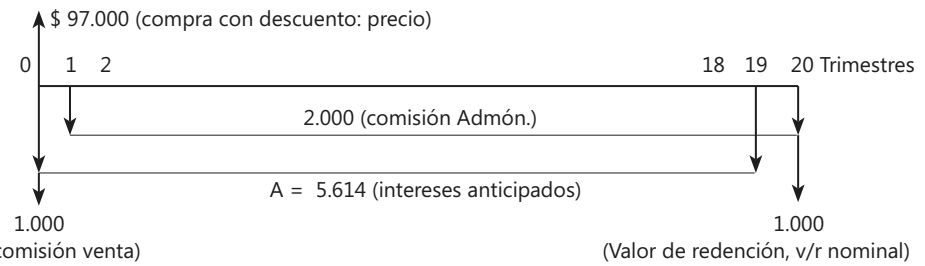
Problema 1

Considere la siguiente información de prensa sobre una emisión de bonos:

Valor nominal:	$100.000 cada bono
Período de maduración:	5 años
Períodos de pago:	Trimestre anticipado
Tasa de interés:	26% anual efectivo
Precio:	A descuento del 3%
Comisión por colocación:	1%
Comisión trimestral vencida por administración:	2%

a) ¿Cuál es la rentabilidad del inversionista?

b) ¿Cuál es el costo de capital?



i_e = 26 % anual ⇒ i_a = 22,456189% anual ⇒ i = 5,614047% trimestral anticipado
A = 0,05614047 x 100.000 = $5.614 valor de los intereses anticipados

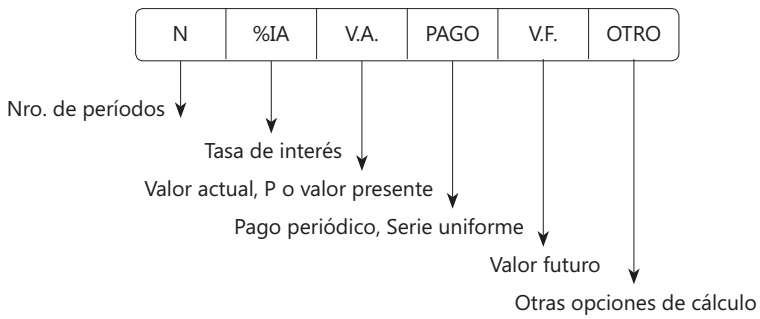
a) Rentabilidad del inversionista (no se tienen en cuenta las comisiones)
97.000 = 5.614 + 5.614 (P/A, i %, 19) + 100.000 (P/F, i %, 20)

Se puede calcular el valor de i% (TIR para el inversionista) por pruebas de ensayo y error, o utilizando el programa de la calculadora financiera *Hewlett Packard 19 BII* o *17BII*, o utilizando Excel y la función TIR.

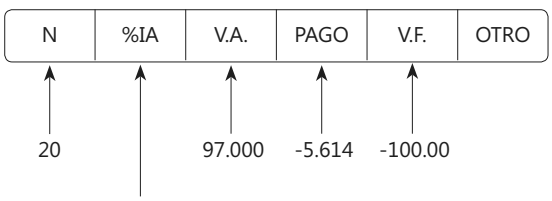
Uso de la calculadora Hewlett Packard 19 BII:

Procedimiento:
Al prender la calculadora aparece el menú principal: entrar por FIN (oprimir la tecla que está debajo de FIN), luego VDT (oprimir la tecla que está debajo de VDT) y luego OTRO.

En este menú oprimimos 1, P/AÑO y luego INIC (modo inicial, los pagos de intereses son anticipados). Luego EXIT.



En la parte superior de la pantalla debe aparecer 1PGO/AÑO. MODO INICIAL



Una vez digitados los valores anteriores se da clic en esta opción para obtener la TIR trimestral. Se obtiene 6,23% trimestral

i = 6.230 trimestral ⇒ i = 24.9909% anual C.T ⇒ i_e = 27.348% anual E

También se puede resolver utilizando en la calculadora la opción de flujo de caja para calcular la TIR.

b) Costo de capital:

97.000 = 1.000 + 5.614 + (5.614 + 2.000) (P/A, i%, 20) + (100.000 - 5.614) (P/F, i%, 20)

De nuevo podemos utilizar las pruebas de ensayo y error para calcular i%.

En este caso utilizamos como alternativa la opción de flujo de caja de la calculadora.

Elaboramos un tablero con los flujos de caja en cada período.

Flujo neto:

Períodos	Flujo neto de caja	No. de veces
0	- 97.000 + 1.000 + 5.614 = - 90.386	Inicial
1 -19	- 195.614 + 2.000 = 7.614	19
20	100.000 +2.000 = 102.000	1

Entramos por FIN, enseguida VDT y luego F.CAJ, oprimimos CALC y aparece

- INICIAL = - 90.386 INPUT (digitamos 90.386 +/- INPUT), luego aparece: - 90.386
- F. CAJA(1) = 7.614 INPUT (digitamos 7.614 INPUT),
- No. DE VECES = 19 INPUT (digitamos 19 INPUT)
- F. CAJA(2) = 102.000 INPUT
- No. VECES = 1 INPUT, como ya terminamos de digitar el flujo de caja, oprimimos
- CALC (calcular) y en el menú que aparece oprimimos TIR y obtenemos la respuesta:

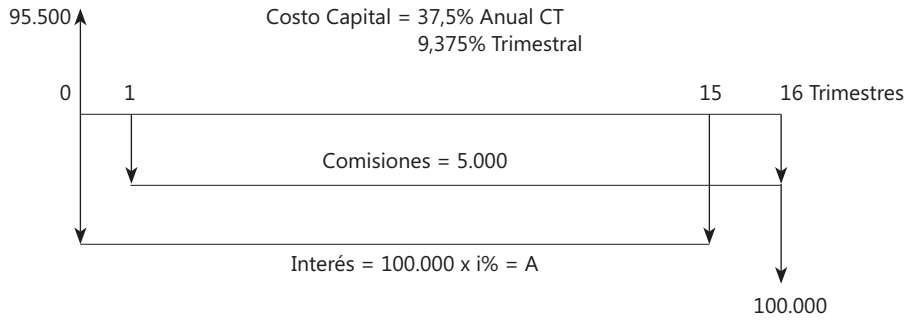
TIR = 8,51519% trimestral

i = 8,51519% trimestral. ⇒ ie = 38,6635% anual E.

Problema 2

Se hace una emisión de bonos a $100.000 cada uno. Los bonos son vendidos con un descuento del 4,5%. Las comisiones por administración serán del 5% cada trimestre vencido.

Los intereses se pagarán T.A. El periodo de maduración será de cuatro años. Si el costo de capital no puede ser superior al 37,5% anual C.T., ¿qué tasa de interés T.A. le puede ofrecer el emisor al inversionista?



Solución con factores:

95,500 = 5.000 (P/A, 9,375%, 61) + A(P/A, 9,375%, 16)(F/P, 9,375%) + 1.100.000 (P/F, 9,375%, 16)

40.618 A x 8,12371 x 1,09375 23.840

A = 3.494 A = 100000 x i i = 3,494% trimestral

i = 3.494% trimestral x 4 = 13,97 anual nominal

PROBLEMAS GENERALES DE BONOS

Problema 3

Para financiar el desarrollo en los próximos cuatro años, el municipio de Pereira emite bonos por un valor total de $5.000.000.000. Cada bono tiene un valor nominal de $400.000. El fideicomisario para el manejo administrativo de los bonos será el Banco Popular, quien cobrará por administración una comisión trimestral del 2,2% del valor nominal de la emisión.

La colocación se hará a través de las bolsas de valores y a descuento, y pagará al intermediario una comisión del 5% del valor nominal.

La Secretaría de Hacienda del municipio estima que el costo de capital no puede exceder del 34% anual efectivo, y también, que la tasa ofrecida a los inversionistas seria del 18% anual T.A. Los bonos se emitirán con un período de maduración de cinco años. ¿Cuál será el descuento?

Respuestas: Costo de capital trimestral: 7,59%; descuento $9.760, equivale al 2,44%. Precio del bono $390.240

Problema 4

Se tiene la siguiente información sobre una emisión de bonos:

Valor Nominal Total:	5.000.000-000
Valor Nominal Unitario:	100.000
Periodo de maduración:	4 años
Tasa de interés:	28% anual T.A. (para pagar los intereses)
Comisión por Administración:	2% Trimestralmente (cobros vencidos)

a) Si el inversionista desea obtener un rendimiento del 32% anual C.T., ¿a cómo debe pagar el bono?

b) ¿Cuál es el costo del capital?

Respuestas: precio: $96.105; costo de capital: 10,22% trimestral, 47,58% anual E.

Problema 5

Una compañía hizo una emisión de bonos a cinco años, al 32,45% efectivo anual, pero con pagos de intereses trimestres anticipados. El valor del bono fue de $500.000. El fideicomisario cobra el 1,8% de comisión por la colocación.

Los bonos fueron vendidos a descuento. El costo de capital del emisor se estima en el 35% anual efectivo. ¿A qué porcentaje de descuento se vendieron los bonos?
Respuestas: precio $485.172; descuento: 2,966%.

Problema 6

Considere la siguiente información de un emisor de bonos:
Valor nominal: 450.000 cada bono; periodo de maduración: 3 años; periodos de pago: mes anticipado; tasa de interés: 26% efectivo; precio a descuento del 2,5%; comisión por colocación: 2,2%; comisión anual vencida por administración: 8%.

a) ¿Cuál es la rentabilidad para el inversionista?
b) Si el inversionista, debido a su iliquidez, tiene que vender sus bonos con un descuento del 6% cuando sólo ha cobrado seis cuotas de intereses, ¿qué rentabilidad obtendrá el nuevo inversionista?
c) ¿Cuál es el costo de capital?

Respuestas: a) Rentabilidad mensual del inversionista: 2,045%, 27,50% anual E. b) El bono lo vende al final del quinto mes (cobró seis cuotas de interés). Rentabilidad del nuevo inversionista: 2,13% mensual, 28,78% anual E. c) Costo de capital: 2,739% mensual, 38,30% anual E.

Problema 7

La junta directiva de la sociedad Emitir S.A. autorizó una emisión de 50.000 bonos por un valor nominal total de $5.000.000.000 (cinco mil millones). Se negoció con el fideicomisario la colocación y la administración así: el 1,2% por la colocación y el 1,5% por la administración, y esta última debe pagarse trimestre vencido.

A los inversionistas se les reconocerá una tasa de interés 32,5% efectivo anual, pero los pagos se harán trimestre anticipado. El período de redención es de tres años. Si el costo del capital no puede exceder del 43,2% efectivo anual, se pregunta: ¿los bonos deben venderse a la par o a descuento, y de ser este último caso, cuál debe ser el descuento? ¿Cuál es la rentabilidad esperada por el inversionista?
Respuestas: Rentabilidad del inversionista: 7,572% Trimestral, 33,91% Anual E. Precio $97.967; descuento $2.033; descuento 2,033%.

Problema 8

Considere la siguiente emisión de bonos: precio a descuento del 4,5%; precio neto de compra $85.950; periodo de maduración de cuatro años; interés del 25% anual efectivo con pagos M.A.; comisión del fideicomisario del 2% sobre el valor nominal y pagadera cada dos meses. ¿Cuál es el costo de capital?

El inversionista decide vender sus bonos a los 15 meses (cobró hasta el interés del final del mes 14), mediante endoso a un tercero. La reventa la hizo por 89.000 cada bono.

¿Cuál es la rentabilidad del nuevo inversionista?

Después de la reventa ¿qué rentabilidad obtuvo el primer inversionista?¿Hizo buen negocio?

Respuestas: Costo de capital 3,064% mensual, 43,64% anual E. Rentabilidad del nuevo inversionista: 1,924% mensual. Rentabilidad después de la reventa: 2,174% mensual. Hizo buen negocio.

Problema 9

Un inversionista tiene dos opciones para invertir $50.000.000:

1. Invertir en un CDT que le garantiza un rendimiento del 31% anual E.
2. Comprar bonos de $150.000 cada uno con un descuento del 7% a tres años y a una tasa del 24% anual T.A.
   a. ¿Qué le recomienda al inversionista?
   b. Si el emisor debe pagar 1,1% de comisión trimestral y el 1,5% por colocación, ¿cuál es el costo de capital?

Respuestas: Rendimiento invirtiendo en bonos: 7,337% trimestral, 32,74% anual E. Mejor inversión: los bonos. Costo de capital: 8,803% trimestral; 40,14% anual E.

Problema 10

Se hace una emisión de bonos a cinco años: valor nominal: $100.000, cada uno; tasa de interés del 22% anual, pero los intereses se pagarán T.A. Los inversionistas tienen como TMAR del 27% anual C.T.

¿Cuál debe ser el descuento en la venta de los bonos?

Respuestas: TMAR: 6,75% trimestral; 29,859% anual E. Tasa ofrecida para los intereses: 22% anual T.A.; 5,55% trimestral A. Precio a descuento $91.083; descuento: 8,916%.

Problema 11

Se hace una emisión de bonos a $500.000 cada uno. Los bonos son vendidos a la par. Las comisiones por administración serán del 4,9% cada trimestre vencido. Los intereses se pagarán M.A. El periodo de maduración sería de 30 meses. Si el costo de capital no puede ser superior al 35,5% anual E, ¿qué tasa de interés le puede ofrecer el emisor al inversionista?

Respuestas: Costo de capital: 35,50% anual E; 2,564% mensual. Interés ofrecido al inversionista: 0,9480% mensual A; 12,109% anual E.

Problema 12

Emitir S.A. hace una emisión de 20.000 bonos con un valor nominal total de $5.000.000.000. Los bonos son vendidos con un descuento del 2,42%. Las comisiones por administración serán del 1,9% cada bimestre vencido. Los intereses se pagarán B.A. El periodo de maduración seria de cuatro años. Si el costo de capital no puede ser superior al 36,5% anual efectivo:

a) ¿Qué tasa de interés B.A. le puede ofrecer el emisor al inversionista?
b) ¿Si un CDT renta el 9,8% anual efectivo se debe invertir en estos bonos?
c) Cuando el inversionista ha cobrado ocho veces los intereses, decide vender sus bonos a un tercero con descuento del 1,5%. ¿Cuál es la rentabilidad del nuevo inversionista?
d) Si los intereses fueran B.V., ¿cuál sería la tasa del inversionista original?
e) Si los bonos se colocan hoy (fecha real) ¿cuál será su fecha de maduración?

Respuestas: a) Tasa ofrecida al inversionista: 3,2095% bimestre A; 21,62% anual E. b) No se debe invertir en el CDT. c) Rentabilidad nuevo inversionista: 3,4430% bimestral; 22,52% anual E. d) Rentabilidad con intereses B.V.: 3,24% bimestral V.

Capítulo 12

Inflación

La inflación consiste en el desequilibrio económico que se caracteriza por un alza general de precios. Su consecuencia fundamental es que un importante índice de erosión afecta a la totalidad de los bienes y servicios. Se refleja como un menor poder adquisitivo de la moneda.

CAUSAS PRINCIPALES

Las causas principales de la inflación son:

1. Inflación de la demanda o intensificación súbita de la demanda de un producto. En este caso la inflación se auto-alimenta, debido a que los consumidores ante el temor de que se produzca nuevas alzas, precipitan las compras.
2. Por la inflación de costos, tales como salarios, alza de intereses, MP, etc. Normalmente se dan las dos causas.

Otras causas laterales

Incremento en las ventas a crédito; grandes promociones publicitarias y la inflación importada por estar la estructura monetaria girando alrededor del dólar como eje del sistema financiero.

EFECTOS

1. Los costos futuros son mayores.
2. Moneda inflada del futuro tendrá menos valor que la de hoy (menos poder adquisitivo).

Forma de remover los efectos de la inflación

a. Los flujos futuros de caja, convertirlos en moneda de hoy y luego utilizar la tasa de interés, i%.
b. Los flujos futuros de caja, convertirlos en moneda de hoy y luego utilizar un interés que tenga en cuenta el interés financiero y la inflación (tasa de interés inflada).

Ejemplo:

Una máquina cuesta hoy $10.000. Se calcula que la inflación (f%) es el 25% anual y el interés financiero es del 18% anual. Calcular el precio de la máquina en los años 1, 2, 3, 4 y 5 en moneda de ese entonces.

MÉTODO 1

Año	Aumento por inflación	costo futuro en ese entonces	Costo futuro en moneda de hoy	V/r presente al 18% (P/F, i%,n)
0		10.000	10.000	10.000
1	2.500	12.500	$\frac{12.500}{(1+0,25)^1} = 10.000$	8.475
2	3.125	15.625	$\frac{15.625}{(1+0,25)^2} = 10.000$	7.182
3	3.906	19.531	$\frac{19.531}{(1+0,25)^3} = 10.000$	6.086
4	4.833	24.414	$\frac{24.414}{(1+0,25)^4} = 10.000$	5.158
5	6.104	30.518	$\frac{30.518}{(1+0,25)^5} = 10.000$	4.371

Esta operación deflacta, para convertir el valor futuro con poder de compra hoy

MÉTODO 2: Utilizar una tasa inflada.

if = i + f + if
if = 0.18 + 0,25 + 0,18 x 0,25
if = 0,475 if = 47,5%

$30.518 en moneda de ese entonces, dentro de cinco años al 18% anual con tasa f = 25% equivalen hoy a:

VP0 = 30.518 (P/F, 47,5%; 5) = $4.371

En sentido contrario: una inversión que hoy requiera de $4.371, a una tasa i = 18% anual, requerirá de:

F = 4.371 (F/P, 47,5%, 5) = $30.518 de ese entonces.

Observe que, debido a la inflación, las tasas de interés comerciales son mayores que la tasa de inflación, con el fin de proteger el dinero de la inflación y obtener un excedente que corresponda a la utilidad (interés) que se debe obtener por invertir (arriesgar el capital).

RESUMEN

1. Si la moneda futura se expresa en moneda de hoy, el valor presente se calcula con la tasa de interés, i%, financiero.
2. Si la moneda futura se expresa en moneda de ese entonces, el VP se calcula con la tasa de interés inflada.

Cálculos de VF considerando la inflación

Casos:

1. Cantidad real obtenida en n años que puede acumularse a una tasa i.

$$F = P\,(f,/p\ ;\ i\%\ ;\ n) \quad (1)$$

2. El poder de compra en pesos de hoy de una cantidad real acumulada en n años.

$$\boxed{F = \frac{P(1+i)^n}{(1+f)^n} = \frac{P(F/P, i\%, n)}{(1+f)^n}} \qquad (2)$$

El denominador (1 + f)n deflacta los pesos, lo que quiere decir que un peso de ese entonces compra menos bienes que un peso de ahora.

$$F = P(1+i)^n\,(P/f;\ f\%;\ n)$$
$$F = P(F/P,\ i\%,\ n)\,(P/F,\ f\%;\ n)$$

Tasa para convertir los pesos de hoy en pesos del futuro con poder de compra de hoy

Tasa de interés real = ir

$$F = P\,(F/p,\ i\%,\ n)\,(P/F;\ f\%;\ n) \quad (1)$$

Si conociéramos ir, calcularíamos a F directamente así:

$$F = P\,(F/p;\ ir\%;\ n) \quad (2)$$

Igualando las ecuaciones 1 y 2 obtenemos:

$$P(1+i_r)^n = P(1+i)^n \frac{1}{(1+f)^n}$$

$$1 + i_r = \frac{1+i}{1+f} \qquad \boxed{i_r = \frac{i-f}{1+f}}$$

Ejemplo:
$1.000 hoy al 10% anual durante siete años y una tasa de inflación del 8% anual. ¿Qué cantidad de dinero puede acumularse con el poder de compra de hoy?

1. Método

F = 1000 (F/p; 10%, 7) (P/F, 8% , 7)
F = 1137

2. Método

$$i_r = \frac{i - f}{1 + f}$$

$$i_r = \frac{0,10 - 0,08}{1 + 0,08} = 0.0185$$

F = P (F/P, ir%, n) = 1000 (F/P; 1,85%; 7) = 1.137

3. El número de pesos de ese entonces requeridos en n años para mantener el poder de compra de hoy. Es decir, no hay i porque no se gana.

   F = P(l + f)n F = 1000 (1 + 0,08) = 1.713.80

4. Los pesos requeridos en ese entonces para tener el poder de compra de hoy y ganar alguna utilidad.

   F = P (F/P, ic%, n) F = 1000 (1 + 0,188) = 3.340

Cálculo para factores de recuperación de capital

Ejemplo:
Una máquina cuesta hoy $5.000.000, pero se estima que será necesario comprarla dentro de cinco años. La tasa de inflación es del 8% anual E. Para asegurar la compra dentro de cinco años se decidió hacer depósitos iguales anuales para reunir este dinero. ¿Cuál debe ser el valor de los ahorros anuales si la tasa financiera que hay en el mercado es del 10% anual E?

Valor futuro de la máquina en pesos de ese entonces:

Usamos la inflación para calcular este valor:

F = 5.000.000(F/P, 8%, 5) = $7.346.640

Para reunir este dinero mediante ahorros anuales iguales convertimos este futuro a una serie uniforme utilizando la tasa financiera:

A = F (A/F, i%, n) A = 7.346.640 (A/F, 10%, 5) A = $1.203.361

PROBLEMAS SOBRE LA INFLACIÓN

Problema 1

Dentro de cinco años se necesitarán $25.000.000. Calcule el valor presente que se debe invertir hoy, si la tasa de interés es del 15% anual y la tasa de inflación es 10% por año.

Respuesta: if = 26,5%; P = $6.100.941

Problema 2

Calcule el valor presente que puedo invertir hoy en un negocio que debe producir, dentro de siete años, una reventa por un valor de $15.000.000, si las tasas de interés y de inflación anuales en promedio son del 8% anual E y del 10%, respectivamente.

Respuesta: if% = 1,88% anual E; P = $3.780.591.

Problema 3

Una empresa proyecta una ampliación dentro de tres años que tendrá un costo de $5.000.000 y dentro de cinco años una renovación de equipos que tendrá un costo de $7.000.000. ¿Cuál es la suma de dinero actual que sería equivalente a esos valores si la tasa de interés es 11% por año y la tasa de inflación es 8% anual?

Respuesta: if% = 19,88 anual E; P = $5.729.467,48.

Problema 4

Una granja puede comprar hoy un tractor por $40.000.000 para sus labores de arado. Tiene como opción aplazar la compra tres años, pero el precio subirá por efecto de la inflación que se estima en el 8,5% anual. Si la tasa financiera es del 10,6% anual E, ¿de cuánto dinero dispondrá a los tres años para la compra si logra obtener una tasa combinada equivalente? ¿Cuál será el costo del tractor a los tres años en pesos con poder de compra de hoy?

Respuestas: $69.121.728 disponible en pesos de ese entonces $51.091.565 valor del tractor.

Problema 5

Heladería 'El Buen Sabor' quiere evitar un gasto de $10.000.000 dentro de dos años, para lo cual desea hacer unas mejoras hoy en sus equipos de refrigeración. Si la tasa de interés es 1,5% mensual y la tasa de inflación es 0,9% también mensual, ¿cuál es la máxima cantidad de dinero de la que puede disponer hoy la administración para las mejoras?

Respuestas: 2,4135% mensual; P = $5.641.921

Problema 6

Calcule la cantidad de dinero corriente de ese entonces que se requerirá dentro de diez años para recuperar operativamente una máquina que hoy cuesta $15.000.000, a una tasa de interés del 12,5% anual E, y a una tasa de inflación del 7,3% anual E.
Respuesta: F = $98.540.260.

Problema 7

Un equipo industrial tiene un costo hoy de $30.000.000. Calcule la cantidad: a) en moneda de hoy y b) en moneda corriente en el quinto año que será equivalente a esta inversión actual, a una tasa de interés anual del 12,8%, y una tasa de inflación del 9% anual.
Respuesta: a) i = 12,8%, F= $54.785.642; b) if = 22,952%, F= 84.294.501

Problema 8

Un ahorrador proyecta una inversión dentro de siete años. Planeó depositar hoy $1.000.000 y hacer cuatro depósitos iguales anuales de $1.300.000 y luego 3 depósitos anuales de $2.000.000 cada uno. ¿Cuánto dinero tendrá en la cuenta después del último depósito en términos del poder de compra de ese entonces, y en términos del poder de compra de hoy, si la tasa de interés que recibió fue del 12% anual y la tasa de inflación fue del 9% anual?
Respuestas: $17.688.477 dinero de ese entonces, $9.676.202 dinero de ese entonces con poder de compra hoy.

Problema 9

¿De cuánto dinero debe disponer hoy una empresa que tiene el compromiso de pagar gastos anuales de $5.000.000 durante seis años, si la tasa de interés es 14,5% anual y la tasa de inflación es del 10% anual?
Respuestas: ic% = 25,95% anual, P= $14.441.197

Problema 10

Un inversionista está considerando la posible inversión en dos proyectos que tienen los siguientes flujos de caja como rublos más significativos en cuanto a costos.

	Proyecto 1	**Proyecto 2**
Costo inicial en equipos	$32.000.000	$48.000.000
Costo de operación y MP anual	$22.000.000	$24.000.000
Valor de salvamento	$ 6.000.000	$ 9.000.000
Vida útil en años	3	6

¿Cuál proyecto deberá seleccionarse, si la tasa de interés es del 10,4% anual y la inflación es del 9,4% anual? Use el análisis del valor presente.
Respuestas: VP Proyecto 1: $116.595.664; VP Proyecto 2: $123.396.262. Es mejor el Proyecto 1

Problema 11

Un inversionista compra bonos de un valor nominal de $100.000. La tasa para los pagos de interés son del 11% anual E, pero los intereses se pagarán semestre vencido. El bono tiene un período de maduración de seis años. Si la tasa atractiva para los inversionistas es del 8% anual, y si además, adicionalmente, quiere protegerse de la inflación, la cual se estima en el 2,5% semestral, ¿cuánto estaría dispuesto a pagar el inversionista como precio del bono?

Respuestas: Tasa para pago de interés: 5,36% semestral, ic% = 6,60% semestral, Precio del bono = $89.910

PROBLEMAS SOBRE DEVALUACIÓN

Compare procedimientos

Problema 12

Un colombiano viaja a EE UU a trabajar. Se compromete a girar cada mes 100 doblares.

Estos dólares son recibidos por su familia, convertidos a pesos y ahorrados. Este procedimiento se hace durante 12 meses. El valor del dólar hoy es de $1.430; y el primer giro llegará dentro de un mes. La devaluación para el año es del 12,5% anual efectiva, y la tasa de interés que le pagan en el depósito es del 1,75% mensual. ¿Cuánto dinero en pesos tendrá al cabo de los 12 meses?

Respuestas: ic% = 2,754% mensual; valor futuro en pesos: $2.127.589.

Problema 13

Usted, como gerente de las EE PP, debe gestionar un crédito en el exterior de 300.000 dólares. La tasa que cobra el banco extranjero es del 8,75% anual E. El crédito será a tres años para pagarlo al final del periodo. US$1.800 hoy.

El intermediario para el crédito es el Banco de la República. Si la devaluación para cada uno de los tres años será del 16; 14 y 12% anual efectivo,

a) ¿Cuánto se deberá pagar a los tres años en dólares?
b) ¿Cuánto en pesos?

Respuestas: Deuda acumulada en US$385.841,60; deuda en pesos: $1.019.770.093.

BIBLIOGRAFÍA

Baca Currea, G. (2002), *Ingeniería Económica*, Bogotá, Fondo Educativo Panamericano.

Baca Urbina, G. (2003), *Fundamentos de Ingeniería Económica*, México, McGraw Hill.

Blank L., y Tarquin A. (1999), *Ingeniería Económica*, Bogotá, McGraw-Hill.

Buenaventura Vera, G. (2009), *Matemáticas Financieras*, Cali, Universidad Icesi.

Degarmo, E. et al. (1998), *Ingeniería Económica*. México, Prentice Hall Hispanoamericana S.A.

García, Jaime A. *Matemáticas Financieras*. Tercera Edición, Prentice Hall, 2000

Meza Orozco, J (2008), *Matemáticas Financieras Aplicadas*, Bogotá, Ecoe Ediciones.

Sarmiento J., Cayón E., Rivera J. (2007), *Matemáticas financieras en Microsoft Excel*, Bogotá, Pontificia Universidad Javeriana.

Serrano Rodríguez, J. (2008), *Matemáticas financieras*. Conceptos y problemas, Bogotá, Universidad de Los Andes.

Serrano, J. (2007), *Matemática financiera y evaluación de proyectos*, Bogotá.

Sosa Gómez, R. (2006), *Manual de Ingeniería Económica*, Medellín, Universidad EAFIT.

Varela R, (1997), *Evaluación económica de proyectos de inversión*, Bogotá, Grupo Editorial Iberoamericana.

Referencias de Internet

Banco de la República (2010), "Unidad de valor real (UVR)" [en línea], disponible en: http://www.banrep.gov.co/series-estadisticas/see_upac_U.htm, recuperado en 2010.

Banco de la República (2000), "Resolución Externa No. 13 de 2000" [en línea], disponible en: http://www.banrep.gov.co/estad/UVR_UPAC/res_ext_13_2000.pdf, recuperado en 2010

Ingeniería económica práctica

Las actividades y operaciones financieras han sido a través de la historia de la humanidad el eje principal del desarrollo y progreso que han permitido e impulsado la industrialización.

Para lograr las mejores decisiones económicas cuando se hace el análisis de alternativas de inversión, es necesario conocer los principios básicos de los procedimientos económicos y sus aplicaciones en el proceso del estudio de inversiones que garanticen una rentabilidad adecuada y un desarrollo progresivo en términos económicos.

La decisión de inversión, como ya se menciono, tiene que ver con la estructura operacional de la empresa y con una de las funciones de la Administración Financiera que es definir donde invertir.

El estudio de la Ingeniería Económica ofrece los conocimientos básicos necesarios para la toma de decisiones, y constituye una herramienta fundamental, actualizada y equilibrada para manejar el dinero eficientemente teniendo en cuenta los factores de tiempo, rentabilidad y oportunidades de inversión.

Se pretende en este texto que los estudiosos de esta disciplina encuentren las herramientas, procedimientos matemáticos y en general los elementos necesarios y suficientes para el análisis económico y la evaluación de alternativas de inversión.

Colección: Textos Universitarios
Área: Administración

ECOE
EDICIONES

ISBN 978-958-648-696-5
9 789586 486965